

Introduzione alla Matematica - C. di I. in Chimica molecolare

Prova scritta del 28 giugno 2006

1. (punti 5)

Data la funzione $f(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$, $x \in [0, 2]$, trovarne l'immagine, provare che è invertibile e scrivere l'inversa. Ottenere i risultati per via analitica, non per via grafica.

2. (punti 5 + 4)

Risolvere la disequazione e il sistema seguenti:

$$\frac{(1 - 2 \cos x) \operatorname{sen}^2(x/2)}{\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x} > 0 \quad \begin{cases} y^x = 10^4 \\ y^{1/x} = 10 \end{cases}$$

3. (punti 5)

Data la funzione $f(x) = (x + 1) / \left(\sqrt{|x^2 - 1|} - x \right)$, trovarne campo di esistenza e segno.

4. (punti 6)

Data la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ (con $x \in [0, \pi]$), dedurre dal suo grafico quello delle funzioni $f(x/2)$, $f(x - \pi/4)$, $\log|\log f(x)|$.

5. (punti 5+3)

Sia $AC = 8/5$ una corda in una circonferenza di diametro $AB = 2$. Sulla semicirconferenza non contenente C, determinare un punto P tale che risulti $PC + AP = 12\sqrt{2}/5$.

Sugg.: indicata con x la misura in radianti dell'angolo BAP (con x appartenente ad un opportuno intervallo che deve essere indicato), provare che la condizione del problema si esprime nell'equazione $4 \cos x + 2 \operatorname{sen} x = 3\sqrt{2}$; si risolva l'equazione. Quest'ultima parte può essere svolta indipendentemente dal resto.