Istituzioni di Matematiche I - Prova scritta del 17. 1. 08

Soluzioni

1.

- Poniamo prima senx = t , cosx dx = dt :

$$\int \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{1-t}}$$

e poi $(1-t)^{1/2} = z$, $t = 1 - z^2$, $dt = -2z\,dz$:

$$\int \frac{2\,dz}{z^2\,(z^2-2)}$$

Applichiamo il metodo di scomposizione di Hermite :

$$\int \left(-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{z-\sqrt{2}} - \frac{1}{z+\sqrt{2}} \right\} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left| \frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} \right| + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{sen}x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left| \frac{\sqrt{1-\mathrm{sen}x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-\mathrm{sen}x}+\sqrt{2}} \right| + c$$

L'integrale tra 0 e $\pi/2$ non esiste , perché le primitive trovate divergono per $x \to \pi/2$.

- Per trovare a priori questo risultato , studiamo il modo in cui la funzione integranda diverge per $x \to \pi/2$.

Ponendo $\pi/2 - x = t \to 0$, si ottiene $\cos x = \cos(\pi/2 - t) = \mathrm{sen}\, t \approx t$, $1 - \mathrm{sen}\, x = 1 - \mathrm{sen}(\pi/2 - t) = 1 - \cos t \approx t^2/2$. La funzione risulta infinita di ordine 2 e dunque l'integrale proposto non esiste.

2.

Il problema richiede di scrivere il polinomio di Taylor di punto iniziale 0 e grado 3 per la funzione data.
Al terzo ordine si ottengono le seguenti approssimazioni :

$\mathrm{sen}\, x \sim x - x^3/6$

$e^{\mathrm{sen}\, x} \sim 1 + (x - x^3/6) + x^2/2 + x^3/6 = 1 + x + x^2/2$

$\mathrm{tg}\, x \sim x + x^3/3$

$\mathrm{sen}(\mathrm{tg}\, x) \sim (x + x^3/3) - x^3/6 = x + x^3/6$

$$\frac{1}{1+\mathrm{sen}(\mathrm{tg}\, x)} \sim 1 - (x + x^3/6) + (x^2) - (x^3) = 1 - x + x^2 - 7x^3/6 .$$

In definitiva dunque :

$P(x) = 1 + x^2/2 - 2x^3/3$.

3.

Studiamo prima l'equazione omogenea .
Le radici del polinomio caratteristico $k^2 + k + w$ sono :

$(- 1 \pm (1 - 4 w)^{1/2})$ se $w < 1/4$,
$(- 1 \pm i (4 w - 1)^{1/2}) / 2$ se $w > 1/4$,
$-1/2$ (con molteplicità 2) se $w = 1/4$.

Di conseguenza le soluzioni dell'equazione omogenea sono (rispettivamente) :

$$y (x) = e^{-x/2} \left\{ A \, e^{\sqrt{1-4w} \, x/2} + B \, e^{-\sqrt{1-4w} \, x/2} \right\}$$

$$y (x) = e^{-x/2} \left\{ A \cos (\sqrt{4w-1} \; x/2) + B \operatorname{sen} (\sqrt{4w-1} \; x/2) \right\}$$

$$y (x) = e^{-x/2} \left\{ A x + B \right\}$$

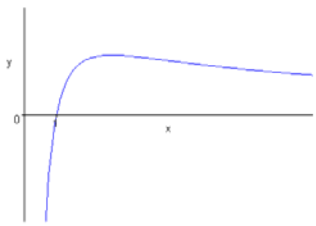
A queste dobbiamo aggiungere una soluzione particolare dell'equazione completa , che cerchiamo nella forma $(A x + B) e^x$ se 1 non è radice del polinomio caratteristico , oppure $x (A x + B) e^x$ se 1 è radice .
1 è radice del polinomio se $(-1 + (1 - 4w)^{1/2}) / 2 = 1$, e questo accade se $w = - 2$.
Se $w \neq - 2$ si cerca dunque una soluzione nella prima forma e svolgendo i calcoli si trova
$A = 1 / (w + 2)$, $B = - 3 / (w + 2)^2$;
se $w = - 2$ la soluzione è nella seconda forma con
$A = 1 / 6$ e $B = -1 / 9$.

4.

Studiamo la funzione $f (x) = \log x / x^{1/3}$, per $x > 0$.
La funzione è positiva per $x > 1$, negativa per $0 < x < 1$, nulla per $x = 1$
Per $x \to 0$ $f (x) \to -\infty$
per $x \to +\infty$ $f (x) \to 0$

$$f' (x) = \frac{3 - \log x}{3 x^{4/3}}$$

$f (e^3) = 3 / e$.



Poiché $f (x) \leq 3 / e$, la disuguaglianza data è verificata $\forall \; c \geq 3 / e$.

5.

$$a_n \sim \frac{\log n}{n^{3/2}} \leq \frac{n^{\alpha}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2 - \alpha}} .$$

Scegliendo $0 < \alpha < 1 / 2$ la serie di confronto risulta convergente e questo permette di stabilire che anche la serie data è convergente.