Soluzioni

1.

C.E. $x > 0$

SGN non può essere determinato per via algebrica

LIM per $x \to 0^+$ $f(x) \to +\infty$

per $x \to +\infty$ $f(x) \approx 2x \to +\infty$ $f(x) - 2x \to 0^+$

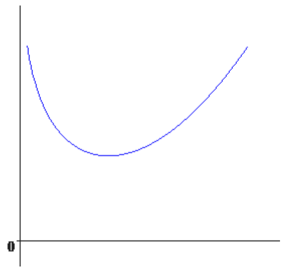
$y = 2x$ asintoto ; il grafico si avvicina all'asintoto da sopra

DRV $f'(x) = 2 + \dfrac{1 - \log x}{x^2} = \dfrac{2x^2 + 1 - \log x}{x^2}$

Per dedurre il segno della derivata , studiamo la funzione

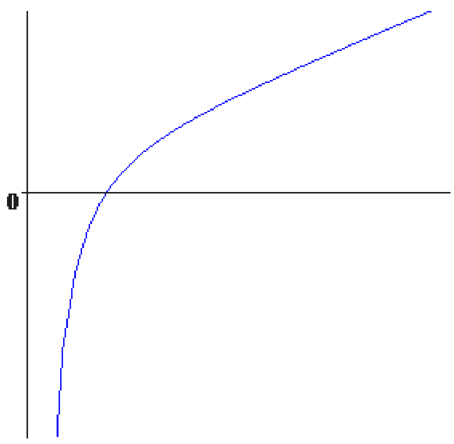
$\varphi(x) = 2x^2 + 1 - \log x$

$\varphi'(x) = 4x - 1/x$



Dunque $f'(x) > 0 \quad \forall \; x > 0$

DRV^2 $f''(x) = \dfrac{2 \log x - 3}{x^3} > 0$ per $x > e^{3/2}$



2.

Condizioni di esistenza : $y \geq 0$ (richiesta dal problema) , $-1 < x < 1$
Soluzioni costanti : $y = 0$
Ricerca delle altre soluzioni :

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} \Rightarrow 2\sqrt{y} = \text{arcsen}\, x - c \Rightarrow y = \frac{(\text{arcsen}\, x - c)^2}{4}$$

L'ultimo passaggio è valido purché arcsen x – c > 0 ; questo significa :

$-1 \leq x \leq 1$ se $c < -\pi / 2$

$\text{sen}\, c \leq x \leq 1$ se $-\pi / 2 \leq c \leq \pi / 2$

nessuna soluz. se $c > \pi / 2$.

Imponendo la condizione iniziale nell'integrale generale in forma implicita, si ottiene che deve essere $c = -2$; la soluzione corrispondente è dunque data da

$$y(x) = \frac{(\text{arcsen}\, x + 2)^2}{4} , \quad -1 \leq x \leq 1 .$$

Dato che la soluzione trovata non interseca quella costante, vale il teorema di unicità.

3.

Con il c. di v. $\text{tg}\; x / 2 = t$, l'integrale diventa

$$\int \frac{3 + t^2}{t(3 - t^2)}\, dt .$$

Scomponendo secondo il metodo di Hermite , si trova

$$\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t - \sqrt{3}} - \frac{1}{t + \sqrt{3}} \right) dt$$

da cui segue

$$\log \left| \frac{t}{t^2 - 3} \right| + c = \log \left| \frac{tg(x/2)}{tg^2(x/2) - 3} \right| + c.$$

4.

$$|a_n| = \frac{\log n}{n^2 + n} |x|^n \sim \frac{\log n}{n^2} |x|^n$$

Applicando il criterio del rapporto , si ottiene $|a_{n+1} / a_n| \rightarrow |x|$ e dunque :

se $|x| < 1$ la serie data converge (assolutamente)

se $|x| > 1$ la serie data non converge .

Se x = 1 :

$$a_n = \frac{\log n}{n^2 + n} \sim \frac{\log n}{n^2} < \frac{n^\alpha}{n^2} = \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

Basta scegliere $\alpha < 1$, per concludere con la convergenza della serie data.

Se x = -1

$$a_n = (-1)^n \frac{\log n}{n^2 + n}$$

la convergenza della serie dal teorema di Leibniz (la decrescenza di $|a_n|$ si ottiene studiano il segno della derivata della funzione $\log x / (x^2 + x)$) .

5.

Riscriviamo la funzione nella forma

$$\frac{e^{-1} - e^{x \log(x/(x+1))}}{1/x} .$$

Poniamo $1 / x = t \rightarrow 0^+$:

$$\frac{e^{-1} - e^{-\log(1+t)/t}}{t} \sim \frac{e^{-1} - e^{-1+t/2}}{t} = \frac{e^{-1}(1 - e^{t/2})}{t} \rightarrow -\frac{1}{2e} .$$