Soluzioni

1.

Riscriviamo la funzione nella forma $e^{\operatorname{tg} x \ \log(1 - \operatorname{sen} x)}$.

La funzione è periodica di periodo 2π e quindi basta studiarla in $[0, 2\pi]$. I calcoli successivi si riferiscono a questa scelta.

C.E. $\quad [0, 2\pi] - \{\pi/2, 3\pi/2\}$

SGN $\quad$ Sempre positiva

LIMITI

per $x \to \pi/2^+$ $\quad f(x) \to +\infty$ $\quad$ as. verticale da destra

per $x \to \pi/2^-$ $\quad f(x) \to 0$ $\quad$ disc. eliminabile da sinistra

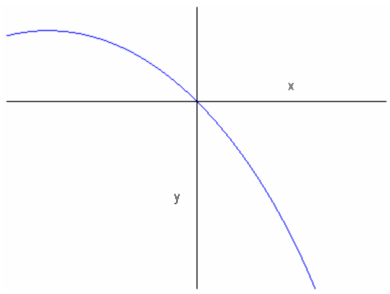
per $x \to 3\pi/2^+$ $\quad f(x) \to 0$ $\quad$ disc. eliminabile da destra

per $x \to 3\pi/2^-$ $\quad f(x) \to +\infty$ $\quad$ as. verticale da sinistra

$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 1$.

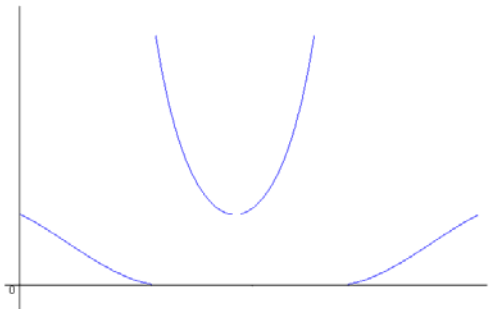
DRV $\quad f'(x) = \dfrac{f(x)}{\cos^2 x} \left(\log(1 - \operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x\right)$

Il segno della derivata è quello del termine entro parentesi e si ottiene per via grafica; ponendo $t = \operatorname{sen} x$, ci riduciamo a studiare la funzione $g(t) = \log(1 - t) - t - t^2$ nell'intervallo $-1 \le t < 1$. Tenendo anche conto del fatto che la sua derivata è $(2t^2 - t - 2)/(1 - t)$, ne deduciamo facilmente il grafico :



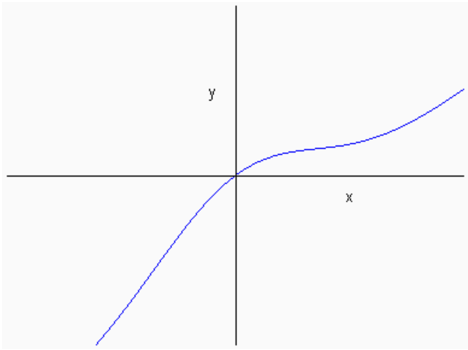
Da questo deduciamo che la derivata $f'(x)$ è positiva per $\operatorname{sen} x < 0$.

GRAFICO nell'intervallo considerato



2.

Grafico della funzione $f(x) = x - 1 + e^{-x^2}$



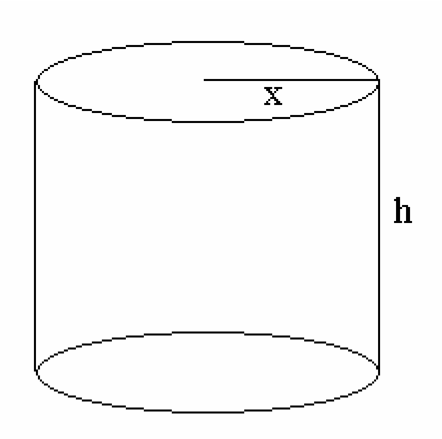
La derivata $1 - 2x\,e^{-x^2}$ della funzione è sicuramente positiva per $x < 0$; per $x > 0$ uno studio grafico prova che la derivata è positiva anche in questo caso.

$x_{n+1} \leq x_n \iff -f(x_n) \leq 0 \iff x_n \geq 0$

$x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} > 0$ (si dimostra per induzione)

In conclusione , la successione è decrescente e tende a 0.

3.



$V = \pi x^2 h \rightarrow h = V / (\pi x^2)$

$S = 2\pi x^2 + 2\pi x V = 2\pi \left(x^2 + \dfrac{V}{\pi x} \right)$

Il minimo di questa funzione per $x \geq 0$ è assunto per $x = \sqrt[3]{V / 2\pi}$. Per questo valore il diametro del cerchio di base e l'altezza del cilindro coincidono ($= \sqrt[3]{4V/\pi}$)

4.

Deve essere $z \neq 0$.

Dalla seconda equazione si ottiene $w = |z| / z$ e dunque $\overline{w} = |z| / \overline{z}$.

Sostituendo nella prima equazione , si ottiene

$$\frac{\bar{z} + z}{\bar{z}^{\,2}} = |z| \, \frac{\bar{z} + z}{z \bar{z}} .$$

Si hanno dunque due possibilità :

- $\bar{z} + z = 0$ cioè $\mathscr{Re}\, z = 0$. In questo caso è $z = i\, b$ (con $b \neq 0$) e $w = - i\, |b| / b$.
- $\bar{z}^{\,2} = |z|$. Passando alla rappresentazione esponenziale , si trova che $z = \pm 1$ $w = z$.

5.

$\sqrt{1+t} \sim 1 + t/2 - t^2/8$ $\sqrt{1-x^2} \sim 1 - x^2/2 - x^4/8$

Il denominatore si approssima con $- x^4 / 8$.

$\sqrt[3]{1+t} \sim 1 + t/3 - t^2/9$ $\operatorname{sen}^2 x \sim x^2 - x^4/3$

$\sqrt[3]{1 + x^2 - x^4/3} \sim 1 + x^2/3 - 2x^4/9$

$2 \cos x \sim 2 - x^2 + x^4/12$

Il numeratore si approssima con $- 7 x^4 / 12$.

Il limite vale $3 / 14$.