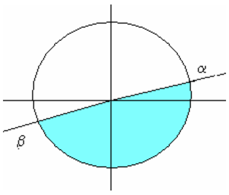
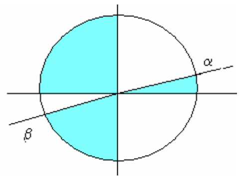
Soluzioni

1. (a) Deve essere $\cos 2x \neq \pm 1$, cioè $x \neq k\pi/2$.
I due denominatori sono positivi e $1 - \cos 2x = 2\,\mathrm{sen}^2 x$, $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$.
Possiamo riscrivere la disequazione nella forma $2\,\mathrm{sen}\,x \cos^2 x > 6 \cos x\, \mathrm{sen}^2 x$ ovvero $\mathrm{sen}\,x \cos x\,(\cos x - 3\,\mathrm{sen}\,x) > 0$. Il segno di $\mathrm{sen}\,x \cos x$ è immediato (positivo nel I e III quadrante , negativo nel II e IV). Studiamo la disequazione $\cos x - 3\,\mathrm{sen}\,x > 0$, per via geometrica , ponendo $\cos x = X$, $\mathrm{sen}\,x = Y$; si ottiene il sistema $X - 3Y > 0$, $X^2 + Y^2 = 1$.



Nella figura a fianco la parte colorata indica le soluzioni di questa disequazione . Poiché i punti di intersezione della retta e della circonferenza sono $\pm\ (3/\sqrt{10}\ ,\ 1/\sqrt{10})$, possiamo scrivere $\alpha = \mathrm{arctg}\,(1/3)$ e $\beta = \alpha + \pi$.
Tenendo conto anche del segno di $\mathrm{sen}\,x \cos x$, la disequazione di partenza è risolta nelle zone colorate della successiva figura .



1. (b) La radice è definita $\forall\, x \in R$.

$$1 + 2\,\mathrm{sen}\,x < 0 \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1 + 2\,\mathrm{sen}\,x \geq 0 \\ 4 - \cos^2 x \geq 1 + 4\,\mathrm{sen}^2 x + 4\,\mathrm{sen}\,x \end{cases}$$

$$\mathrm{sen}\,x < -1/2 \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \mathrm{sen}\,x \geq -1/2 \\ 3\,\mathrm{sen}^2 x + 4\,\mathrm{sen}\,x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{sen}\,x < -1/2 \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \mathrm{sen}\,x \geq -1/2 \\ (-2 - \sqrt{10})/3 \leq \mathrm{sen}\,x \leq (-2 + \sqrt{10})/3 \end{cases}$$

$$\mathrm{sen}\,x \leq (-2 + \sqrt{10})/3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \mathrm{arcsen}\,(-2 + \sqrt{10})/3 \ \text{oppure}\ \pi - \mathrm{arcsen}\,(-2 + \sqrt{10})/3 \leq x \leq 2\pi$$

2. Condizioni per il C.E. : $\begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 > 0 \\ \dfrac{|x|}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} \leq 1 \end{cases}$

La prima disequazione è sempre verificata . La seconda si può riscrivere successivamente nella forma : $\sqrt{2x^2 - 2x + 1} \geq |x| \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$, che è sempre verificata . Il C.E. è dunque **R** .
Condizioni per la positività :

$$\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \geq \sqrt{2}\,x$$

Per $x < 0$ è verificata ; per $x \geq 0$ equivale a $2x^2 \leq 2x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x \leq 1/2$.
In definitiva , $f(x) > 0$ per $x < ½$, $f(x) = 0$ per $x = ½$, $f(x) < 0$ per $x > ½$.

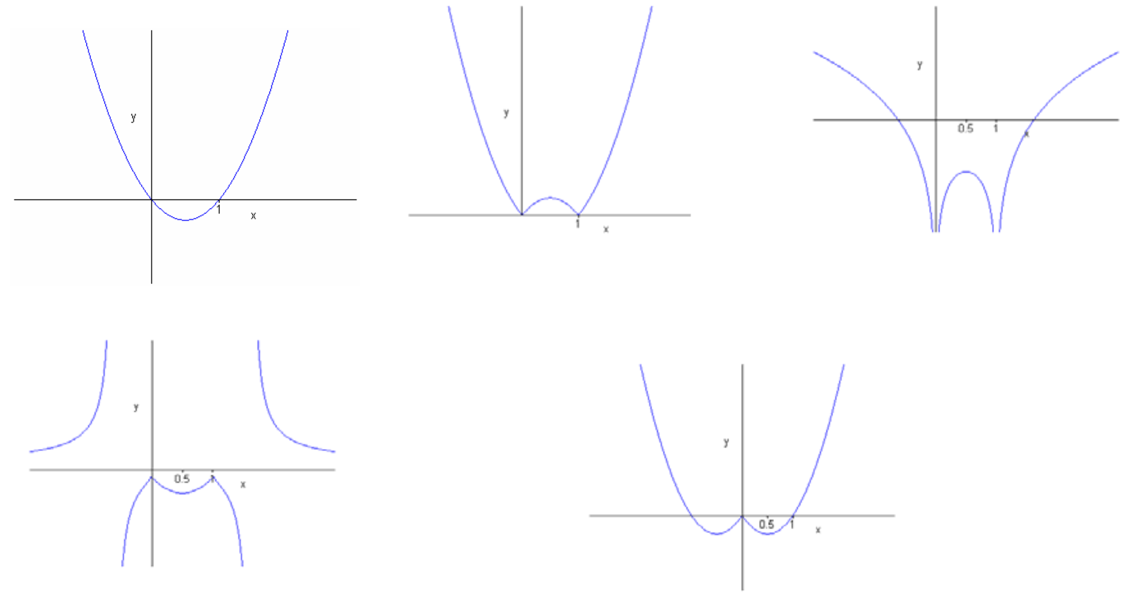
3. Per il C.E. della funzione deve essere

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x + \sqrt{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \sqrt{1-x} > -x \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \text{ opp. } \begin{cases} x < 0 \\ 1-x > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(-1-\sqrt{5})/2 < x \leq 1]$$

Consideriamo l'equazione $f(x) = k$ che equivale a $\sqrt{1-x} = e^k - x$.
Sotto la condizione $\mathbf{e^k - x \geq 0}$, elevando al quadrato e svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione $x^2 + (1-2e^k)x + (e^{2k} - 1) = 0$. Sotto l'ulteriore condizione $\mathbf{5 - 4e^k \geq 0}$ cioè $k \leq \log(5/4)$ si ottiene $x = (2e^k - 1 \pm \sqrt{5-4e^k})/2$.
Sostituendo nella disequazione $e^k - x \geq 0$ i valori trovati per x , si trova che la soluzione con il segno + davanti la radice la risolve per $k \geq 0$, quella con il segno – la risolve per ogni valore di k. Infine entrambe le soluzioni sono accettabili , perché stanno nel C.E. .
In conclusione , l'immagine di f è $(-\infty, -\log(5/4)]$ e la funzione non è iniettiva.

4.



5. Facciamo vedere che $3^n > n\,2^n \Rightarrow 3^{n+1} > (n+1)\,2^{n+1}$.
Utilizzando l'ipotesi , si ottiene $3^{n+1} = 3 \cdot 3^{n+1} \geq 3\,n\,2^n$.
Rimane da provare che è $3\,n\,2^n \geq (n+1)\,2 \cdot 2^n$ e questo è vero per $n \geq 2$.
Per completare la dimostrazione per induzione , occorre verificare che la minorazione è vera per n = 1 e per n = 2 : la verifica è immediata.