Soluzioni

1. Riscriviamo la funzione nella forma $f(x) = \exp\left(\frac{\log \operatorname{tg} x}{\cos x}\right)$.

La funzione è 2π – periodica : possiamo limitarci a studiarla per $x \in [0, 2\pi]$.

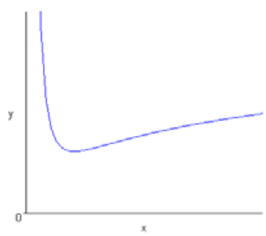
C.E. $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$

SEGNO sempre positiva

LIMITI
per $x \to 0^+$ $f(x) \to 0$ disc. eliminabile
per $x \to \pi/2^-$ $f(x) \to +\infty$
per $x \to \pi^+$ $f(x) \to +\infty$
per $x \to 3\pi/2^-$ $f(x) \to 0$ disc. eliminabile

DERIVATA
$$f'(x) = f(x)\left(\frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} + (\log \operatorname{tg} x)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\right) =$$
$$= f(x)\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \log \operatorname{tg} x\right) =$$
$$= f(x)\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \log \operatorname{tg} x\right).$$

SEGNO f ‘ Occorre studiare quello della funzione $\varphi(t) = 1 + \frac{1}{t^2} + \log t$ per $t > 0$.

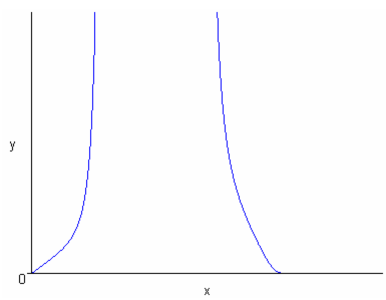


Per $t \to 0$ e per $t \to +\infty$ $\varphi(t) \to +\infty$

$\varphi'(t) = \varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{2}{t^3}$; $\varphi(\sqrt{2}) > 0$.

In definitiva , dunque , il segno di f ’ è quello di sen x .

GRAFICO



Parte facoltativa : studio della derivata nei punti di discontinuità eliminabile

Per $x \to 0$ $\quad f'(x) \approx x^2 \left(\dfrac{1}{x^2} + \log x \right) \to 1.$

Per $x \to 3\pi/2^-$ poniamo $t = (3\pi/2) - x \to 0^+$; poiché $\operatorname{sen} x = -\cos t$, $\cos x = -\operatorname{sen} t$, si ottiene $f'(t) \approx e^{\log t/\operatorname{sen} t} \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \left(1 + \operatorname{tg}^2 t - \log \operatorname{tg} t\right) \cong -e^{\log t/t} \dfrac{\log t}{t} \to 0.$

2. Sviluppando al quarto ordine :

$\operatorname{arctg} x \approx x - \dfrac{x^3}{3}$, $\log(1 + x \operatorname{arctg} x) \approx \log(1 + x^2 - x^4/3) \approx x^2 - 5x^4/6$

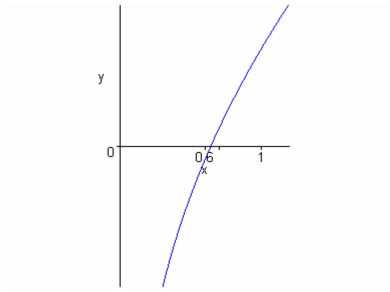
$e^{x^2} \approx 1 + x^2 + x^4/2$; numeratore $\sim -4x^4/3$

$\sqrt{1 - 2x^2} \approx 1 - x^2 - x^4/2$, $\cos^2 x \approx 1 - x^2 + x^4/3$; denominatore $-5x^4/6$.

Il limite vale 8/5.

3. Possiamo riscrivere l'equazione nella forma $\log x + x \log 2 = 0$.

Posto $f(x) = \log x + x \log 2$, si ha $f'(x) = (1/x) + \log 2 > 0$, $f''(x) = -1/x^2 < 0$



Con il teorema degli zeri , si trova che è $0.6 < \alpha < 0.7$.
Il metodo di Newton porta alla successione

$$x_1 = 0.6$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{\log x_n + x_n \log 2}{\log 2 + (1/x_n)} = x_n \frac{1 - \log x_n}{\log 2 + (1/x_n)}$$

da cui si ottiene $x_2 = 0.6502308496$, $x_3 = 0.6411852518$.

4. Osserviamo che $z = 0$, $w = 0$ è una soluzione . Per trovare le soluzioni con $z \neq 0$, ricaviamo $w = -\bar{z}/|z|$ dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda, ottenendo $\bar{z}/|z| + z = 0$, cioè $\bar{z} = -|z|\,z$. In forma esponenziale l'equazione assume la forma $r e^{-i\vartheta} = r^2 e^{i(\vartheta+\pi)}$ che fornisce $r = 1$ e $\vartheta + \pi = -\vartheta + 2k\pi$ cioè $\vartheta = -\pi/2 + k\pi$; in forma algebrica $z = \pm i$. In definitiva , si ottengono le soluzioni $z = w = i$, $z = w = -i$.

5. Indicato con $(x, 0)$ il punto P da determinare , la funzione da rendere minima è data da $f(x) = \sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2 + 3} + \sqrt{(x-1)^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
Cerchiamo i punti stazionari della funzione annullando la derivata :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 3}} + \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}} = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 3}} = \frac{1-x}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}}$$

Assumendo che i due termini abbiano lo stesso segno (cioè $-1 \leq x \leq 1$) , possiamo risolvere l'equazione elevando al quadrato ambo i membri :

$$\frac{2(x+1)^2}{(x+1)^2+3} = \frac{(1-x)^2}{(x-1)^2+1} \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow x(x^3-3x+10) = 0.$$

Poiché nell'intervallo [-1 , 1] il polinomio di terzo grado non si annulla , $x = 0$ è l'unico punto stazionario ; questo è il punto di minimo , dato che per $x \to \pm\infty$ si ha $f(x) \to +\infty$.