

Istituzioni di Matematiche I

Prova scritta parziale n.2 del 7.02.07

1. (punti 6)

Calcolare

$$\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

2. (punti 9)

Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{e^{y^2+x}}{y}$$

e tracciare il grafico di alcune soluzioni significative, dopo averne indicato il campo di esistenza.

3. (punti 5)

Studiare la convergenza della seguente serie al variare del parametro reale x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^x)}{\sqrt{n+e^{-n}}}.$$

4. (punti 10)

Data la funzione

$$f(t) = \frac{1}{e^t - 1},$$

provare che non è integrabile in alcun intorno di 0 e di $-\infty$, mentre lo è in un intorno di $+\infty$.

Utilizzare queste informazioni per studiare la funzione integrale

$$F(x) = \int_{\log x}^{\log(2x)} f(t) dt$$

e tracciarne il grafico. Lo studio della derivata seconda non è richiesto.

N.B.: la seconda parte del problema può essere svolta anche senza aver dimostrato i risultati della prima parte.

