

Istituzioni di Matematiche I

Prova scritta del 17. 01 . 07

1. (punti 8)

Studiare le principali proprietà e tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (1 + x) \log(1 + 2|x|).$$

In particolare precisare gli intervalli di convessità e concavità e gli eventuali punti di non derivabilità.

2. (punti 8)

Calcolare

$$\int \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}} dx.$$

3. (punti 6)

Risolvere il sistema differenziale nelle incognite $y(x)$, $z(x)$

$$y'(x) + z(x) = \sin x, \quad z''(x) - y = 1$$

con le condizioni iniziali

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 1.$$

4. (punti 5)

Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $x > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + x^n)}{x^{2n}}.$$

5. (punti 8)

Utilizzando la formula di Taylor, calcolare il limite per $x \rightarrow 0$ della funzione

$$\frac{\log(1 + x^2) - \log(1 + x \operatorname{arctg} x)}{1 - \cos x + \log \cos x}$$

