Il teorema dell'Hôpital

- **Teorema dell'Hôpital (di Johann Bernoulli)**

  Siano f e g funzioni definite in un intorno U di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (escluso al più x_0), derivabili in U - { x_0 }, con g (x) e g ' (x) ≠ 0 in U - { x_0 }.
  Supponiamo che per $x \to x_0$ risulti

  $$f(x),\ g(x) \to 0 \text{ oppure } f(x),\ g(x) \to \pm\infty .$$

  Allora:

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L .$$

<u>Osservazione 1</u>

Nelle ipotesi fatte, il teorema dell'Hôpital riconduce un limite che si presenta nella forma indeterminata 0 / 0 oppure ∞ / ∞ ad un nuovo limite: se di questo si riesce a stabilire il valore L, lo stesso vale per il limite di partenza. Se anche questo nuovo limite si presenta nella forma indeterminata 0 / 0 oppure ∞ / ∞, si può applicare ulteriormente il teorema (sempre che ne siano verificate le ipotesi), fino ad arrivare allo scioglimento dell'indeterminazione.
Anche se il teorema dell'Hôpital fornisce un efficace metodo di calcolo, è di solito controproducente applicarlo "meccanicamente": il principio di sostituzione degli infinitesimi e degli infiniti può in molti casi sostituire opportunamente o, comunque, semplificare l'uso del teorema.

<u>Osservazione 2</u>

Nelle altre forma indeterminate 0 ∞ , ∞ - ∞ **non** si può applicare il teorema se prima non si opera (ad esempio, algebricamente o con un cambio di variabile) in modo da scriverle in una forma 0 / 0 oppure ∞ / ∞ equivalente.

Osservazione 3

Il teorema continua a valere anche separatamente per il limite destro e quello sinistro.

Osservazione 4

Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \textbf{non esiste,}$$

non si può concludere che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \textbf{non esiste.}$$

Ad esempio,

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x \quad , \quad g(x) = x \; .$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} 2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} 1/x = 0 .$$

Tenendo però conto dell'osservazione 3, se il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste perché limite destro e limite sinistro sono diversi, lo stesso accade per il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ (che quindi non esiste).

Osservazione 5

Quando nel calcolo di un limite si usa ripetutamente il teorema dell'Hôpital, dobbiamo essere certi che il rapporto volta per volta considerato sia una forma indeterminata.

Un tipico **errore** è illustrato dal seguente esempio:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} \underset{H.}{=} \lim_{x \to 1} \frac{6x - 2}{2x - 1} \underset{H.}{=} \lim_{x \to 1} \frac{6}{2} = 3.$$

(La lettera H. sotto il segno di uguale indica l'applicazione del teorema).

Il primo passo è corretto, perché il rapporto è nella forma 0 / 0; il secondo invece è **sbagliato**, perché il nuovo rapporto è nella forma **non indeterminata** 4 / 1 e quindi **non si può applicare** nuovamente il teorema.
Il corretto valore del limite è dunque 4.

Osservazione 6

Consideriamo il caso 0/0 con $x_0 \in R$: il teorema non richiede la derivabilità delle funzioni nel punto. Se la derivata esiste, possiamo calcolare il limite con il principio di sostituzione; essendo

$$f(x) = f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

$$g(x) = g(x) - g(x_0) \approx g'(x_0)(x - x_0)$$

si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

(naturalmente deve essere $g'(x_0) \neq 0$).

Osservazione 7

L'applicazione del teorema di Lagrange che abbiamo usato per vedere se in un punto in cui una funzione è continua è anche derivabile è un caso particolare del teorema dell'Hopital:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overline{\overline{H}} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

☑

Riassumendo, dal punto di vista operativo :

- dobbiamo calcolare il limite di un rapporto f (x) / g (x)
- controlliamo che sia della forma 0/0 oppure ∞/∞
- studiamo il limite di f' (x) / g' (x)
- se questo non esiste , in generale non possiamo nessuna conclusione sul limite di partenza, a meno che il limite non esiste perché limite destro e limite sinistro sono diversi; in questo caso nemmeno il limite di partenza esiste
- se il limite di f' (x) / g' (x) esiste e vale L (finito o infinito) , anche il limite di partenza vale L
- se il limite di f' (x) / g' (x) è ancora un forma indeterminata 0/0 oppure ∞/∞, possiamo applicare ulteriormente il teorema
- in ogni caso è sempre bene non dimenticare il principio di sostituzione; questo se non serve a calcolare il limite, può comunque essere utile per semplificare i calcoli richiesti dall'Hôpital.

Esempi

1.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} \overset{=}{H} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{1} = 0 \quad \text{NO !}$$

Il limite di partenza non è una forma indeterminata (ed è immediato trovare che vale +∞)

2.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x + x}{x} \overset{=}{H} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x + 1}{1} = \text{non esiste} \quad \text{NO !}$$

Il fatto che il limite ottenuto applicando l'Hopital non esiste NON ci permette di concludere che nemmeno il limite di partenza esiste (non siamo nel caso che il limite non esiste perchè limite destro e limite sinistro sono diversi !) .
E' immediato osservare che il limite proposto si può approssimare con x/x e quindi vale 1.

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{sen} x + x^2}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x + x^2}{x^2} = 1 \quad \text{NO !}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\operatorname{sen}x+x^2}{\operatorname{sen}^2x\ \sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x+o(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}\qquad \text{BOH ?}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\operatorname{sen}x+x^2}{\operatorname{sen}^2x\ \sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\operatorname{sen}x+x^2}{x^2}\underset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+2x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

<u>**dimostrazione**</u> **del teorema dell'Hôpital nel caso 0 / 0**

- Supponiamo dapprima $x_0 \in$ **R.**

Poiché per $x \to x_0$ sappiamo che $f, g \to 0$, possiamo supporre che le due funzioni siano continue in questo punto e quindi nulle; in caso contrario hanno una discontinuità eliminabile, che possiamo appunto eliminare definendo le funzioni in questo punto con valore 0.

Ciò premesso, per $x \in U - \{x_0\}$ possiamo scrivere:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\ .$$

Possiamo applicare il teorema di Cauchy nell'intervallo di estremi x, x_0 (infatti nell'intervallo chiuso le due funzioni sono continue, mentre nell'intervallo aperto sono derivabili, dato che la derivata può mancare al più nel solo punto x_0; inoltre $g'(x)$ è diversa da 0): il rapporto precedente si può scrivere come

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

dove $\xi = \xi(x)$ è tale che $x_0 < \xi < x$ oppure $x < \xi < x_0$.
Con il cambiamento di variabile $\xi(x) = t$, si trova

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{t \to x_0} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L.$$

(Infatti, per $x \to x_0$ risulta anche $\xi(x) \to x_0$ e $\xi(x)$ è diverso da x_0, il che rende lecito il cambio di variabile nello studio del limite della funzione composta f (ξ (x))).
In conclusione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

- Se invece $x_0 = \pm\infty$, si esegue il cambiamento di variabile $t = 1/x$: al limite per $t \to 0$ che si ottiene possiamo applicare la parte di teorema già dimostrata; si ha dunque:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^{\pm}} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} \underset{H.}{=} \lim_{t \to 0^{\pm}} \frac{f'(1/t)\,(-1/t^2)}{g'(1/t)\,(-1/t^2)} =$$

$$= \lim_{t \to 0^{\pm}} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

<u>Esempi di applicazione del teorema dell'Hôpital</u>

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ (se $a > 1$, $\alpha > 0$).

Questo limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Applicando il teorema dell'Hôpital (è facile controllare che le ipotesi sono verificate), ci riconduciamo a calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x \log a}{\alpha \, x^{\alpha - 1}} .$$

Per $\alpha \leq 1$, questo limite non è più indeterminato e vale + ∞.
Per $\alpha > 1$ si applica nuovamente il teorema, trovando

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x \log^2 a}{\alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha - 2}} .$$

Per $\alpha \leq 2$, questo limite non è più indeterminato e vale + ∞.
Per $\alpha > 2$ si applica nuovamente il teorema; dopo un numero finito di iterazioni del procedimento (numero che dipende da α), si arriva a stabilire il risultato.

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Questo limite notevole è già stato calcolato con altro metodo. A questa forma indeterminata 0 / 0 possiamo applicare il teorema dell'Hôpital (anche nella forma semplificata), riconducendoci a calcolare il limite della funzione esponenziale exp (x): in questo modo si ottiene (in maniera notevolmente più semplice) il già noto valore 1.
Il procedimento adesso seguito, anche se possibile, non è logicamente corretto: infatti per applicare a questo limite il teorema abbiamo bisogno di conoscere la derivata dell'esponenziale, ma per ricavare questa derivata dobbiamo utilizzare proprio il limite in esame .

3. $\lim_{x \to +\infty} x \log \dfrac{x+1}{x-1} = 2$

Il limite si presenta nella forma ∞ 0. Scritto come

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log \dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x}}$$

e quindi ricondotto alla forma 0 / 0, può essere studiato con il teorema, ottenendo

$$\frac{\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \frac{-\dfrac{2}{x^2-1}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \frac{2x^2}{x^2-1} \to 2.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo evitato di utilizzare ancora il teorema, preferendo l'evidente approssimazione.
Approssimazione che avremmo potuto utilizzare fin dall'inizio:

$$x\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right) = \frac{2x}{x-1} \to 2.$$

4. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x} = 0$

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0 / 0; applicando il teorema , siamo ricondotti a calcolare il limite di:

$$\frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

che è ancora una forma indeterminata; ripetendo il procedimento, si trova

$$\frac{e^{-1/x}}{2x^3}$$

e anche in questo caso non si può concludere. Ad ogni passo, l'indeterminazione rimane.
Se invece riscriviamo la funzione come

$$\frac{1/x}{e^{1/x}},$$

adesso il limite si presenta nella forma indeterminata ∞ / ∞. Applicando il teorema, si ottiene

$$\frac{1}{e^{1/x}} \rightarrow 0.$$

Alternativamente possiamo porre t = 1 / x, ottenendo per $t \rightarrow +\infty$ il limite

$$t\, e^{-t} = \frac{t}{e^{t}} \rightarrow 0$$

(messo nella lista dei limiti notevoli, che però adesso possiamo calcolare).

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \dfrac{x - \mathrm{tg}\, x}{x - \mathrm{sen}\, x} \rightarrow -2$

Applicando il teorema a questo limite, che si presenta nella forma 0 / 0, troviamo

$$\frac{-\mathrm{tg}^2 x}{1 - \cos x} \approx \frac{-x^2}{x^2/2} \rightarrow -2$$

Poiché $\mathrm{tg}\, x \sim x$, $\mathrm{sen}\, x \sim x$, il principio di sostituzione avrebbe portato a valutare numeratore e denominatore entrambi come infinitesimi di ordine superiore ad x e quindi non avrebbe permesso di concludere.

6. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \dfrac{2}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\log \mathrm{sen}\, x} \rightarrow 1$

Il limite si presenta nella forma $\infty - \infty$.
Con il cambiamento di variabile $x - \pi / 2 = t \rightarrow 0$, diventa:

$$\frac{2}{\mathrm{sen}^2\, t} + \frac{1}{\log \cos t} = \frac{2 \log \cos t + \mathrm{sen}^2\, t}{\mathrm{sen}^2\, t \,\log \cos t}$$

che è della forma 0 / 0.

Un’applicazione diretta del teorema porta a calcoli complicati. Possiamo però osservare che

$$\operatorname{sen}^2 t \sim t^2 \quad , \quad \log\cos t \sim \cos t - 1 \sim -t^2/2$$

e dunque il denominatore può essere approssimato con $-t^4/2$.

L'analoga approssimazione al numeratore non è lecita, perché

$$\operatorname{sen}^2 t \sim t^2 \quad , \quad 2\log\cos t \sim 2(\cos t - 1) \sim -t^2$$

e dunque del numeratore possiamo solo dire che è un infinitesimo di ordine superiore a t^2. Possiamo però applicare il teorema dell'Hopital alla funzione

$$-2\,\frac{2\log\cos t + \operatorname{sen}^2 t}{t^4}$$

trovando

$$-2\,\frac{-2\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t} + 2\operatorname{sen} t\cos t}{4t^3} = \frac{\operatorname{sen}^3 t}{t^3\cos t} \to 1.$$

7.

Trovare la parte principale per $x \to 0$ dell'infinitesimo $\operatorname{sen} x - x$ (cioè , trovare $\alpha > 0$ in modo che $(\operatorname{sen}x - x)/x^\alpha$ abbia limite finito non nullo).

$$\frac{\operatorname{sen}x - x}{x^k} \underset{H}{=} \frac{\cos x - 1}{k\,x^{k-1}} \approx \frac{-x^2/2}{k\,x^{k-1}}$$

Perché il limite sia finito e diverso da 0, deve essere $k - 1 = 2$, cioè $k = 3$; in questo caso il limite vale $-1/6 = -1/3!$
Dunque $\operatorname{sen}x - x = -x^3/3! + o(x^3)$ ovvero $\operatorname{sen}x = x - x^3/3! + o(x^3)$.

Utilizziamo questo risultato per calcolare la parte principale per $x \to 0$ di

$$x + (x^2 - 1)\operatorname{sen}x.$$

L'approssimazione di senx al primo ordine non dà risultato. Utilizzando invece quella al terzo ordine, si trova:

$$x + (x^2 - 1)(x - x^3/3! + o(x^3)) = x + x^3 - x + x^3/6 + o(x^3) = 7x^3/6 + o(x^3)$$

8.

Trovare la parte principale di arccos x per $x \to 1^-$

$$\frac{\arccos x}{(1-x)^k} \overset{=}{H} \frac{-1/\sqrt{1-x^2}}{-k\,(1-x)^{k-1}} \approx \frac{1}{k\sqrt{2}\;(1-x)^{k-1/2}}$$

Deve essere k = ½ ; la parte principale è $\sqrt{2\,(1-x)}$.

9.

Trovare la parte principale di tgx – x per x → 0.

$$\frac{\mathrm{tg}x - x}{x^k} \overset{=}{H} \frac{\mathrm{tg}^2 x}{k\,x^{k-1}} \approx \frac{x^2}{k\,x^{k-1}}$$

Deve essere k = 3 ; $\mathrm{tg}x - x = x^3/3 + o(x^3)$, cioè $\mathrm{tg}x = x + x^3/3 + o(x^3)$.

10.

Trovare la parte principale di sen tgx – x per x → 0.

$$\mathrm{sen}\,(\mathrm{tg}x) - x = \mathrm{sen}\,(x + x^3/3 + o(x^3))$$

$$= (x + x^3/3) - (x + x^3/3)^3/6 - x + o(x^3)$$

$$= x^3/3 - x^3/6 + o(x^3) = x^3/6 + o(x^3)$$

11.

Approssimare e^x con un polinomio di grado 3 per x → 0.

Sappiamo che $e^x = 1 + x + o(x)$.

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{=}{H} \frac{e^x - 1}{2x} \to 1/2$$

Quindi $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$.

$$\frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^3} \underset{H}{=} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} \approx \frac{x^2/2}{3x^2} \to 1/6$$

In definitiva

$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + o(x^3)$.

<u>Esercizi di riepilogo</u>

1. $\lim_{x \to 0} \ (4\,\mathrm{tg}x + \cos x)^{1/x}$

2. $\lim_{x \to \pi/2^-} \ (\pi^2/4 - x^2)^{1/2 \log \cos x}$

3. $\lim_{x \to 2} \ (x - 2)\ \mathrm{tg} \dfrac{\pi}{x}$

4. $\lim_{x \to 0} \ \dfrac{e^x - e^{\mathrm{sen}x}}{x^2 \sqrt[3]{8 + x^3}}$

5. $\lim_{x \to +\infty} \ x^2 (e^{1/x} - 1) - x$

6. $\lim_{x \to +\infty} \ \dfrac{x-1}{x+1} \sqrt{x^2 - 4} - x$

7. $\lim_{x \to \pi/6} \ \dfrac{\mathrm{arctg}(2\,\mathrm{sen}x) - \pi/4}{\cos 3x}$

8. $\lim_{x \to 0} \ \dfrac{\mathrm{sen}^2 x - 2(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)\,\mathrm{sen}^2 x}$

9. $\lim_{x \to 0} \ \dfrac{x+1}{x} - \dfrac{1}{\log(1+x)}$

10. $\lim_{x \to 0} \ \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$

11. Trovare la parte principale di $x + (x^2 - 1)$ senx per $x \to 0$

12. Trovare la parte principale di $\log (1 + x) - x$ per $x \to 0$

13. Trovare la parte principale di arctgx $- \pi/4$ per $x \to 1$

14. Trovare la parte principale di $\cos (e^x - 1) - \cos x$ per $x \to 0$

13. Trovare la parte principale di $\exp (x^2) - a \cos x + b\ \mathrm{sen}^2 x$ per $x \to 0$ al variare dei parametri reali a e b.