Soluzioni della prova parziale n.2 dell'11.01.2006

1.

C.E. $\left|\dfrac{5\,\text{sen}\,x-4}{4\,\text{sen}\,x-5}\right| \le 1 \iff |5\,\text{sen}\,x-4| \le |4\,\text{sen}\,x-5| \iff$

$\iff (5\,\text{sen}\,x-4)^2 \le (4\,\text{sen}\,x-5)^2 \iff \text{sen}^2 x \le 1$

Dunque C.E. = R . Poiché la funzione è 2π – periodica , possiamo limitarci a studiarla per $x \in [0, 2\pi]$.

SEGNO Poiché il denominatore è sempre negativo , $f(x) > 0 \iff \text{sen}\,x < 4/5$ e questo accade per $0 < x < \arcsin 4/5$ e per $\pi - \arcsin 4/5 < x < 2\pi$. Inoltre $f(x) = 0$ per $x = \arcsin 4/5$ e per $x = \pi - \arcsin 4/5$. Nel resto dell'intervallo la funzione è negativa.

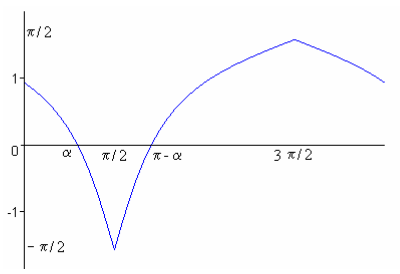
DERIVATA $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{5\,\text{sen}\,x-4}{4\,\text{sen}\,x-5}\right)^2}}\;\frac{5\cos x\,(4\,\text{sen}\,x-5)-4\cos x\,(5\,\text{sen}\,x-4)}{(4\,\text{sen}\,x-5)^2} =$$

$$= \frac{5-4\,\text{sen}\,x}{3|\cos x|}\;\frac{-9\cos x}{(4\,\text{sen}\,x-5)^2} = \frac{-3\,\text{sgn}\cos x}{5-4\,\text{sen}\,x}$$

In conclusione , il segno di f ' è l'opposto di quello di cos x .
La derivata non esiste per $x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$ (punti angolosi)

$$f''(x) = \frac{-12\cos x\;\text{sgn}(\cos x)}{(5-4\,\text{sen}\,x)^2} \;=\; = \frac{-12|\cos x|}{(5-4\,\text{sen}\,x)^2}$$

La derivata seconda è negativa e dunque la funzione è concava.



($\alpha = \arcsin 4/5$)

2.

$\log(1-x^2) \approx -x^2 - x^4/2$ $\sqrt{1+x^2} \approx 1 + x^2/2 - x^4/8$ $\exp(x^2) \approx 1 + x^2 + x^4/2$

Il numeratore si approssima con $-3x^4/4$, il denominatore con $7x^4/12$; il limite vale -9/7.

3.

I due angoli alla base misurano 30^0 ($= \pi / 6$) ciascuno e l'angolo al vertice 120^0 ($= 2\pi / 3$) . Se x è la misura dell'angolo BAD ($0 \leq x \leq \pi / 3$) , quella dell'angolo CAE è $\pi / 3 - x$. Considerando i due triangoli rettangoli BAD e CAE , si trova :

$$BD = \operatorname{sen} x \quad AD = \cos x \quad CE = \operatorname{sen}(\pi/3 - x) \quad AE = \cos(\pi/3 - x)$$

e dunque il perimetro del quadrilatero è

$$p(x) = \sqrt{3} + \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen}(\pi/3 - x) + \cos(\pi/3 - x) =$$

$$= \sqrt{3} + \operatorname{sen} x + \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x =$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x + \frac{3+\sqrt{3}}{2}\cos x .$$

La derivata si annulla per $\operatorname{tg} x = 1 / \sqrt{3}$ cioè per $x = \pi / 6$; la retta cercata è dunque parallela alla base del triangolo e il quadrilatero si riduce ad un rettangolo.

4.

La funzione è continua in tutto **R** (e dunque nell'intervallo chiuso [-2 , 1]) ; la sua derivata

$$f'(x) = 1 + \frac{x \operatorname{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

non esiste per $x = -1$ (che è un punto interno all'intervallo) e quindi le ipotesi del teorema di Lagrange non sono verificate . (Il fatto che la funzione non sia derivabile per $x = 1$ non è invece essenziale) . Per vedere se vale la tesi del teorema , dobbiamo cercare una soluzione $x \in (-2, 1)$ dell'equazione :

$$f'(x) = \frac{f(1) - f(-2)}{1-(-2)} .$$

Sostituendo i valori opportuni , ci riconduciamo a studiare l'equazione

$$1 + \frac{x \operatorname{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{cioè} \quad \frac{x \operatorname{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} .$$

L'equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x \operatorname{sgn}(x^2-1) < 0 \\ x^2 / |x^2-1| = 1/3 \end{cases}$$

(abbiamo elevato al quadrato) ; la soluzione è $x = 1 / 2$, che è un valore interno all'intervallo dato .

5.

Una soluzione è $z = 0$; per trovare le altre , poniamo $z = r \exp(i\theta)$. In questo modo ci riconduciamo all'equazione $r^4 \exp(i 3\theta) = 8 r \exp(i(\pi - \theta))$. Questa equivale a

$$r^3 = 8 \ , \ 3\theta = \pi - \theta + 2k\pi$$

cioè

$$r = 2 \ , \ \theta = \pi / 4 + k\pi / 2 \quad (k = 0, \dots, 3) .$$

In forma algebrica le soluzioni sono $\sqrt{2}(1 \pm i)$, $\sqrt{2}(-1 \pm i)$.