Soluzioni della prova scritta parziale n . 3 del 17 . 1 . 06

1.

(I) La funzione f (t) è integrabile in un intorno di 0 e in intorno di 1 , perché questi sono due discontinuità eliminabili . Infatti :
per $t \to 0$ $f(t) \sim -t \log t \to 0$; per $t \to 1$ $f(t) \sim (t-1)/(t-1) \to 1$.
La funzione non è integrabile in nessun intorno di $+\infty$ perché per $t \to +\infty$ $f(t) \sim t^2/\log t \to +\infty$.

(II)

C.E. $[0, +\infty)$

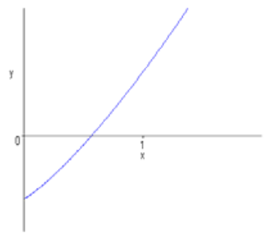
SEGNO $F(x) > 0$ per $x > 1$, $F(x) < 0$ per $0 < x < 1$, $F(0) = F(1) = 0$.

LIMITI per $x \to +\infty$ $F(x) = \dfrac{x\ \xi^2}{\log \xi} > \dfrac{x^2}{\log x} \to +\infty$ (senza asintoto obliquo)

DERIVATA $F'(x) = \dfrac{x(x-1)}{\log x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\frac{1}{2}\log x} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(x\sqrt{x}+x-1)}{\log x}$
per $x \neq 0$, $x \neq 1$.

Il segno della derivata è quello della funzione $\varphi(x) = x^{3/2} + x - 1$.

Tenendo che la sua derivata è $\varphi'(x) = (3/2)\sqrt{x} + 1 > 0$, possiamo tracciare il grafico di questa funzione :



Si deduce dunque l'esistenza di un valore $\alpha \in (0, 1)$ tale che il segno della derivata della funzione integrale F (x) è dato da :

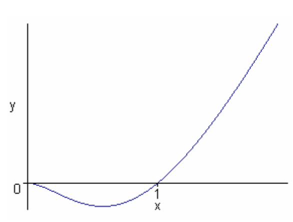
-------------0————————————

0 α 1

Calcolando il limite della derivata F' (x) per $x \to 0$ e per $x \to 1$, si ottiene :

$F'(0) = 0$, $F'(1) = ½$

GRAFICO



2.

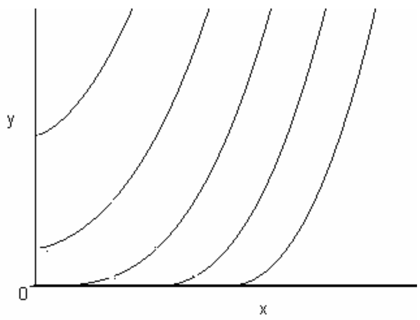
L'equazione è definita per $x \geq 0$ (richiesta del problema) e per $y \geq 0$.
$y = 0$ è soluzione costante.
Per $y > 0$, separiamo le variabili ed integriamo :

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \int_{x_0}^{y} \sqrt{s}\ ds \iff 2\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0} = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{3} x_0^{3/2} \iff \sqrt{y} = \frac{x^{3/2} + c}{3}$$

Esplicitando la y , si trova

$$y = \frac{\left(x^{3/2} + c\right)^2}{9}$$

sotto la condizione $x^{3/2} + c > 0$; dunque se $c \geq 0$ deve essere $x > 0$ (tenendo conto di quanto richiesto dal problema) , se $c < 0$ deve essere $x > c^{2/3}$.
Il problema con la condizione iniziale $y(0) = \alpha$ ha una sola soluzione se $\alpha > 0$, infinite soluzioni se $\alpha = 0$, nessuna soluzione se $\alpha < 0$.



3.

Ponendo $t = \operatorname{tg} x$, l'integrale diventa $\displaystyle\int \frac{t^2}{(1-t)(1+t^2)}\ dt$.

Il metodo di Hermite permette di scomporre la funzione integranda nella forma

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-t} - \frac{1}{4}\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$$

e dunque , integrando , si trova

$$-\frac{1}{2}\log(1-t) - \frac{1}{4}\log(1+t^2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c \ .$$

Ritornando alla variabile x :

$$-\frac{1}{2}\log(1-\operatorname{tg} x) - \frac{1}{4}\log(1+\operatorname{tg}^2 x) - \frac{1}{2} x + c \ .$$

4.

(i) La serie è di segno costante positivo . Perché sia verificata la condizione necessaria per la convergenza deve essere $|x| < 1$; per tali valori di x il termine generale della serie equivale a $n\,|x|^n$. Applicando il criterio della radice oppure quello del rapporto , si conclude con la convergenza della serie.
(ii) La serie è definita per $x > 0$ ed è di segno (definitivamente) positivo . Per essa si ha :

$$\frac{\log(n\,x)}{n^2+x} = \frac{\log n + \log x}{n^2+x} \approx \frac{\log n}{n^2} \leq \frac{n^\alpha}{n^2} = \frac{1}{n^{2-\alpha}} \,.$$

Scelto $\alpha \in (0, 1)$, si conclude con la convergenza della serie .