Soluzioni della prova scritta di Istituzioni di Matematiche I del 28.06.06

1.

C.E. $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

SGN $f(x) > 0$ in tutto il dominio

LIMITI per $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$; $y = 2x - 4$ asintoto

per $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$; $y = -2x + 4$ asintoto

$f(0) = 3$, $f(2) = 1$

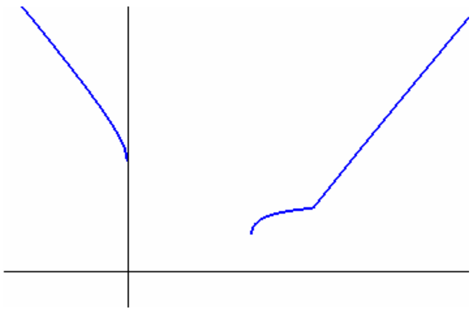
DRV $f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} + \operatorname{sgn}(x-3)$, per $x \neq 0, 2, 3$

```
--------------X              X++++X+++++++
______________________________________________
               0              2      3
```

Il risultato sul segno è immediato se $x > 3$ o $x < 0$; deve essere studiato direttamente per $2 < x < 3$ (in questo caso $\operatorname{sgn}(x-3) = -1$) .

X = 0 e x = 2 punti a tangente verticale, x = 3 punto angoloso

$f''(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x)^3}} < 0$



2.

Se $A = 0$ la soluzione del problema è la funzione costante $y(x) = 3$ che verifica la limitazione richiesta.

Se $A \neq 0$ la soluzione è data da $y(x) = 3e^{A(x-2)}$.

Se $A > 0$ la soluzione è crescente e dunque $\max y = y(20) = 3e^{18A} < 3000$ per $0 < A < (\log 10)/6$.

Se $A < 0$ la soluzione è decrescente e dunque $\max y = y(0) = 3e^{-2A} < 3000$ per $0 > A > -3(\log 10)/2$.

In definitiva si trova la condizione $-3(\log 10)/2 < A < (\log 10)/6$.

3.

Integrando per parti :

$$-\frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} .$$

Per calcolare il secondo integrale poniamo $1 - x^2 = t$, $-2x\,dx = dt$:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$$

e successivamente $\sqrt{t} = z$, $t = z^2$, $dt = 2\, z\, dz$:

$$\int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) dz = \frac{1}{2}\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) + c$$

…..

4.

Il limite si presenta nella forma 0/0 ; applicando il teorema dell'Hôpital si trova

$$\frac{2f(2x)-f(x)-1}{-2\,\mathrm{sen}\,2x}$$

che è ancora della forma 0/0 ; applichiamo ancora il teorema:

$$\frac{4f'(2x)-f'(x)}{-4\cos 2x} \to -\frac{3}{2}.$$

5.

La serie è a segno positivo.
Se $x > 1$, $a_n \sim \log x^n / x^n = n \log x / x^n$. Tralasciando la quantità $\log x$ che non dipende da n e applicando il criterio della radice a n / x^n , si trova il limite $1 / x < 1$ e dunque la serie converge.
Se $0 < x < 1$, $a_n \sim x^n / n^2$. Applicando il criterio della radice, si trova il limite $x < 1$ e dunque la serie converge.
Se $x = 1$, $a_n = \log 2 / (n^2 + 1) \sim \log 2 / n^2$, che converge.