

Introduzione alla Matematica

Prova scritta del 27.12.2007 [1]

1. Punti 5 + 4

(a) Indicati con A e B rispettivamente gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni

$$\frac{|x+1|}{x-2} \leq 1 \quad , \quad \sqrt{|x-1|} \geq x \quad , \quad \text{trovare } A \cup B \quad , \quad A \cap B \quad , \quad A - B .$$

(b) Risolvere la disequazione $\frac{2 \operatorname{sen} x + |\cos x| - 1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \sqrt{3}} \leq 0 .$

2. Punti 8

Data la funzione $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, trovarne C.E. , segno , zeri e simmetrie.

D'ora in avanti si supponga la funzione $f(x)$ definita nell'insieme C.E. $\cap [0, +\infty)$.

(a) Trovare l'immagine della funzione , provare che è invertibile e scrivere l'inversa

(b) usando la definizione, provare che la funzione $f(x)$ è monotona

(e) utilizzando le informazioni ottenute, tracciare il grafico della funzione $f(x)$.

3. Punti 4 + 4

Disegnare il grafico delle funzioni

$$(a) \quad \arccos 2^{1/\log(x-1)} \qquad (b) \quad \frac{1}{x^2 - 2|x| - 1}$$

deducendolo per passi successivi da quello di funzioni elementari note; precisare il C.E. delle due funzioni.

4. Punti 3

Due vettori \vec{U} e \vec{V} di lunghezza rispettivamente 5 e 8,5 hanno come somma il vettore \vec{S} di lunghezza 10. Calcolare l'angolo che \vec{S} forma con \vec{U} e quello che \vec{U} e \vec{V} formano tra di loro.

5. Punti 5

Provare che la successione definita per ricorrenza da $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$ è crescente.

Introduzione alla Matematica

Prova scritta del 27.12.2007 [2]

1. Punti 5 + 4

(a) Indicati con A e B rispettivamente gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni

$$\frac{|x-2|}{x+1} \leq 1 \quad , \quad \sqrt{|x+1|} \leq x \quad , \quad \text{trovare } A \cup B \quad , \quad A \cap B \quad , \quad A - B .$$

(b) Risolvere la disequazione $\frac{|\cos x| - 2 \sin x - 1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} - \sqrt{3}} \geq 0 .$

2. Punti 8

Data la funzione $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, trovarne C.E. , segno , zeri e simmetrie.

D'ora in avanti si supponga la funzione $f(x)$ definita nell'insieme C.E. $\cap [0, +\infty)$.

(a) Trovare l'immagine della funzione , provare che è invertibile e scrivere l'inversa

(b) usando la definizione, provare che la funzione $f(x)$ è monotona

(e) utilizzando le informazioni ottenute, tracciare il grafico della funzione $f(x)$.

3. Punti 4 + 4

Disegnare il grafico delle funzioni

(a) $\arccos (1 / 2^{\log(x-1)})$

(b) $\frac{1}{x^2 - |x| + 1}$

deducendolo per passi successivi da quello di funzioni elementari note; precisare il C.E. delle due funzioni.

4. Punti 3

Due vettori \vec{U} e \vec{V} di lunghezza rispettivamente 4 e 10 hanno come somma il vettore \vec{S} di lunghezza 12. Calcolare l'angolo che \vec{S} forma con \vec{U} e quello che \vec{U} e \vec{V} formano tra di loro.

5. Punti 5

Provare che la successione definita per ricorrenza da $x_0 = 2$, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$ è decrescente.

