Istituzioni di Matematiche I

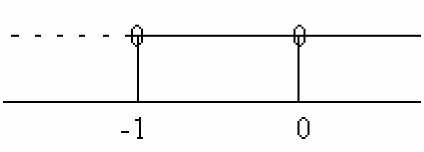
Prova scritta parziale n1 del 17.1.08 - Calcolo differenziale

Soluzioni

1.

C.E. **R**

SGN

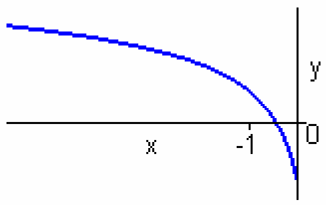


LIM Per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to \pm\infty$ (senza asintoto)

DRV $$f'(x) = \log(1 + 2|x|) + \frac{2\,\mathrm{sgn}x\ (1+x)}{1 + 2|x|}, \quad x \neq 0$$

Per $x > 0$ questa derivata è sicuramente positiva ; per ottenerne il segno per $x < 0$ si ricorre allo studio grafico.
Essendo

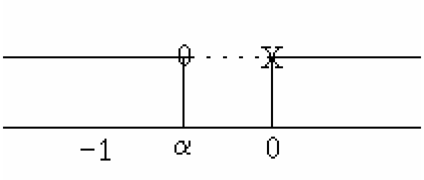
$$f''(x) = 4\,\mathrm{sgn}\,x\ \frac{1 + |x| - \mathrm{sgn}\,x}{(1 + 2|x|)^2}, \quad \text{per } x \neq 0$$



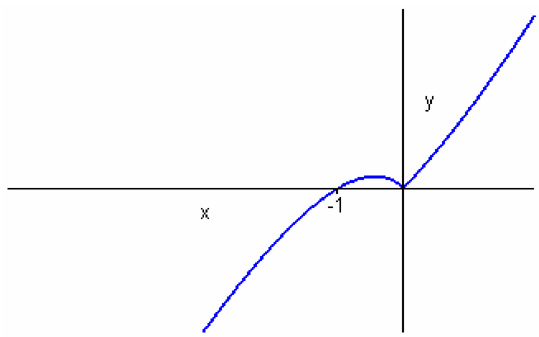
e dunque

$$f''(x) = 4\ \frac{x-2}{(1 - 2x)^2}, \quad \text{per } x < 0$$

si ottiene per f ' il grafico riportato in alto .
Il segno di f ' è riportato a fianco :

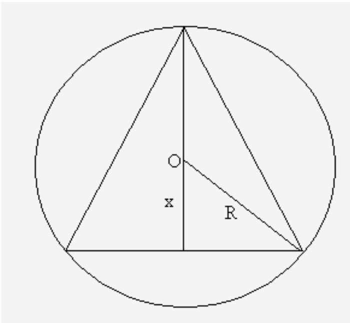


GRAFICO



In particolare, $x = 0$ è un punto angoloso di flesso.

2.



Assumiamo come incognita x il valore della distanza del centro del cerchio dalla base del triangolo, distanza considerata positiva se la base sta al di sotto del diametro ad essa parallelo, negativa in caso contrario; dunque -R < x < R.

$$V = \frac{\pi}{3} (R^2 - x^2) (R + x)$$

$$S = \pi \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{(R + x)^2 + (R^2 - x^2)} = \pi \sqrt{2R} (R + x) \sqrt{R - x}$$

$$V' = -\frac{\pi}{3} (3x^2 + 2Rx - R^2)$$

$$S' = \frac{\sqrt{2R} \quad (R - 3x)}{2 \sqrt{R - x}}$$

In entrambi i casi il valore massimo è ottenuto per x = R / 3 .

3.

Il problema richiede di scrivere il polinomio di Taylor di punto iniziale 0 e grado 3 per la funzione data.
Al terzo ordine si ottengono le seguenti approssimazioni :

$$\text{sen } x \sim x - x^3 / 6$$
$$e^{\text{sen } x} \sim 1 + (x - x^3 / 6) + x^2 / 2 + x^3 / 6 = 1 + x + x^2 / 2$$
$$\text{tg } x \sim x + x^3 / 3$$
$$\text{sen } (\text{tg } x) \sim (x + x^3 / 3) - x^3 / 6 = x + x^3 / 6$$
$$\frac{1}{1 + \text{sen } (\text{tg } x)} \sim 1 - (x + x^3 / 6) + (x^2) - (x^3) = 1 - x + x^2 - 7 x^3 / 6 .$$

In definitiva dunque :

$$P (x) = 1 + x^2 / 2 - 2 x^3 / 3 .$$

4.

$$f (x) = (2x + 9)^{1/2} \qquad f' (x) = (2x + 9)^{-1/2}$$

$$f'' (x) = - (2x + 9)^{-3/2} \qquad f''' (x) = 3 (2x + 9)^{-5/2}$$

$$\sqrt{2x+9} = 3 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{54} + \frac{x^3}{2(2\xi+9)^{5/2}}$$

Nell'intervallo [0 , 1] l'errore è positive e dunque l'approssimazione è per difetto.
Una stima dell'errore nell'intervallo è data da

$$0 < E < \frac{1}{2(9)^{5/2}} = 0{,}00206... \sim 2\ 10^{-3}$$

L'approssimazione di $\sqrt{10}$ si ottiene dai calcoli precedenti per x = ½ :

$$\sqrt{10} \sim 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} \sim 3{,}162037$$

$$0 < E < \frac{1/8}{2(9)^{5/2}} = 0{,}00026...$$

5.

(a) $\sqrt{x^2+y^2} + 2ix - 2y = 2i$

$x = 1 \ ,\ \sqrt{1+y^2} - 2y = 0$

$x = 1 \ ,\ y > 0 \ ,\ y^2 + 1 = 4y^2$

$z = 1 + i/\sqrt{3}$

(b) $z = (1 - i \pm \sqrt{2i}) / 2$

$2i = 2e^{i\pi/2} \rightarrow \sqrt{2i} = \sqrt{2}\ e^{i(\pi/4 + k\pi)} = \pm(1 + i)$

$z = 1$ opp. $z = -i$.