Soluzioni

1.

$$\cos\beta = -1/9 \quad , \quad \text{sen}\,\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{81}} = \frac{4}{9}\sqrt{5}$$

$$\cos\alpha = \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} = \frac{2}{3} \quad , \quad \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos\gamma = \cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \frac{22}{27}$$

$$\text{sen}\,\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{22}{27}\right)^2} = \frac{7}{27}\sqrt{5}$$

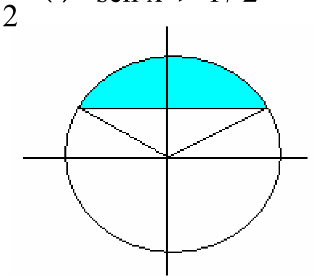
Applicando il teorema dei seni :

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{b}{\frac{4\sqrt{5}}{9}} = \frac{1}{\frac{7\sqrt{5}}{27}} \Rightarrow a = \frac{9}{7}\ ,\ b = \frac{12}{7}$$

2.

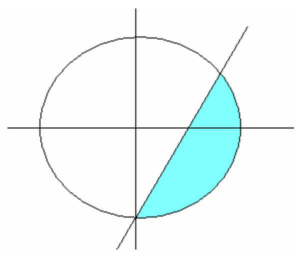
(a) $\begin{cases} \text{sen}\,x \geq 0 \\ 1 - \text{sen}\,x < 2\,\text{sen}^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,x \geq 0 \\ \text{sen}\,x < -1 \text{ opp. } \text{sen}\,x > 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \text{sen}\,x > 1/2$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

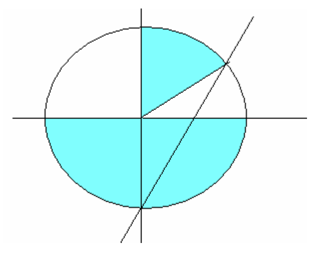


(b) La disequazione equivale a $\dfrac{2\cos x - \text{sen}\,x - 1}{2\,\text{sen}\,x\,\cos x} < 0$.

Studiamo il segno del numeratore ; posto $\cos x = X$, $\text{sen}\,x = Y$, questo è positivo se $2X - Y - 1 \geq 0$.
La retta interseca la circonferenza nei punti (0 , -1) , (4 / 5 , 3 / 5) .



Posto α = arcsen 3/5 = arccos 4/5 = arctg 3/4 , il numeratore è positivo per $2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$ e per $3\pi/2 + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$ .Il denominatore invece è positivo per $k\pi < x < \pi/2 + k\pi$.
La disequazione è dunque verificata per
$\alpha + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi$ opp. $\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$
$x \neq 3\pi/2 + 2k\pi$..



3.

Per il C.E.

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 1 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

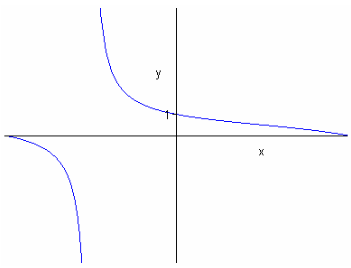
Per il segno : la funzione è positiva se

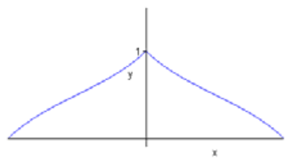
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} \leq x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 1 < x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Dunque la funzione si annulla per $x = 1$ e per $x > 1$ è negativa .

Per le altre domande, consideriamo l'equazione $f(x) = k$: questa equivale successivamente a $\sqrt{x^2 - 1} = x - e^k \Leftrightarrow x^2 - 1 = (x - e^k)^2$ purché $x - e^k \geq 0$.
Sviluppando i calcoli, si ottiene $x = (1 + e^{2k}) / (2e^k)$.
La soluzione trovata è accettabile (è facile verificare che è sempre $x \geq 1$. La condizione $x - e^k \geq 0$ è verificata per $k \leq 0$. In definitiva , l'immagine della funzione è $(-\infty, 0]$, la funzione è iniettiva e $f^{-1}(x) = (1 + e^{2x}) / (2e^x)$.

4.





5.

Per $n = 1$ la maggiorazione è vera ($9 \leq 28$) .
Supponiamola vera per n e deduciamola per $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} 3^{2k} = 3^{2n+2} + \sum_{k=1}^{n} 3^{2k} \leq 3^{2n+2} + n\left(3^{2n+2} + 1\right).$$

Rimane dunque da provare che è $3^{2n+2} + n\left(3^{2n+1} + 1\right) \leq (n+1)\left(3^{2n+3} + 1\right)$.
Sviluppando i calcoli , la verifica non presenta difficoltà.