Istituzioni di Matematiche I

Soluzioni della prova scritta del 13.6.08

1.

Nel dominio assegnato l'equazione ammette le soluzioni costanti $y(x) = 0$, $y(x) = \pi / 2$
Separiamo le variabili ed integriamo, per trovare le altre soluzioni:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{\operatorname{sen} 2s} = \int_{x_0}^{x} ds .$$

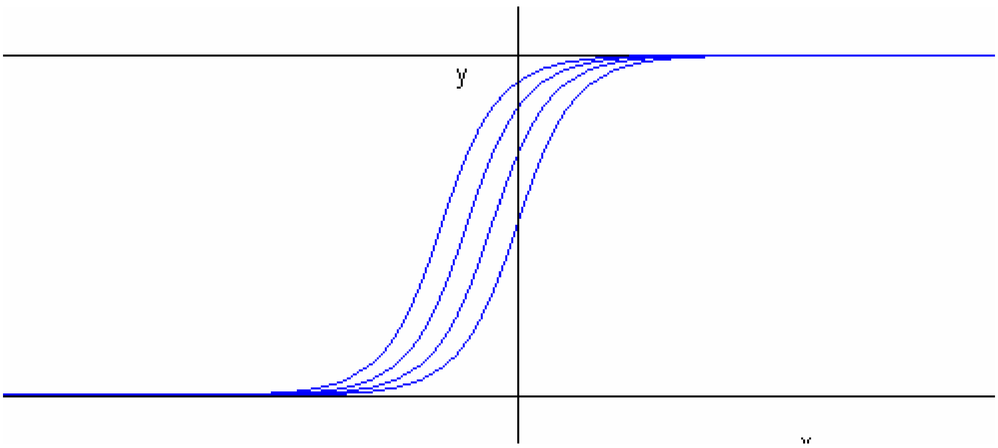
Per quanto riguarda il primo integrale :

$$\int \frac{ds}{\operatorname{sen} 2s} \underset{2s=t}{=} \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\operatorname{sen} t} \underset{\operatorname{tg}(t/2)=z}{=} \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \log |\operatorname{tg} s| + c .$$

Si ottiene dunque

$$\log \sqrt{\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} y_0}} = x - x_0 \Rightarrow \sqrt{\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} y_0}} = e^{x} e^{-x_0} \Rightarrow \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} y_0 \, e^{-2x_0} e^{2x}$$

$y(x) = \operatorname{arctg}(k e^{2x})$ (con k costante positiva) .



La condizione iniziale $y(0) = \pi / 4$ è verificata se $k = 1$: la soluzione è dunque $y(x) = \operatorname{arctg} e^{2x}$.
La condizione iniziale $y(0) = 0$ è verificata solo dalla soluzione costante $y(x) = 0$.
L'unicità di soluzione è dovuta al fatto che la funzione $1 / \operatorname{sen} 2s$ non è integrabile nell'intorno di 0 (essendo un infinito di ordine 1).

2.

L'integrale è improprio perché la funzione non è definita agli estremi dell'intervallo.
Per $x \to 0$ $f(x) \approx x / 2\sqrt{x} \to 0$; l'estremo è una discontinuità eliminabile e dunque nell'intorno di questo punto l'integrale esiste (anche in senso proprio).
Per $x \to 4$ $f(x) \approx 2 / \sqrt{(4-x)}$; la funzione è un infinito di ordine ½ e dunque nell'intorno dedl punto l'integrale esiste (in senso improprio).
Per calcolare l'integrale, possiamo ricorrere alla tecnica del completamento del quadrato: essendo

$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4 ,$$

si ottiene

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\, dx .$$

A questo punto si pone $x - 2 = 2 \operatorname{sen} t$, ottenendo :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(1+\operatorname{sen} t)\, dt = 2\left[\, t - \cos t\,\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi.$$

3.

Per $x = \pm 1$ la serie è nulla e dunque converge alla somma 0.
Per $x^2 > 1$ la serie è a segno costante, per $x^2 < 1$ è a segno alterno.
Studiamola in valore assoluto:

$$|a_n| \approx |x^2-1|^n \left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2+1} - 1 \right) = |x^2-1|^n \frac{\sqrt{n}-1}{n^2+1} \approx \frac{\left|x^2-1\right|^n}{n^{3/2}} .$$

A questo punto il criterio della radice o quello del rapporto permettono di concludere che :

se $|x^2 - 1| < 1$ e cioè $0 < x^2 < 2$ la serie converge ; se $x^2 > 2$ la serie non converge.
Se $x^2 = 2$, sostituendo si trova che la serie è in valore assoluto equivalente ad una serie armonica (di potenza 3/2) convergente e dunque anch'essa converge.

4.

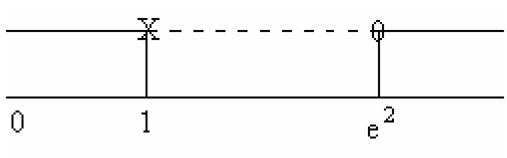
C.E. $x > 0$, $x \neq 1$

SGN sempre positiva

LIMITI per $x \to 0$ $f(x) \to 0$ discontinuità eliminabile

per $x \to 1$ $f(x) \to +\infty$ asintoto verticale per $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$ (senza asintoto perché $f(x)/x \to 0$).

DRV $\quad f'(x) = \dfrac{\log x - 2}{\log^3 x}$



$f''(x) = 2\,\dfrac{3 - \log x}{x \log^3 x}$

Per $x \to 0$ $f'(x) \to 0$: la funzione prolungata è derivabile nel punto.