

Soluzioni

1.

Per il C.E. deve essere $x > 0$.

Per il segno : la funzione è positiva se

$$\log^2 x - 2 \log x \geq 0 \Leftrightarrow \log x \leq 0 \text{ opp. } \log x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ opp. } x \geq e^2 .$$

Per le altre domande, consideriamo l'equazione $f(x) = k$: questa equivale a

$$\log^2 x - 2 \log x - k = 0 \Leftrightarrow \log x = 1 \pm \sqrt{1+k} \Leftrightarrow x = e^{1 \pm \sqrt{1+k}} .$$

Poiché entrambe le soluzioni sono accettabili, la funzione non è iniettiva e dunque non è invertibile; inoltre la sua immagine è l'insieme $[-1, +\infty)$.

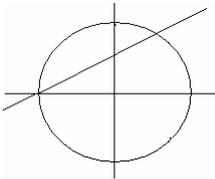
Delle due soluzioni trovate solo una cade nell'intervallo $(0, e]$; questo prova che la restrizione della funzione a tale intervallo è invertibile e l'inversa è data da $f^{-1}(x) = e^{1 - \sqrt{1+x}}$.

2.

- (a) L'equazione si può riscrivere nella forma $\cos x - \sqrt{3} \sin x + 1 = 0$. Posto $\cos x = X$, $\sin x = Y$, ci riconduciamo a studiare il sistema :

$$X - \sqrt{3} Y + 1 = 0, \quad X^2 + Y^2 = 1 .$$

La retta interseca la circonferenza nei punti $(-1, 0)$, $(1/2, \sqrt{3}/2)$.



Le soluzioni sono dunque $x = \pi + 2k\pi$, $x = \pi/3 + 2k\pi$.

- (b) Studiamo separatamente il segno di numeratore e denominatore.

$$2 \cos^2(x/2) - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x - \sin x \geq 0 .$$

I valori che rendono positivo il numeratore corrispondono alla parte colorata della fig.1, mentre quelli che rendono positivo il denominatore sono analogamente individuati nella fig.2.

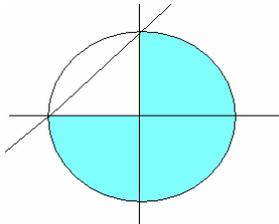


fig.1

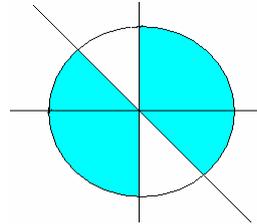


fig.2

La disequazione data è verificata dai valori di x che rendono numeratore e denominatore di segno discorde : $3\pi/4 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ oppure $3\pi/2 + 2k\pi < x < 7\pi/4 + 2k\pi$.

3.

$$\cos \alpha = 4/5, \quad \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

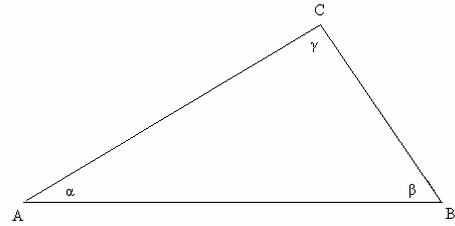
$$\cos \beta = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha = 7/25$$

$$\text{sen } \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$$

$$\cos \gamma = \cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta) = \dots = 44/125$$

$$\text{sen } \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{44}{125}\right)^2} = \frac{117}{125}$$

Applicando il teorema dei seni : $\frac{BC}{3/5} = \frac{AC}{24/25} = \frac{10}{17/125} \Rightarrow BC = 250/39, AC = 400/39.$



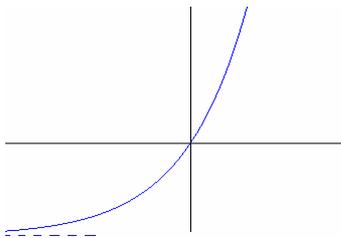
4.

$$(f \circ f \circ g)(x) = \log \log |x|, \quad \text{per } |x| > 1$$

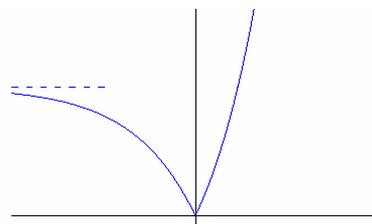
$$(f \circ g \circ f)(x) = \log |\log x|, \quad \text{per } x > 0, x \neq 1$$

$$(f \circ f \circ g)(x) = \log \log |x|, \quad \text{per } x > 1$$

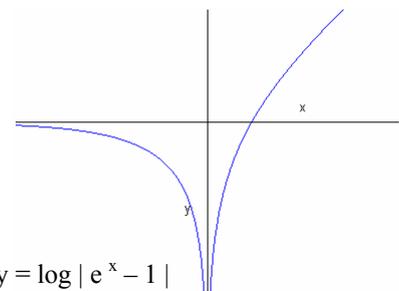
5.



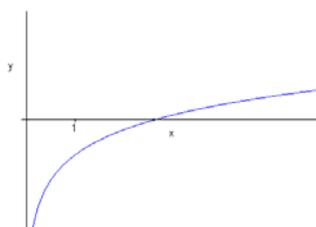
$$y = e^x - 1$$



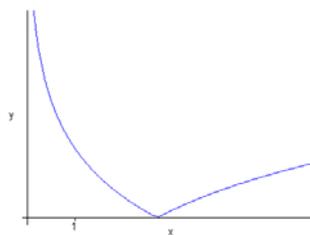
$$y = |e^x - 1|$$



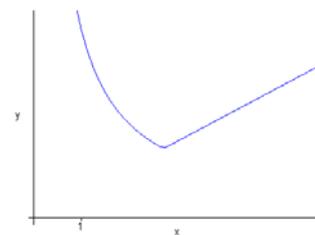
$$y = \log |e^x - 1|$$



$$y = \log x - 1$$



$$y = |\log x - 1|$$



$$y = \exp(|\log x - 1|)$$