Esempi di sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine

Limitiamoci a considerare sistemi a coefficienti costanti, che siano omogenei oppure abbiano termini noti dello stesso tipo di quelli visti nel metodo dei coefficienti indeterminati per le equazioni lineari.

Esempio 1 $\begin{cases} y' = 2y - z + \operatorname{sen} x \\ z' = y + x . \end{cases}$

<u>I passo</u>: **ricaviamo z dalla prima equazione**

$z = 2y - y' + \operatorname{sen}x$

<u>II passo</u>: **deriviamo membro a membro nell'equazione ottenuta**

$z' = 2y' - y'' + \cos x$

<u>III passo</u>: **sostituiamo nella seconda equazione del sistema**

$\mathbf{y'' - 2y' + y = \cos x - x .}$

<u>IV passo</u>: risolviamo l'equazione

Procedendo nel modo consueto, si trova

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - x - 2$$

<u>V passo</u>: **deduciamo z**

Nell'equazione ottenuta al I passo sostituiamo y (x) e y ' (x)
(quest'ultima va calcolata esplicitamente)
Sostituendo ad y e y ' i valori trovati, si deduce infine

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 (x-1) e^x + \frac{\cos x}{2} - 2x - 3$$

Condizioni iniziali

Per questo sistema le condizioni iniziali sono della forma :

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad z(x_0) = z_0 ,$$

ad esempio

$$y(0) = 0 \quad , \quad z(0) = 1.$$

Sostituendole nell'integrale generale, si ottiene

$$c_1 - 2 = 0 \quad , \quad c_1 - c_2 + ½ - 3 = 1$$

cioè

$$c_1 = 2 \quad , \quad c_2 = -3/2.$$

Il sistema differenziale ha dunque un'unica soluzione, data da

$$y(x) = 2e^x - \frac{3}{2} x e^x - \frac{\operatorname{sen} x}{2} + x - 2 = \ldots.$$

$$z(x) = 2e^x - \frac{3}{2}(x-1) e^x + \frac{\cos x}{2} - 2x - 3 = \ldots.$$

Avremmo potuto procedere anche in un altro modo.
Quando otteniamo l'equazione del secondo ordine in y :

$$y'' - 2y' + y = \cos x - x,$$

possiamo associarle le condizioni iniziali. La condizione y (0) = 0 è data dal problema. La condizione su y' (0) la ricaviamo dall'equazione $y' = 2y - z + \text{sen}\, x$: $y'(0) = 2y(0) - z(0) = -1$.

Alle soluzioni dell'equazione

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2} \text{sen}\, x - x - 2$$

imponiamo le condizioni iniziali, deducendo $c_1 = 2$, $c_2 = -3/2$ (gli stessi valori trovati precedentemente!).

Quando ricaviamo z usando la prima equazione : $z = -y' + 2y + \text{sen}\, x$, otteniamo direttamente la soluzione che verifica la condizione iniziale.

Esempio 2 $\begin{cases} y' = y - z + x \\ z' = y + 2z + e^x . \end{cases}$

<u>I passo</u>: **ricaviamo z dalla prima equazione**

$$z = y - y' + x$$

<u>II passo</u>: **deriviamo membro a membro nell'equazione ottenuta**

$$z' = y' - y'' + 1$$

<u>III passo</u>: **sostituiamo nella seconda equazione del sistema**

$$y'' - 3y' + 3y = -2x + 1 - e^x$$

<u>IV passo</u>: **risolviamo l'equazione lineare ottenuta**

Procedendo nel modo consueto, si trova

$$y(x) = e^{3x/2}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} - e^x$$

<u>V passo</u>: **ricaviamo z utilizzando l'equazione ottenuta al I passo**

Si ottiene

$$z(x) = e^{3x/2}\left[c_1\left(-\frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}\,x/2) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}\,x/2)\right) + \right.$$

$$\left. + c_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\sqrt{3}\,x/2) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}\,x/2)\right)\right] + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} .$$

Esempio 3 $\begin{cases} y' = 5y - 3z \\ z' = y + z . \end{cases}$

<u>I passo</u>**: ricaviamo y dalla seconda equazione**

(si ottiene un'espressione più semplice che ricavando z dalla prima equazione ; ovviamente possiamo fare anche l'altra scelta)

$y = z' - z$

<u>II passo</u>: **deriviamo membro a membro**

$y' = z'' - z'$

III passo: **sostituiamo nella prima equazione**

si ottiene $z'' - 6z' + 8z = 0$

IV passo: **risolviamo l' equazione lineare ottenuta**

Procedendo nel modo consueto, si trova

$$z(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} .$$

V passo: **ricaviamo y usando l' equazione ottenuta al primo passo**

Si ottiene

$$z(x) = c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{4x} .$$