

## Istituzioni di Matematiche I

Prova scritta parziale n.1 del 7 dicembre 2007 ( calcolo differenziale )

1. ( punti 13 )

Studiare le principali proprietà e tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |\sin x|^{1/\cos x}.$$

Lo studio della derivata seconda non è richiesto.

Tenendo conto della periodicità e della simmetria, limitarsi a studiare la funzione in un opportuno intervallo minimo.

Precisare se esistono punti di discontinuità eliminabile e – in caso affermativo – se in questi punti esiste la derivata.

Lo studio del segno della derivata è ricondotto a quello di una funzione che dipende da  $x$  attraverso  $\sin^2 x$  : studiare graficamente il segno di questa funzione, dopo aver posto  $t = \sin^2 x$ .

2. ( punti 6 )

Utilizzando la formula di Taylor , calcolare il limite per  $x \rightarrow 0$  della funzione

$$\frac{(\cos x)^{1/x^2} - e^{-1/2}}{\log\left(\frac{1+x}{1+3x^2}\right) - x}.$$

3. ( punti 4 )

Data la parabola  $y = x^2 / 16$  , scrivere le equazioni delle rette ad essa normali nei punti A e B di ordinata 1. Indicato con C il punto di intersezione di queste due rette, inscrivere nel settore parabolico AOBC il rettangolo con lati paralleli agli assi che abbia area massima.

Si ricordi che la retta normale in un punto è la perpendicolare alla tangente in questo punto.

4. ( punti 5 )

Data l'equazione  $2 \sin x - x = 0$  , verificare che nell'intervallo  $[ 0 , 2\pi ]$  ammette una sola soluzione  $x = \xi$  diversa da quella banale  $x = 0$ . Dopo aver trovato un intervallo in cui applicare il metodo delle tangenti , si approssimi  $\xi$  con due iterazioni del metodo.

5. ( punti 5 )

Dato il sistema

$$\begin{cases} \frac{z+w}{z-w} = 1 \\ z^2 + w^2 = -1 \end{cases}$$

trovarne le soluzioni e rappresentarle nel piano complesso.