Integrali impropri - Esercizi proposti #2 – Soluzioni

1. $$\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\, dx$$

La funzione f (x) è continua nell'intervallo di integrazione; dobbiamo solo controllarne il comportamento all'infinito.

Poiché per $x \to +\infty$ risulta $f(x) \sim c / x^{1/3}$, la funzione è infinitesima di ordine minore di 1 e dunque l'integrale non esiste.

2. $$\int_1^{+\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) dx$$

La funzione è continua nell'intervallo di integrazione; anche in questo caso dobbiamo controllare solo il comportamento per $x \to +\infty$.

Poiché $\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \approx -\frac{1}{6x^3}$, la funzione è un infinitesimo di ordine 3 e dunque è integrabile.

3. $$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$$

La funzione diventa infinita per $x = \pi / 2$ (cioè non è limitata nell'intorno di $\pi / 2$).

Per studiare il comportamento di $f(x)$ per $x \to \pi / 2$, effettuiamo il cambiamento di variabile $\pi / 2 - x = t$, con $t \to 0^+$:

$$\sqrt{\operatorname{tg} x} = 1 / \sqrt{\operatorname{tg} t} \approx 1 / \sqrt{t} = 1 / (\pi / 2 - x)^{1/2}$$

$f(x)$ risulta dunque infinita di ordine 1/2 per $x \to \pi / 2$, e questo garantisce l'esistenza dell'integrale.

4. $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen}x - \cos x}$$

L'integrale è improprio perché la funzione diverge per $x = \pi / 4$.

Poiché $\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{2}\,(x - \pi/4) + o(x - \pi/4)$, la funzione è un infinito di ordine 1 e dunque non integrabile.

5. $$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{\sqrt{|x^2 - 1|}}\, dx \quad (p \in R)$$

- Per $x \to 1$ $f(x) \approx 1/\sqrt{2|x-1|}$; la funzione è un infinito di ordine $1/2$ e dunque in un intorno di questo punto è integrabile qualunque sia il valore di p.

- Per $x \to +\infty$ $f(x) \approx 1/x^{1-p}$; per essere integrabile, f (x) deve essere un infinitesimo di ordine maggiore di 1 e questo accade per $1 - p > 1$, cioè per $p < 0$.

- Per $p < 0$ la funzione è discontinua anche in $x = 0$.
  Per $x \to 0$ $f(x) \approx 1/x^{-p}$. La funzione è integrabile se $-p < 1$, cioè se $p > -1$.

6. $$\int_0^{+\infty} x^p\,(1 - \exp(-1/\sqrt{x}))\, dx \quad (p \in \mathbf{R})$$

- Per $x \to +\infty$ $f(x) \approx 1/x^{1/2-p}$; la funzione è integrabile in un intorno di $+\infty$ se $1/2 - p > 1$, cioè se $p < -1/2$.

- Per $x \to 0$ $f(x) \approx 1/x^{-p}$; la funzione è integrabile in un intorno di 0 se $-p < 1$, cioè se $p > -1$.

7. $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} \, dx \qquad (p \in \mathbf{R})$

- Data la presenza dell'esponenziale, per $x \to +\infty$ la funzione è infinitesima di ordine superiore ad ogni potenza di $1 / x$ e dunque l'integrale in un intorno di $+\infty$ esiste.

- Per $x \to 0$ risulta $f(x) \approx 1/x^{1-p}$ e dunque l'integrale in un intorno di 0 esiste se $1 - p < 1$, cioè per $p > 0$.

In conclusione, l'integrale dato esiste per $p > 0$.

Indicato con $\Gamma(p)$ il precedente integrale come funzione di $p > 0$, integrando per parti si trova $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$.

Infatti $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} \, dx$, $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p} \, dx$.

Calcoliamo $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p} \, dx$ integrando per parti, prendendo una primitiva di e^{-x} e la derivata di x^p :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p} \, dx = \left[-e^{-x} x^p \right]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} \, dx \; .$$

Poiché $\left[-e^{-x} x^p \right]_0^{+\infty} = 0$, si ottiene il risultato indicato.

Inoltre è immediato verificare che è $\Gamma(1) = 1$.

Dunque:

per $p = n \in \mathbf{N}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$, cioè $\Gamma(n+1) = n\,!$

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x^p}{\sqrt{1+x^{2p}}} \right) dx \quad (p \in \mathbf{R})$

- Se $p = 0$: $f(x)$ è una funzione costante non nulla e l'integrale non esiste
- Se $p > 0$: $f(x)$ non ha punti di discontinuità e inoltre per $x \to +\infty$ risulta:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^{2p}} - x^p}{\sqrt{1+x^{2p}}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2p}}\,\left(\sqrt{1+x^{2p}} + x^p\right)} \approx \frac{1}{2x^{2p}}$$

Dunque, la funzione è integrabile se $2p > 1$, cioè se $p > 1/2$.

- Se $p < 0$, posto $q = -p$, riscriviamo la funzione nella forma $1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^{2q}}}$.

  Poiché per $x \to +\infty$ è $f(x) \to 1$, l'integrale non esiste.

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{1/x}}{|x|^p}\, dx$

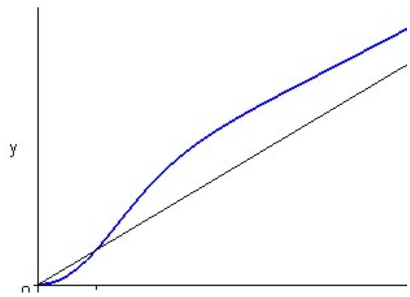
- Per $x \to -\infty$, $f(x) \sim 1 / |x|^p$; dunque, la funzione è integrabile in un intorno di $-\infty$ se $p > 1$.

- Per $x \to 0^-$, $f(x) \to 0$ (verificare il risultato, ponendo $t = -1/x$); dunque, $x = 0$ è una discontinuità eliminabile (da sinistra) e l'integrale in un intorno di 0 esiste.

In conclusione, l'integrale esiste per $p > 1$.

10.

Dire se esiste finita l'area della regione di piano compresa nel semipiano delle ascisse positive tra il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2}{1+x^3}$ e il suo asintoto all'infinito.



Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \approx x \quad , \; f(x) - x \approx \frac{2x^2 - x}{1+x^3} \approx \frac{2}{x} \to 0^+ .$$

Dunque, l'asintoto obliquo ha equazione $y = x$.

Inoltre $f(x) - x \geq 0$ per $x \geq 1/2$ (limitatamente ai valori positivi di x).

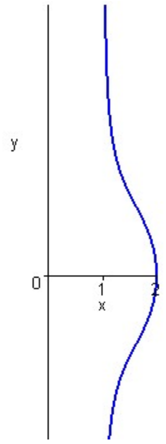
L'area della regione richiesta è data dall'integrale:

$$\int_0^{+\infty} \left| f(x) - x \right| dx = \int_0^{1/2} \frac{x - 2x^2}{1+x^3}\, dx + \int_{1/2}^{+\infty} \frac{2x^2 - x}{1+x^3}\, dx$$

Il primo integrale a secondo membro esiste finito; l'altro invece non esiste perché per $x \to +\infty$ la funzione integranda è infinitesima di ordine 1.

11.

Dire se esiste finita l'area della regione di piano compresa tra la curva di equazione $x\ (x^2 + y^2) - 2x^2 - y^2 = 0$ e il suo asintoto.



L'equazione della curva equivale a $y^2 = x^2 \dfrac{2-x}{x-1}$ cioè a

$$y = \pm\, x \sqrt{\frac{2-x}{x-1}} \quad , \quad 1 < x \le 2$$

L'area richiesta (se esiste) è data dall'integrale

$$2 \int_1^2 x \sqrt{\frac{2-x}{x-1}}\, dx \, .$$

Per $x \to 1$ la funzione è infinita di ordine 1 / 2, dunque l'integrale esiste.