I teoremi fondamentali del calcolo differenziale

Definizioni

x_0 punto di massimo (minimo) assoluto per una funzione

$x_0 \in A$

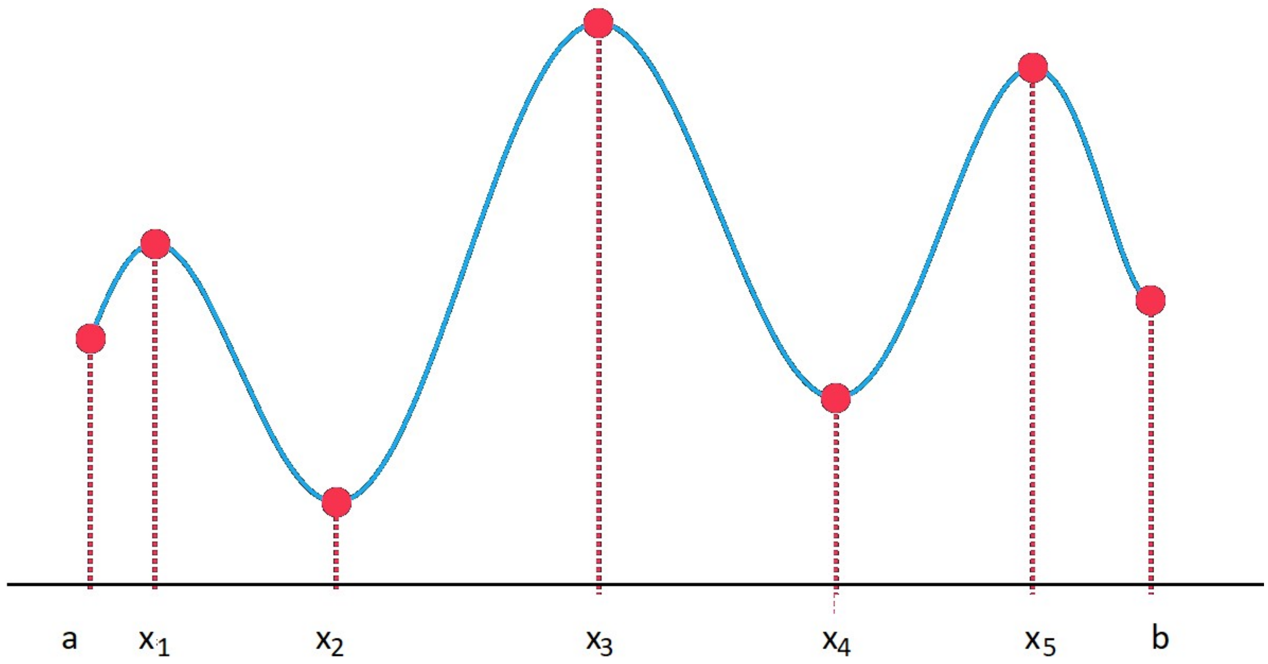
$\forall x \in A \; , \; f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$

x_0 punto di massimo (minimo) locale o relativo per una funzione

$x_0 \in A$

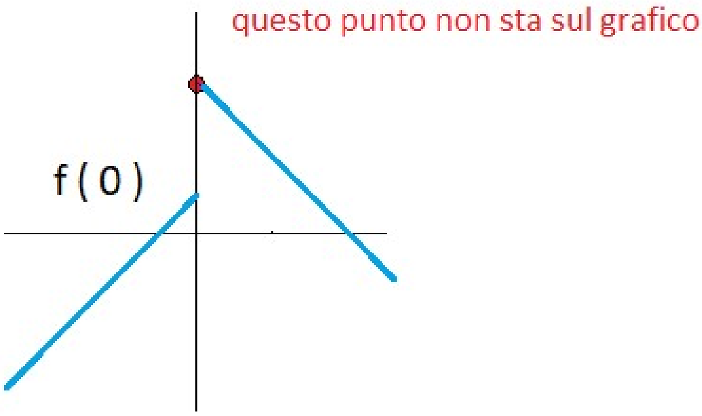
$\exists U(x_0) : \forall x \in A \cap U(x_0), \; f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$

Un punto di massimo o minimo assoluto è anche di massimo o minimo locale; in generale non vale il viceversa.



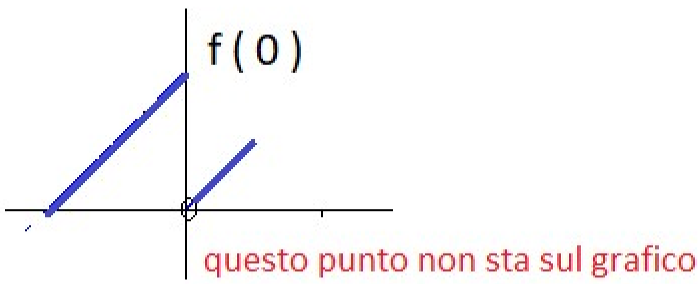
E' sbagliato pensare ad un punto di massimo come ad uno che separa un intervallo in cui la funzione cresce da uno in cui decresce.

(i)



La funzione cresce a sinistra di 0, decresce a destra, ma 0 non è punto di massimo

(ii)

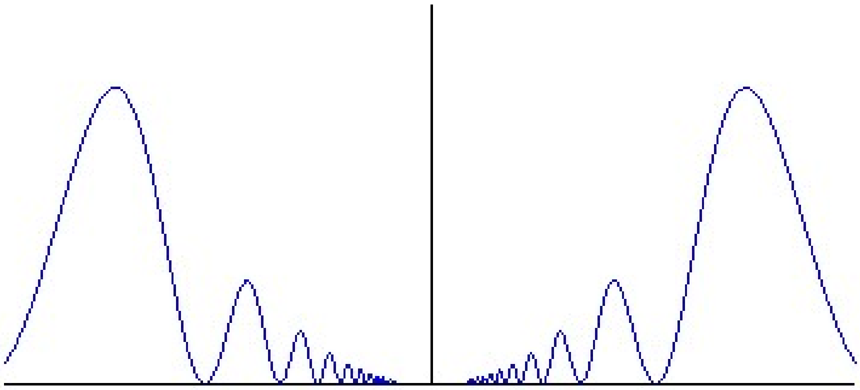


La funzione cresce sia a sinistra che a destra di 0, che è punto di massimo

(iii)

La funzione continua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}^2(1/x) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$



è positiva e $f(0) = 0$; dunque $x_0 = 0$ è punto di minimo (assoluto). Facciamo vedere che in nessun intorno destro del punto la funzione è crescente (analogamente si prova che in nessun intorno sinistro è decrescente). Prendiamo i punti

$$x_n = \frac{1}{2 n \pi} \quad , \quad y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2 n \pi} \, ,$$

che, almeno definitivamente, appartengono ad un qualunque intorno destro di 0. Poiché è $x_n > y_n$, se la funzione fosse crescente dovrebbe risultare $f(x_n) > f(y_n)$; questo invece non accade, essendo:

$$f(x_n) = 0 \quad , \quad f(y_n) = \left(\frac{1}{\pi/2 + 2 n \pi} \right)^2 .$$

- **Teorema di Fermat** (sui punti di massimo o minimo)

Sia f una funzione definita in un intervallo I e sia x_0 un punto di massimo o di minimo locale o assoluto <u>interno</u> all'intervallo.
Se la funzione in x_0 è derivabile, risulta $f'(x_0) = 0$.

interno all'intervallo = appartiene all'intervallo senza esserne un estremo

dimostrazione

Supponiamo x_0 punto di massimo; **poiché è interno all'intervallo I**, esiste un intorno completo $U = (x_0 - r, x_0 + r)$, tale che $\forall x \in U \ \ f (x) \leq f (x_0)$, cioè $f (x) - f (x_0) \leq 0$. Consideriamo in $U - \{ x_0 \}$ il rapporto incrementale

$$(f (x) - f (x_0)) / (x - x_0) .$$

(i) Se $x \in (x_0 - r, x_0)$ (intorno sinistro)

il rapporto risulta ≥ 0, perché numeratore e denominatore sono entrambi negativi; passando al limite per $x \to x_0$ da sinistra, si deduce che è $f '(x_0) \geq 0$ (abbiamo utilizzato il teorema sul passaggio al limite in una disuguaglianza e tenuto conto del fatto che, essendo la funzione derivabile in x_0 , il limite del rapporto incrementale - anche se calcolato solo da sinistra - coincide con la derivata).

(ii) Se $x \in (x_0 , x_0 + r)$ (intorno destro)

il rapporto risulta ≤ 0, perché il numeratore è negativo, mentre il denominatore è positivo; passando al limite per $x \to x_0$ da destra, con considerazioni analoghe alle precedenti, si deduce $f ' (x_0) \leq 0$.

Perché siano possibili entrambe le conclusioni, $f'(x_0)$ deve necessariamente risultare nullo.

☑

Osservazione 1

L'ipotesi che x_0 sia punto **interno** all'intervallo ha permesso di calcolare sia il limite sinistro che il limite destro del rapporto incrementale, cosa che non sarebbe stata possibile se x_0 fosse stato un estremo.

Osservazione 2

Se x_0 non è un punto interno, il teorema è falso, cioè in un punto di massimo o di minimo NON interno la derivata (ammesso che esista) non è detto che sia nulla.

Ad esempio, la funzione $f(x) = x$ definita per $x \in [-1, 1]$ ha il punto di minimo (assoluto) in $x = -1$, quello di massimo (assoluto) in $x = 1$; in entrambi i punti la derivata non si annulla, in particolare vale 1.

Osservazione 3

Un punto in cui la derivata è nulla (**punto stazionario)** corrisponde sul grafico della funzione ad un punto a tangente orizzontale.

Osservazione 4

Un punto stazionario **non** è necessariamente un punto di massimo o di minimo per la funzione.
Ad esempio, la derivata della funzione $f(x) = x^3$ si annulla per $x = 0$, ma questo punto non è né di massimo né di minimo per la funzione.

Osservazione 5

In un punto di massimo o di minimo la derivata della funzione può non esistere.
Ad esempio: in $x = 0$ la funzione $|x|$ ha un punto di minimo, la funzione $-|x|$ un punto di massimo; le due funzioni non sono derivabili per $x = 0$.

Applicazione del teorema di Fermat alla ricerca del massimo e del minimo di una funzione

Se f è una funzione continua in [a, b], per il teorema di Weierstrass sappiamo che ammette massimo e minimo assoluti. Riassumendo i risultati precedenti, i punti in cui assume questi valori sono da ricercarsi tra:

- gli estremi a e b dell'intervallo
- i punti interni in cui la funzione non è derivabile
- i punti stazionari interni.

Una volta che sono stati selezionati questi punti, si calcola il corrispondente valore della funzione: il più grande tra questi è il massimo della funzione, il più piccolo tra questi è il minimo della funzione.

Esempio 1: $f(x) = \dfrac{|\log x|}{x}$, $x \in [1/2\ ,\ 2]$

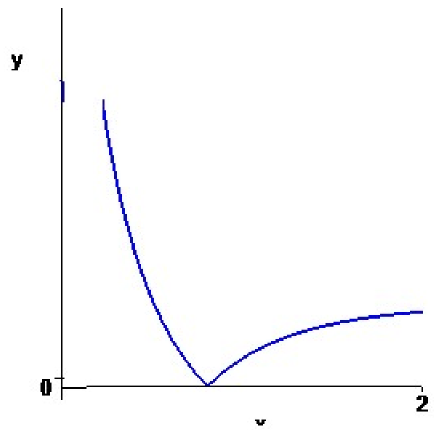
Nell'intervallo assegnato la funzione è continua, quindi ammette massimo e minimo.

La derivata

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(\log x) - |\log x|}{x^2} = \operatorname{sgn}(\log x)\,\frac{1 - \log x}{x^2}$$

non è definita per x = 1; inoltre l'unico punto stazionario è x = e, che non cade nell'intervallo.
Dunque, i punti da prendere in considerazione sono: x = ½ , x = 1, x = 2.

x	f (x)	
1/2	2 log2	Max
1	0	min
2	(log 2) / 2	



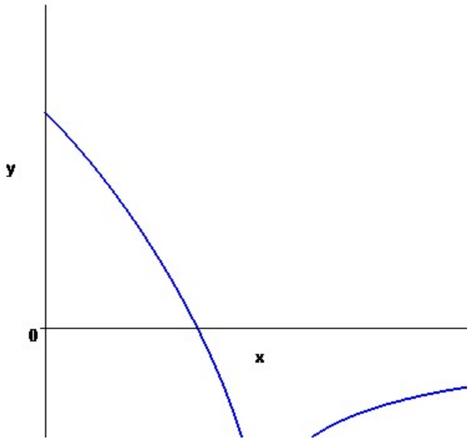
Esempio 2: $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|} - x \quad , \; x \in [0, 2]$

Anche in questo caso la funzione è continua nell'intervallo assegnato e quindi ammette massimo e minimo. La sua derivata vale:

$$f'(x) = \frac{x \operatorname{sgn}(x^2 - 1)}{\sqrt{|x^2 - 1|}} - 1.$$

Questa non è definita per $x = \pm 1$; di questi due punti solo $x = 1$ è interno all'intervallo.
Inoltre la funzione non ha punti stazionari interni all'intervallo.

x	f(x)	
0	1	Max
1	-1	min
2	$3^{1/2} - 2$	



Riportiamo per completezza il calcolo sui punti stazionari.

$$\sqrt{|x^2 - 1|} = x \operatorname{sgn}(x^2 - 1) \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 1| = x^2 \;, \; x \operatorname{sgn}(x^2 - 1) > 0.$$

L'equazione fornisce $x^2 - 1 = x^2$ che non soluzioni oppure $x^2 - 1 = -x^2$ che ha le soluzioni $x = \pm 1/\sqrt{2}$: di queste solo quella positiva appartiene all'intervallo assegnato, ma deve essere scartata perché non verifica la disequazione.

Supponiamo adesso che la funzione f sia definita in un intervallo che <u>non è chiuso o non è limitato</u>.
In questo caso l'esistenza del massimo e del minimo non è più assicurata, nemmeno sotto l'ipotesi di continuità.

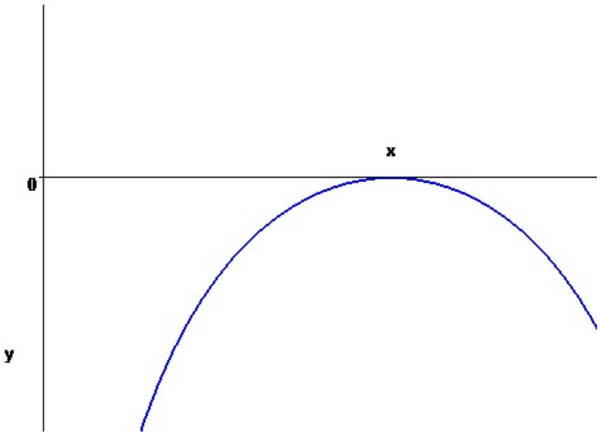
<u>Esempio</u> 3: $f(x) = \log(2x - x^2)$, $x \in (0, 2)$

La derivata della funzione

$$f'(x) = \frac{2(1-x)}{2x - x^2}$$

esiste in tutto l'intervallo dato e si annulla per x =1.
I valori da prendere in considerazione sono:

x	f (x)	
*0	- 00	inf
1	0	Max
*2	-00	inf



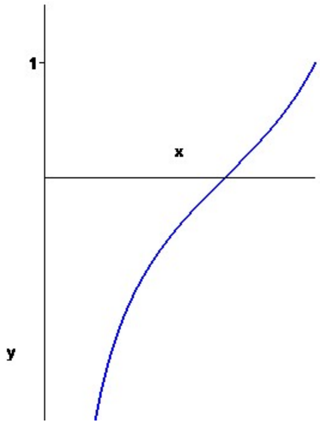
<u>Esempio</u> 4: $f(x) = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$, $x \in (\pi/4, \pi]$

La derivata della funzione

$$f'(x) = \frac{2}{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2}$$

esiste in tutto l'intervallo e non si annulla mai.

x	f(x)	
* π/4	- 00	inf
π	1	max



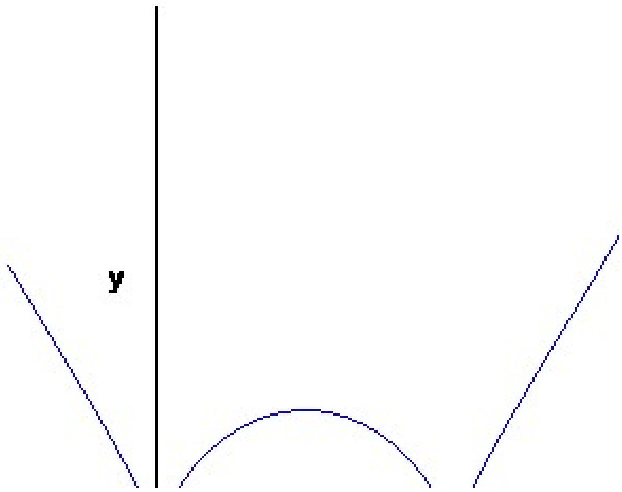
Esempio 5: $f(x) = (x^2 - 2x)^{2/3}, \quad x \in [-1, +\infty)$

La derivata della funzione vale

$$f'(x) = \frac{4}{3}(x^2 - 2x)^{-1/3}(x-1);$$

si annulla per x = 1 e non esiste per x = 0 e per x = 2.

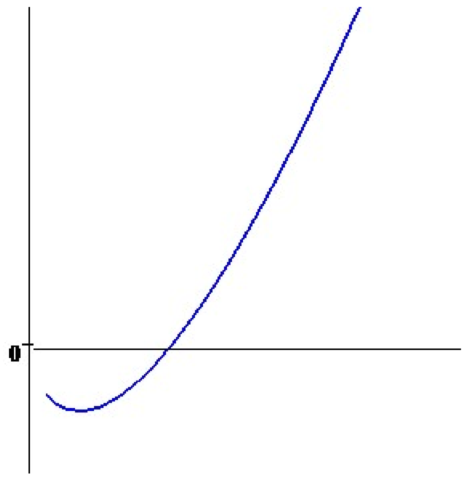
x	f(x)	
-1	$9^{1/3}$	
0	0	min
1	1	
2	0	min
* +00	+00	sup



<u>Esempio</u> 6: $f(x) = x \log x$, $x \in (0, +\infty)$

La derivata vale log x + 1 e si annulla per x = 1 / e.

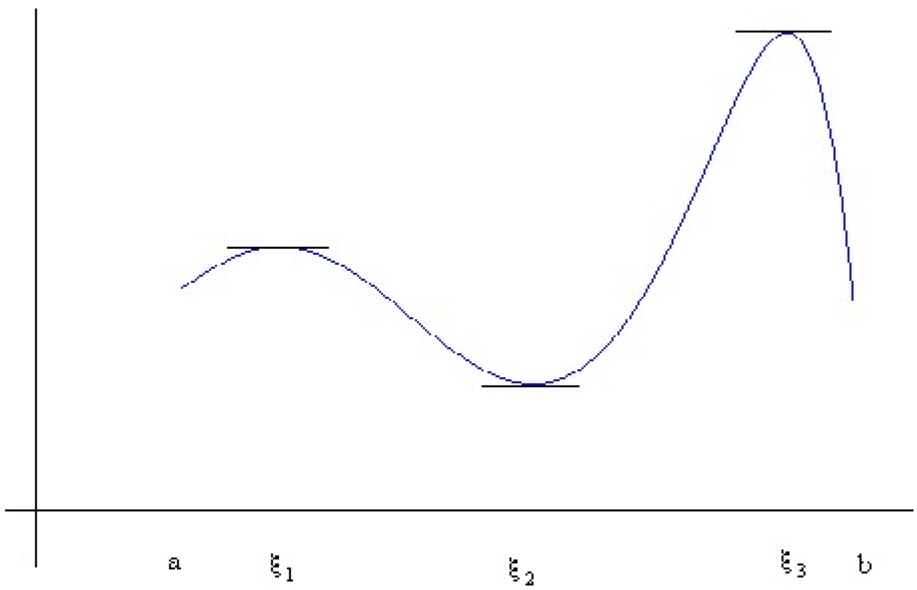
x	f (x)	
* 0	0	
1/e	-1/e	min
* +00	+ 00	sup



- **Teorema di Rolle**

Sia f una funzione continua in [a, b] , derivabile in (a, b).

Se f (a) = f (b) , allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.



Interpretazione geometrica

Nelle ipotesi del teorema, esiste sul grafico almeno un punto a tangente orizzontale. Si osservi che questa tangente è parallela alla secante (la retta che unisce i due estremi del grafico, cioè i punti di ascissa a e b) .

Osservazione

L'ipotesi "f continua in [a, b], derivabile in (a, b)" **non** significa che sicuramente la funzione non è derivabile in a e in b, ma solo che l'esistenza della derivata in questi punti non è richiesta.
Potremmo riscrivere l'ipotesi nella forma " f derivabile in [a , b] eccetto al più in a e b , dove però , se non è derivabile , è almeno continua"

Esempio 1.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad , \quad x \in [-1, 1].$$

La funzione è continua in [-1, 1]; la sua derivata

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

esiste in (-1, 1); infine f (-1) = f (1) = 0.
Sono dunque verificate le ipotesi del teorema di Rolle ed è perciò assicurata l'esistenza di un punto $\xi \in (-1, 1)$ tale che $f'(\xi) = 0$.
Risolvendo l'equazione $f'(x) = 0$ si trova $\xi = 0$.

L'interpretazione geometrica di questo esempio è ovvia, il grafico della funzione essendo la semicirconferenza di centro l'origine e raggio unitario situata nel semipiano delle y positive.

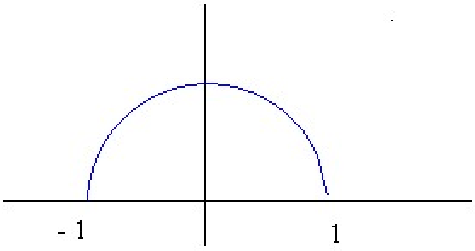
Esempio 2.

$$f(x) = \sqrt{\left|1-x^2\right|} \quad , \quad x \in [-2, 2].$$

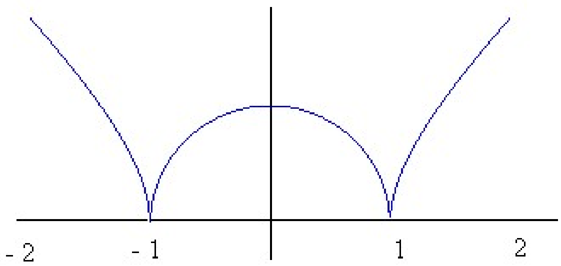
La funzione è continua in [-2, 2]; la sua derivata

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}\ \mathrm{sgn}(1-x^2)$$

esiste in (-2, 2) eccetto che per x = ± 1 (che sono punti interni all'intervallo); infine f (-2) = f (2) . Dunque una delle ipotesi del teorema **non** è verificata.
Nonostante questo, la tesi è ancora vera, perché f ' (0) = 0.



$y = \sqrt{1-x^2}$



$y = \sqrt{|1-x^2|}$

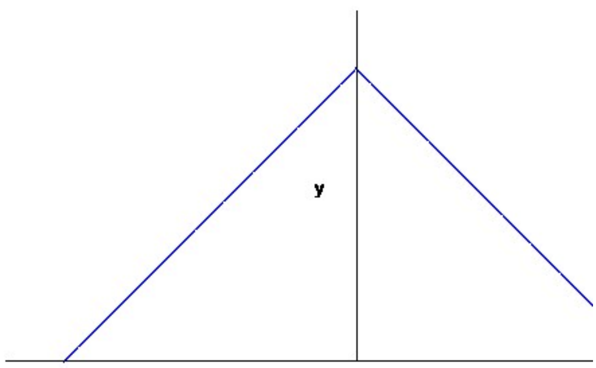
Esempio 3.

$$f(x) = 1 - |x| \ , \quad x \in [-1, 1]$$

La funzione è continua in [-1, 1]; la derivata

$$f'(x) = -\ \mathrm{sgn}\, x$$

non esiste per x = 0; infine f (-1) = f (1). Anche stavolta non è verificata una delle ipotesi del teorema e, a differenza dell'esempio precedente, nemmeno la tesi è vera, in quanto f '(x) non si annulla mai.



dimostrazione del teorema di Rolle

Poiché la funzione f è continua in [a, b], per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo. Per i corrispondenti punti di massimo e di minimo si possono presentare due casi:

(i) entrambi coincidono con gli estremi dell'intervallo; ma allora massimo e minimo coincidono perché $f(a) = f(b)$, cioè la funzione è costante e di conseguenza la sua derivata è identicamente nulla.

(ii) uno almeno di essi cade all'interno dell'intervallo; ma allora, per il teorema di Fermat, in questo punto la derivata della funzione (che per ipotesi esiste) è nulla.

☑

- **Teorema di Lagrange**

Sia f una funzione continua in [a, b] , derivabile in (a, b).

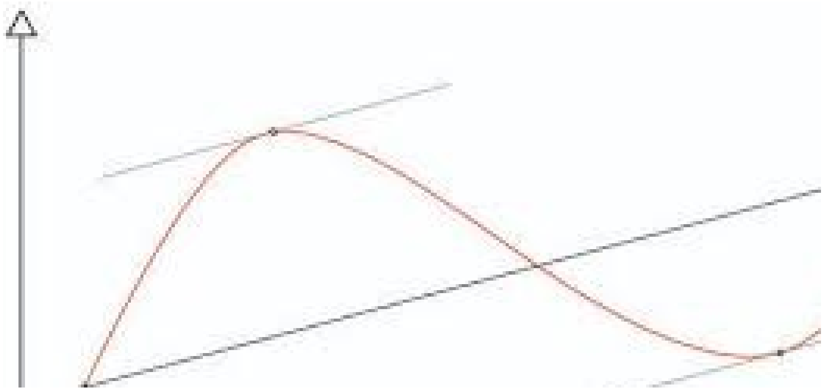
Allora esiste $\xi \in$ (a, b) tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ovvero $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Interpretazione geometrica

Il rapporto $[f(b) - f(a)] / (b - a)$ è il coefficiente angolare della retta secante che unisce i due estremi del grafico della funzione – cioè i punti di ascissa a e b ; poiché la derivata della funzione in un punto indica il coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel punto corrispondente, il teorema afferma che esiste almeno una retta tangente parallela alla secante.



Interpretazione fisica

In un moto che si è svolto con continuità, in almeno un istante la velocità ha coinciso con la velocità media.

Osservazione

Se in aggiunta alle ipotesi del teorema supponiamo f (a) = f (b), ritroviamo il teorema di Rolle. In altre parole, il teorema di Lagrange è una generalizzazione di quello di Rolle.

dimostrazione del teorema di Lagrange

Consideriamo la funzione ausiliaria

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

(differenza tra la funzione data e la retta secante). Questa è continua in [a, b] e derivabile in (a, b) (cioè, ha le stesse proprietà della funzione f (x)); inoltre F (a) = F (b) = 0. Per la funzione F sono dunque verificate le ipotesi del teorema di Rolle e di conseguenza esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $F'(\xi) = 0$. Poiché risulta

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

un valore che annulla questa derivata verifica la tesi del teorema.

☑

- **Teorema di Cauchy**

Siano f e g funzioni continue in [a, b], derivabili in (a, b), con g ’ (x) ≠ 0.

Allora $\exists\ \xi \in (a, b)\ :\ \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

<u>Osservazione 1</u>

Dalle ipotesi del teorema risulta che è anche g (b) ≠ g (a) e quindi nell’uguaglianza hanno senso entrambi i rapporti.
Infatti, se fosse g (b) = g (a), per il teorema di Rolle la derivata g ’ dovrebbe annullarsi in almeno un punto interno, il che sarebbe in contraddizione con l’ipotesi fatta.

<u>Osservazione 2</u>

Se g (x) = x, ritroviamo il teorema di Lagrange; in altre parole, il teorema di Cauchy è una generalizzazione di quello di Lagrange.

<u>Osservazione 3</u>

Applicando il teorema di Lagrange separatamente alle due funzioni f (x) e g (x), troveremmo che esistono due punti $\xi, \eta \in (a, b)$ tali che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\eta)}$$

Il teorema di Cauchy migliora l’informazione, affermando che risulta $\xi = \eta$**.**

<u>dimostrazione</u> del teorema di Cauchy

Consideriamo la funzione ausiliaria

$$G(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a))$$

(se g (x) = x, G (x) è la stessa funzione introdotta nella dimostrazione del teorema di Lagrange). G (x) è continua in [a, b] e derivabile in (a, b) e inoltre G (a) = G (b) = 0. Possiamo dunque applicare il teorema di Rolle, trovando che esiste $\xi \in (a, b)$ tale che G ' (ξ) = 0, cioè

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0$$

da cui segue l'asserto.

☑

Applicazioni del teorema di Lagrange

(1) **Una condizione sufficiente per la derivabilità**

Sia f (x) derivabile in un intorno U di x_0 eccetto al più il punto, dove però è <u>continua</u>.

Per verificare se la funzione è derivabile anche nel punto x_0, invece di ricorrere alla definizione e calcolare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

possiamo calcolare il limite della derivata

$$\lim_{x \to x_0} f'(x)$$

nel senso che

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

<u>dimostrazione</u>

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f'(\xi(x)) =$$

con $x_0 < \xi(x) < x$ o viceversa;

ponendo t = $\xi(x)$

$$= \lim_{t \to x_0} f'(t) = L.$$

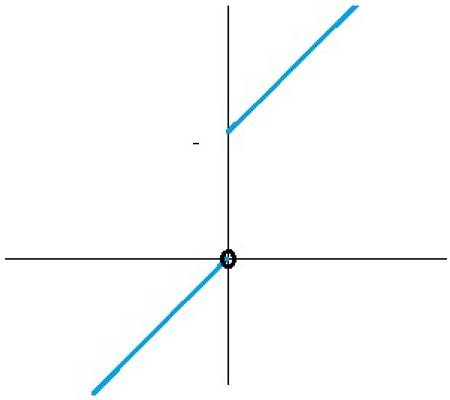
☑

Osservazione

Questo criterio per verificare l'esistenza della derivata in un punto può essere applicato solo dopo aver verificato che la funzione in questo punto è continua.

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x < 0 \\ x+1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$



non è continua in x = 0 (discontinuità di I specie) e dunque nemmeno derivabile in questo punto ; però $f'(x) = 1$ per $x \neq 0$ e dunque il limite della derivata per $x \to 0$ esiste e vale 1.

Osservazione

Supponiamo che il limite della derivata non esista. Questo può accadere perché il limite destro e quello sinistro sono diversi: in questo caso il teorema precedente ci assicura che anche la derivata destra e quella sinistra sono diverse e dunque la funzione non è derivabile nel punto.

Il limite, però, può non esistere per motivi più complessi, ad esempio perché la funzione compie infinite oscillazioni in ogni intorno del punto preso in considerazione: in questo caso non si può concludere che necessariamente la derivata non esiste, come dimostra l'esempio che segue.

Per la funzione **continua**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

risulta

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x \ , \ \text{per } x \neq 0$$

e dunque

$\lim_{x \to 0} f'(x)$ non esiste, a causa della presenza del termine cos 1/ x.

Da questo risultato **non** si può dedurre che f ’ (0) non esiste; in effetti, utilizzando la definizione, si trova:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \operatorname{sen}(1/x) \to 0$$

e dunque f ’ (0) = 0.

In questo caso la funzione

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} 1/x - \cos 1/x & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è definita in tutto **R,** ma è discontinua in x = 0 (attenzione: discontinua è la funzione derivata f’, non la funzione f).

<u>Esempio</u> 1 $f(x) = |\log x| \quad , \ x > 0$

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(\log x)}{x} \quad (x > 0, x \neq 1)$$

f (x) è continua in x = 1; studiamo la derivabilità in questo punto.

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{\operatorname{sgn}(\log x)}{x} = \pm 1.$$

Punto angoloso.

<u>Esempio</u> 2 $f(x) = \left(1+1/x\right)^{x} = e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

C.E. $x < -1$ o $x > 0$
discontinuità eliminabile in $x = 0$ ($f(0) = 1$)

derivabilità della funzione prolungata per continuità

$$\lim_{x\to 0} \left(1+1/x\right)^{x} \left\{ \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right\} = +\infty.$$

punto a tg verticale

<u>Esempio</u> 3 $f(x) = \sqrt{\left|x^2-1\right|}$

$$f'(x) = \frac{x\operatorname{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{\left|x^2-1\right|}} \quad , \ x \neq \pm 1$$

Studiamo la derivabilità in $x = \pm 1$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x\operatorname{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{\left|x^2-1\right|}} = \pm\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^{\pm}} \frac{x\operatorname{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{\left|x^2-1\right|}} = \mp\infty.$$

Cuspide .

Esempio 4 $f(x) = x^x = \exp(x \log x)$ $(x > 0)$

$x = 0$ una discontinuità eliminabile; $f(0) = 1$

Per stabilire se la funzione così prolungata è anche derivabile in $x = 0$, possiamo:

(i)

calcolare il limite del rapporto incrementale, secondo la definizione:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\exp(x \log x) - 1}{x} = \lim_{x \to x_0} \frac{x \log x}{x} = -\infty .$$

Dunque in $x = 0$ la funzione non è derivabile e presenta un punto a tangente verticale.

oppure

(ii)

calcolare il limite della derivata:

$f'(x) = x^x (\log x + 1)$, $x > 0$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty$$

ovviamente ritrovando il risultato precedente.

Esempio 5 $f(x) = \text{arcsen}\, x$

Poiché

$$f'(x) = 1 / \sqrt{1 - x^2}$$

e

$$\lim_{x \to \pm 1} \ 1/\sqrt{1-x^2} = +\infty ,$$

la funzione non è derivabile in x = ± 1 (dove però è continua). Punti a tg verticale,

<u>Esempio</u> 6 $\quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{per } x < 0 \\ ax + b & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

La funzione è continua in x = 0 se b = 1; la sua derivata è:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{per } x < 0 \\ a & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Calcoliamo il limite della derivata per $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \exp(x) = 1 , \quad \lim_{x \to 0} a = a .$$

La funzione è dunque derivabile anche in x = 0 solo se scegliamo a = 1, b = 1; in questo caso è f ’ (0) = 1.

Applicazione allo studio della monotonia di una funzione

Sia f una funzione derivabile in un intervallo I (se I è un intervallo chiuso, basta che la funzione sia continua in I e derivabile nei punti interni).

Allora:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{cases} \forall x \in I \Rightarrow f(x) \begin{cases} \text{strettamente crescente} \\ \text{strettamente decrescente} \\ \text{costante} \end{cases} \text{in } I$$

dimostrazione

(i) Dobbiamo provare che $\forall\, x', x'' \in I$, $x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'')$.

Applichiamo il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x', x'']$:

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x'), \quad \text{con } x' < \xi < x''.$$

Per le ipotesi fatte il secondo membro è positivo e dunque tale è anche il primo membro, cioè $f(x'') > f(x')$.

(ii) Si procede in modo del tutto analogo.

(iii) Fissato arbitrariamente $x_0 \in I$, per ogni $x \in I - \{x_0\}$ si applica il teorema di Lagrange nell'intervallo di estremi x, x_0, ottenendo

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0$$

e dunque $f(x) = f(x_0)$ costantemente.

☑

Nelle ipotesi precedenti e con dimostrazioni del tutto analoghe a quelle presentate, possiamo anche scrivere:

$$f'(x) \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases} \quad \forall\, x \in I \;\Rightarrow\; f(x) \begin{cases} \text{crescente in senso debole} \\ \text{decrescente in senso debole} \end{cases} \text{in } I$$

Il risultato stabilito permette anche di risalire dal segno della derivata agli eventuali punti di massimo o minimo di una funzione derivabile , **continua in x_0** :

- **se $f'(x) > 0$ per $x < x_0$, $f'(x) < 0$ per $x > x_0$, allora $x = x_0$ è punto di massimo**

- **se $f'(x) < 0$ per $x < x_0$, $f'(x) > 0$ per $x > x_0$, allora $x = x_0$ è punto di minimo.**

Osservazione

L'ipotesi che la funzione sia continua in x_0 è essenziale, come prova il seguente esempio. Per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1/|x| & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

la derivata

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{sgn} x}{x^2}, \ \text{per } x \neq 0$$

è positiva per $x < 0$, negativa per $x > 0$; dunque la funzione cresce per $x < 0$, decresce per $x > 0$. Nonostante questo, $x = 0$ non è punto di massimo.

Osservazione

Abbiamo già osservato che, sebbene sia la situazione più semplice e comune, non è sempre vero che un punto di massimo separi un intervallo in cui la funzione è crescente da uno in cui è decrescente (e analogamente per un punto di minimo).

☑

Per quanto riguarda le implicazioni inverse, ovviamente

f costante in I $\Rightarrow$ f' = 0 in I

Non è vero, invece, che per le funzioni strettamente crescenti (decrescenti) in I, la derivata (supponendo che esista) sia strettamente maggiore (minore) di 0.
Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in **R,** ma la sua derivata $3x^2$ si annulla per $x = 0$.

Valgono, invece, i seguenti risultati:

f strettamente crescente in I $\Rightarrow$ f' $\geq$ 0 in I

f strettamente decrescente in I $\Rightarrow$ f' $\leq$ 0 in I

f debolmente crescente in I $\Rightarrow$ **f ' ≥ 0 in I**

f debolmente decrescente in I $\Rightarrow$ **f ' ≤ 0 in I**

(naturalmente, nell'ipotesi che la funzione sia derivabile)

dimostrazione

Supponiamo f crescente in senso stretto o in senso debole e ragioniamo per assurdo; se fosse $f'(x_0) < 0$ per un qualche x_0, in un intorno del punto sarebbe

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$$

per il teorema della permanenza del segno e quindi in tale intorno la funzione non sarebbe crescente.

☑

Combinando i criteri di monotonia con il teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti, si può anche scrivere

f strettamente crescente in I

$\Updownarrow$

(i) **f ' ≥ 0 in I**

(i i) **f ' non si annulla identicamente in nessun sottointervallo di I**

f strettamente decrescente in I

$\Updownarrow$

(i) **f ' ≤ 0 in I**

(i i) **f ' non si annulla identicamente in nessun sottointervallo di I**

dimostrazione

Limitiamoci a dimostrare la prima proposizione; per l'altra si procede in modo analogo.

$\Downarrow$

Sappiamo già che deve essere $f' \geq 0$. Se poi fosse $f' = 0$ in un intervallo I', qui la funzione sarebbe costante, contrariamente all'ipotesi.

$\Uparrow$

Sappiamo già che la funzione è crescente in senso debole; se non lo fosse anche in senso stretto, dovrebbero esistere $x' < x''$ tali che $f(x') = f(x'')$. Ma poiché per ogni $x \in (x', x'')$ è $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$, in questo intervallo la funzione risulterebbe costante, contrariamente all'ipotesi fatta.

☑