

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

MAURO SASSETTI - ANTONIO TARSIA

Precorso di Matematica

Richiami di teoria con oltre 400 esempi ed esercizi svolti per la preparazione ai corsi universitari.

ANNO ACCADEMICO 2014 - 2015

Indice

INDICE ANALITICO	3
INTRODUZIONE	8
I RICHIAMI DI TEORIA	9
1 CENNI DI LOGICA E TEORIA ELEMENTARE DEGLI INSIEMI	11
1.1 Proposizioni e connettivi logici	11
1.2 Insiemi	22
1.3 Il Principio di induzione	29
2 RICHIAMI DI GEOMETRIA ANALITICA	38
2.1 Le coordinate cartesiane del piano	38
2.2 Le rette del piano	42
2.3 Equazione parametrica di un segmento	47
2.4 Distanza di due punti	48
2.5 Asse di un segmento	48
2.6 Distanza di un punto da una retta	49
2.7 Equazioni delle bisettrici tra due rette	50
2.8 Equazione della circonferenza	52
2.9 Equazione dell'ellisse	56
2.10 Equazione dell'iperbole	60
2.11 Equazione della parabola	67
2.12 Appendice I: punti e assi di simmetria	71
2.13 Appendice II: le sezioni coniche	78
3 FUNZIONI	80
3.1 Generalità sulle funzioni	80
3.2 Grafico di una funzione	83
3.3 Trasformazioni di grafici	89
3.4 Operazioni con le funzioni.	94
3.5 Funzioni iniettive, monotone, invertibili.	96
4 POLINOMI	104
4.1 Polinomi: generalità	104
4.2 Operazioni con i polinomi	106
4.3 Un criterio di divisibilità tra polinomi: la regola di Ruffini	110
4.4 Scomposizione di polinomi	113

5	EQUAZIONI, DISEQUAZIONI, SISTEMI	117
5.1	Generalità sulle equazioni	117
5.2	Risoluzione di un'equazione	119
5.3	Generalità sulle disequazioni	121
5.4	Equazioni e disequazioni di primo grado.	125
5.5	Equazioni e disequazioni di secondo grado.	127
5.6	Equazioni e disequazioni di grado superiore al secondo	134
5.7	Sistemi di equazioni e disequazioni	139
5.8	Equazioni e disequazioni contenenti il valore assoluto	140
5.9	Equazioni e disequazioni fratte	150
5.10	Appendice I: cenni sui sistemi lineari	153
5.11	Appendice II: rassegna dei principali metodi di risoluzione dei sistemi lineari	154
6	LE FUNZIONI POTENZA	164
6.1	Il caso $\alpha = n \in \mathbb{N}$	164
6.2	Il caso $\alpha = n \in \mathbb{Z}$	165
6.3	Il caso $\alpha = 1/n$: le funzioni radice	165
6.4	Il caso $\alpha = m/n$	169
6.5	Equazioni irrazionali.	170
6.6	Disequazioni irrazionali	173
7	ESPONENZIALI E LOGARITMI	177
7.1	La funzione logaritmo	181
8	INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA	185
8.1	La trigonometria: come e perché.	185
8.2	Le funzioni trigonometriche.	189
8.3	Formule della trigonometria.	197
8.4	Equazioni goniometriche elementari	201
8.5	Funzioni trigonometriche inverse	206
8.6	Altre equazioni trigonometriche	208
8.7	Disequazioni goniometriche.	215
8.8	Risoluzione dei triangoli	216
8.9	Trigonometria e vettori	221
II	ESERCIZI PROPOSTI	228
	CAPITOLO 1	229
	CAPITOLO 2	231
	CAPITOLO 3	239
	CAPITOLO 4	242
	CAPITOLO 5	244
	CAPITOLO 6	248
	CAPITOLO 7	251
	CAPITOLO 8	255
III	SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI	261
	CAPITOLO 1	262
	CAPITOLO 2	266
	CAPITOLO 3	288
	CAPITOLO 4	295
	CAPITOLO 5	298
	CAPITOLO 6	310
	CAPITOLO 7	318

CAPITOLO 8	327
IV TABELLE RIASSUNTIVE DELLE PRINCIPALI FORMULE	352

Indice analitico

- Angolo
 - misura dell'a. in radianti, 168
 - orientato, 166
- Asse
 - di un segmento, 45
 - delle ascisse, 37
 - delle ordinate, 37
- Assi
 - cartesiani, 37
 - coordinati, 37
- Bernoulli
 - artificio di, 160
 - diseguaglianza di, 32
- Carnot, teorema di , 193
- Circonferenza
 - centro, 49
 - equazione, 48
 - gonimetrica, 169
 - raggio, 49
 - retta esterna, 50
 - retta secante, 50
 - retta tangente, 50
- Connettivi logici, 12
- Cono circolare retto
 - apertura, 65
 - asse, 65
 - retta generatrice, 65
 - vertice, 65
- Corrispondenza biunivoca tra insiemi, 37
- Curve omografiche, 56
- De Morgan
 - leggi di (per le proposizioni), 13
 - leggi (per gli insiemi), 29
- Definizione per ricorrenza, 33
- Determinante di una matrice, 131
- Dimostrazione per assurdo, 17
- Discriminante, 96, 110
- Disequazioni
 - abbassamento del grado, 115
 - di grado superiore al secondo, 115
 - di primo grado, 108
 - di secondo grado, 112
 - esponenziali, 155
 - fratte, 128
 - generalità sulle, 103
 - goniometriche, 192
 - interpretazione geometrica delle d. di I grado, 108
 - interpretazione geometrica delle d. di II grado, 113
 - irrazionali, 147
- Distanza
 - di un punto da una retta, 46
 - tra due punti, 45
- Doppia implicazione, 15
- Ellisse
 - assi, 52
 - definizione, 52
 - degenere, 65
 - eccentricità, 52
 - equazione, 52
 - fuochi, 52
 - retta esterna, 53
 - retta secante, 53
 - retta tangente, 53
 - vertici, 52
- Equazioni
 - abbassamento del grado, 115
 - algebriche, 107
 - biquadratiche, 115
 - di II grado in sin cos, 190
 - di primo grado, 107
 - di secondo grado, 108
 - equivalenti, 101
 - esponenziali, 155
 - formula risolutiva dell' e. di II grado, 110
 - fratte, 128
 - goniometriche, 178
 - grado delle, 107
 - impossibili, 101
 - interpretazione geometrica delle e. di II grado, 110
 - lineari in sin cos, 187
 - reciproche, 116
 - trinomie, 115
- Esponenziale
 - base di un, 154
 - definizione, 154

- esponente, 154
- funzione, 154
- grafico della funzione, 156
- proprietà, 156
- Eulero, teorema dei seni o di, 193
- Fattoriale, 35
- Formule trigonometriche
 - espressioni di $\sin$ e $\cos$ in funzione di $\tan$, 175
 - f. degli angoli associati, 173
 - f. di addizione, 173
 - f. di bisezione, 174
 - f. di duplicazione, 173
 - f. di prostaferesi, 175
 - f. di sottrazione, 173
 - f. di Werner, 175
- Funzione
 - campo di esistenza, 69
 - codominio, 68
 - composta, 78
 - crescente, 82
 - crescente in senso debole, 83
 - decrescente, 83
 - decrescente in senso debole, 83
 - definizione, 68
 - di Dirichlet, 71
 - dispari, 84
 - dominio, 68
 - grafico, 71
 - immagine, 70
 - iniettiva, 79
 - inversa o invertibile, 80
 - monotona, 83
 - pari, 84
 - periodica, 85
 - prodotto di composizione, 77
- Funzioni trigonometriche
 - arcocoseno, 179
 - arcoseno, 179
 - arcotangente, 180
 - coseno, 162
 - cotangente, 170
 - grafico di $y = \tan x$, 172
 - grafico di $y = \arccos x$, 183
 - grafico di $y = \arcsin x$, 182
 - grafico di $y = \cos x$, 172
 - grafico di $y = \cot x$, 172
 - grafico di $y = \sin x$, 172
 - grafico di funzione $y = \arctan x$, 184
 - seno, 162
 - tangente, 169
- Identità, 101
- Implicazione logica, 13
- Insieme di livello, 100
- Insiemi
 - sottoinsiemi, 24
 - complementare, 28
 - differenza tra , 28
 - eguaglianza tra, 25
 - intersezione tra, 27
 - l'i. vuoto, 23
 - leggi di De Morgan, 29
 - notazioni relative agli, 23
 - numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, 23
 - prodotto cartesiano, 29
 - simbolo di appartenenza, 23
 - unione di , 27
- Ipebole
 - con asintoti gli assi cartesiani, 56
- Iperbole
 - asintoti, 55
 - assi, 55
 - definizione, 54
 - degenerare, 66
 - eccentricità, 55
 - equazione canonica, 54
 - equilatera, 56
 - fuochi, 55
 - vertici, 55
- Ipotesi, 15
- Logaritmo
 - base di un, 158
 - cambiamento di base, 160
 - definizione, 158
 - grafico della funzione, 158
 - naturale, 159
 - proprietà, 159
- Molteplicità di una radice, 97
- Negazione di un enunciato, 21
- Nepero
 - numero di, 157
- Parabola
 - con asse orizzontale
 - direttrice, 60
 - equazione, 59
 - equazione dell'asse , 59
 - fuoco, 60
 - vertice, 60
 - con asse verticale
 - direttrice, 59
 - equazione, 59
 - fuoco, 59
 - vertice, 59
 - definizione, 58
 - degenerare, 65

direttrice, 58
 fuoco, 58
 Permanenza (nelle equazioni di II grado), 112
 Piano cartesiano, 37
 Polinomi
 algoritmo della divisione tra, 92
 composizione di, 91
 divisione di, 92
 potenza n-esima dei, 90
 principio di identità dei, 87
 prodotto dei, 89
 somma dei, 89
 Polinomio
 definizione, 87
 irriducibile, 96
 quadrato di un, 91
 radice di un, 94
 riducibile, 96
 zero di un, 95
 Potenza ennesima di un binomio, 90
 Potenze
 proprietà, 141
 Principio di Induzione, 30
 Prodotti notevoli, 91
 Proposizione, 12
 Quantificatore
 esistenziale, 19
 universale, 19
 Radiante, 168
 Radice
 algebrica, 143
 aritmetica, 143
 n-esima, 143
 Regola di Cartesio, 112
 Relazione Pitagorica, 162
 Retta
 coefficiente angolare di una, 42
 equazione della parallela passante per un punto, 42
 equazione della perpendicolare passante per un punto, 43
 equazione della r. passante per due punti, 42
 equazione delle bisettrici, 47
 equazione in forma esplicita, 42
 equazione nella forma generale, 41
 rappresentazione parametrica, 45
 Ruffini
 abbassamento del grado con la regola di, 116
 regola di, 93
 Segmento
 forma parametrica, 44
 Simmetria
 asse di, 63
 centro di, 61
 di due punti rispetto ad un punto, 60
 di due sottoinsiemi rispetto ad un punto, 61
 di un sottoinsieme del piano rispetto ad un punto, 61
 rispetto ad una retta, 62
 Sistema
 impossibile, 119, 130
 indeterminato, 130
 interpretazione geometrica di un, 130
 lineare, 130
 risoluzione con il metodo di confronto, 131
 risoluzione con il metodo di Cramer, 133
 risoluzione con il metodo di Gauss, 132
 risoluzione con il metodo di sostituzione, 131
 risoluzione di un s. di disequazioni, 119
 risoluzione grafica di un, 120
 Sommatoria, 33
 Superficie conica, 65
 Teorema
 dei seni o di Eulero, 193
 del coseno o di Carnot, 193
 Tesi, 15
 Triangoli
 risoluzione trigonometrica dei, 194
 Triangolo di Tartaglia, 90
 Valore assoluto, 120
 Variazione (nelle equazioni di II grado), 112
 Vettori
 definizione, 197
 lunghezza, 197
 prodotto scalare tra, 198
 regola del parallelogramma, 197
 somma di, 197
 Zeri di un'equazione, 100

INTRODUZIONE

Lo scopo che ci siamo prefissi nello scrivere questo libro è quello di fornire agli studenti, che si apprestano ad affrontare gli studi universitari, un testo dove trovare rapidamente quanto serve come base per i corsi di Matematica del primo anno. Non abbiamo, ovviamente, la pretesa di sostituire i corsi della scuola superiore e quindi non ci siamo preoccupati di trattare in maniera esauriente tutti gli argomenti: lo studente che avesse la necessità, o la curiosità, di un approfondimento dovrà necessariamente fare riferimento a testi specifici. Abbiamo però cercato di utilizzare un linguaggio matematico rigoroso (in modo da anticipare quello che gli studenti incontreranno nelle lezioni universitarie e che dovranno cercare di assimilare in vista degli esami), accompagnato da commenti ed esempi, con lo scopo di migliorare la leggibilità ed aumentare la comprensione. Quelle che seguono sono alcune delle considerazioni che abbiamo tenuto presenti nella stesura del libro, unitamente ad una serie di criteri utilizzati nella scelta degli argomenti:

- Richiamare i concetti elementari di base che riteniamo indispensabili per affrontare i corsi di Matematica del primo anno di Università.
- Citare tutti quei teoremi fondamentali relativi ai concetti base, riportandone anche la dimostrazione solo quando ciò può costituire un aiuto per la comprensione dell'argomento. Alcuni argomenti che possono essere tralasciati in prima lettura sono riportati in caratteri più piccoli.
- Il testo può essere considerato un ripasso “ragionato” della materia e, allo stesso tempo, un manuale dove cercare *come risolvere* vari tipi di problemi elementari. A questo scopo sono proposti molti esempi ed esercizi svolti.

Ci auguriamo di essere riusciti nel nostro intento e, spinti dall'entusiasmo e dalla passione per la materia, di non esserci fatti prendere la mano dilungandoci troppo su alcuni temi. Gli studenti che vedono la Matematica solo come uno strumento da utilizzare all'interno di una scelta scientifica o tecnologica, troveranno esagerati termini quali “entusiasmo” o “passione”; d'altra parte gli autori sono in buona compagnia. Si leggano ad esempio questa citazione (tra le tante altre consimili che potremmo aggiungere).

La vita è degna di essere vissuta solo per due cose: per fare della Matematica e per insegnarla.
(Poisson)¹

Pisa 4/9/2014

Mauro Sassetti e Antonio Tarsia

¹Simeon- Denis Poisson (1781-1840), matematico francese.

Parte I

RICHIAMI DI TEORIA

Capitolo 1

CENNI DI LOGICA E TEORIA ELEMENTARE DEGLI INSIEMI

1.1 Proposizioni e connettivi logici

Una *proposizione* (che sarà generalmente indicata con una lettera corsiva maiuscola $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \dots$) è una frase dichiarativa di senso compiuto che possa esser riconosciuta come "*vera*" o "*falsa*". Questo riconoscimento può anche non essere immediato da stabilire (in matematica è quello che si chiama *dimostrazione*), ma l'affermazione non deve presentare ambiguità né alternative. ⁽¹⁾ La proposizione si regge sul gruppo fondamentale: *soggetto + predicato*, sufficiente da solo per formare una proposizione (frase minima). In ogni caso il suo elemento fondamentale è il verbo. Ad esempio, sono proposizioni

$\mathcal{A}$: *il cane è un animale*,

$\mathcal{B}$: $2 = 1$,

$\mathcal{C}$: *i triangoli hanno tre lati*,

mentre non lo sono

$\mathcal{D}$: *Il cane*,

$\mathcal{E}$: *che ore sono?*

$\mathcal{F}$: *se $2 = 1$* ,

$\mathcal{G}$: *Non fumare!*

$\mathcal{H}$: *Io sono bugiardo.* ²

Le proposizioni possono essere legate tra loro dando luogo ad una struttura più complessa; usando i cosiddetti *connettivi logici*; tra questi i più elementari sono i seguenti:

"e"	"o"	"non"
(coniunzione)	(disgiunzione)	(negazione)

I primi due sono detti anche binari perché si applicano a due proposizioni, mentre il terzo si applica solo ad una. Per quanto riguarda le notazioni, il connettivo "*e*" può essere indicato con il simbolo $\wedge$, il connettivo "*o*" con il simbolo $\vee$; per la negazione, accanto alla forma *non* $\mathcal{P}$ si possono usare le scritture $\overline{\mathcal{P}}$, $\mathcal{P}$ o $\neg\mathcal{P}$.

Per definizione

¹Principio di non contraddizione: *un enunciato non può essere contemporaneamente vero o falso*. Principio del terzo escluso: *un enunciato è vero o falso, non esiste una terza possibilità* (tertium non datur). Nel linguaggio corrente è possibile trovare frasi che non rispettano questi principi (vedi l'esempio della nota successiva).

²Infatti (eccetto la $\mathcal{H}$) non sono frasi dichiarative. La $\mathcal{H}$ è una frase dichiarativa di senso compiuto, ma non si può stabilire se è vera o falsa. Se infatti è vero che sono bugiardo, la frase è vera, ma mentre la dico non sto mentendo e quindi non sono bugiardo; se invece non è vero che sono bugiardo, la frase è falsa, ma mentre la dico sto mentendo e quindi sono bugiardo.

" $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ " è vera se e solo se sono vere *entrambe*;
 " $\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$ " è vera se e solo se è vera *almeno una* delle due;
 "*non* $\mathcal{P}$ " è vera se e solo se è falsa $\mathcal{P}$;
 $\mathcal{P}$ è vera se e solo se è falsa "*non* $\mathcal{P}$ ".

Ad esempio dalle proposizioni

$\mathcal{P}$: splende il sole
 $\mathcal{Q}$: soffia il vento forte,

otteniamo

" $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ ": splende il sole e soffia il vento forte
 " $\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$ ": splende il sole o soffia il vento forte
 "*non* $\mathcal{P}$ ": non splende il sole.

Nel caso disgiuntivo affermiamo che si realizza almeno una delle due condizioni atmosferiche, senza escludere la possibilità che siano entrambe vere. La disgiunzione logica deve dunque essere interpretata in senso debole, mentre nel linguaggio comune esiste anche la disgiunzione forte che esclude la possibilità che siano contemporaneamente vere entrambe le proposizioni. ⁽³⁾

Rimanendo sempre su un piano intuitivo, siamo in grado di riconoscere quando due proposizioni, pur formalmente diverse, esprimono la stessa affermazione. Due proposizioni di questo tipo si dicono tra loro *equivalenti* e l'una può essere sostituita dall'altra dove sia necessario.

Per indicare che due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono *equivalenti* scriveremo $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$.

Ad esempio:

- | | | | | |
|-------|---|--------|---|-------------------------------|
| (i) | $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ | $\iff$ | $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{P}$ | (proprietà commutativa) |
| (ii) | $\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$ | $\iff$ | $\mathcal{Q}$ o $\mathcal{P}$ | (proprietà commutativa) |
| (iii) | $(\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q})$ e $\mathcal{R}$ | $\iff$ | $\mathcal{P}$ e $(\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R})$ | (proprietà associativa) |
| (iv) | $(\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q})$ o $\mathcal{R}$ | $\iff$ | $\mathcal{P}$ o $(\mathcal{Q}$ o $\mathcal{R})$ | (proprietà associativa) |
| (v) | <i>non</i> (<i>non</i> $\mathcal{P}$) | $\iff$ | $\mathcal{P}$ | (doppia negazione) |
| (vi) | <i>non</i> ($\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$) | $\iff$ | $(\text{non } \mathcal{P})$ o $(\text{non } \mathcal{Q})$ | (prima legge di De Morgan) |
| (vii) | <i>non</i> ($\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$) | $\iff$ | $(\text{non } \mathcal{P})$ e $(\text{non } \mathcal{Q})$ | (seconda legge di De Morgan). |

Come indicato, le equivalenze (i), (ii), (iii), (iv) esprimono la commutatività e l'associatività dei connettivi e ed o.

La (v) stabilisce il principio che una doppia negazione equivale ad una affermazione. ⁽⁴⁾

Per la (vi) negare che due proposizioni siano contemporaneamente vere equivale ad affermare che almeno una delle due è falsa.

Infine per la (vii) negare che almeno una di due proposizioni è vera equivale ad affermare che sono entrambe false.

ESEMPIO 1.

Siano $\mathcal{P} : n$ è divisibile per 2, $\mathcal{Q} : n$ è divisibile per 3. Negare $(\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q})$ significa negare che n sia divisibile contemporaneamente per 2 e per 3 (cioè per 6). Questa negazione equivale a dire che n non è divisibile per 2 oppure n non è divisibile per 3. Negare $(\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q})$ significa invece negare che n sia divisibile per almeno uno dei due numeri. Questo si può esprimere scrivendo che n non è divisibile per 2 e non è divisibile per 3 (più semplicemente: non è divisibile né per 2 né per 3).

³Ad esempio, scrivendo "*sogno o son desto*", non affermiamo solo che deve verificarsi almeno una delle due azioni, ma escludiamo anche la possibilità che si verifichino entrambe. La disgiunzione forte usata in questo esempio è quella che in latino si esprime con il termine "*aut*", distinguendola dal "*vel*" riservato invece al caso debole. La *disgiunzione forte* può essere definita a partire dai connettivi introdotti: per indicare che solo una delle proposizioni $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ è vera, possiamo scrivere $(\mathcal{P}$ e *non* $\mathcal{Q})$ o $(\mathcal{Q}$ e *non* $\mathcal{P})$.

⁴La doppia negazione che come abbiamo nella logica equivale ad un'affermazione nel linguaggio comune può perdere questo connotato. Ad esempio, nella logica dire "*non possiamo non vincere*" equivale quindi a dire "*possiamo vincere*" oppure "*vinceremo*", mentre nel linguaggio comune queste frasi assumono una sfumatura diversa che può originare significati diversi.

Un altro connettivo logico è il *connettivo condizionale* o *implicazione logica*:

"se"....."allora"

Consideriamo ad esempio la frase *"se penso allora esisto"*.

In essa possiamo distinguere due parti: una prima proposizione che diremo premessa

$\mathcal{P}$: *io penso*

ed una seconda che diremo conseguenza

$\mathcal{Q}$: *io esisto*,

legate dal connettivo *se ... allora*, che indicheremo con il simbolo $\Rightarrow$. La proposizione precedente può essere dunque scritta nella forma

io penso $\Rightarrow$ io esisto.

In generale, date due proposizioni $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, potremo scrivere l'*implicazione* $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, che leggeremo in una delle seguenti forme:

se $\mathcal{P}$ allora $\mathcal{Q}$

da $\mathcal{P}$ segue $\mathcal{Q}$

vale $\mathcal{Q}$ se vale $\mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ è condizione sufficiente per $\mathcal{Q}$

$\mathcal{Q}$ è condizione necessaria per $\mathcal{P}$.

Il lettore presti particolare attenzione alle ultime due forme.

" $\mathcal{P}$ è condizione sufficiente per $\mathcal{Q}$ " significa che basta sapere che $\mathcal{P}$ è vera per dedurre che anche $\mathcal{Q}$ lo è. Così ad esempio sapere che io penso è sufficiente a garantire che io vivo.

" $\mathcal{Q}$ è condizione necessaria per $\mathcal{P}$ " significa che se $\mathcal{Q}$ fosse falsa, allora anche $\mathcal{P}$ lo sarebbe, cioè perché possa essere vera $\mathcal{P}$, deve preliminarmente essere vera $\mathcal{Q}$ (anche se questo non assicura la verità di $\mathcal{P}$). Così, per poter pensare è necessario essere vivi, anche se ci sono istanti della vita in cui uno non pensa.

Per la definizione dell'implicazione logica $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, assumiamo che sia *falsa* solo quando $\mathcal{P}$ è vera e $\mathcal{Q}$ è falsa (nel senso che *riteniamo falso ogni ragionamento che partendo da un enunciato vero arrivi ad una conseguenza falsa*):

$$\text{non}(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \iff (\mathcal{P} \text{ e } \text{non}\mathcal{Q}).$$

Da questa definizione segue

$$\begin{aligned} (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) &\iff \text{non}(\mathcal{P} \text{ e } \text{non}\mathcal{Q}) \\ &\iff \text{non}(\mathcal{P}) \text{ o } \text{non}(\text{non}\mathcal{Q}) \quad (\text{prima legge di De Morgan}) \\ &\iff \text{non}\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q} \quad (\text{doppia negazione}). \end{aligned}$$

Più esplicitamente, l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera se

$\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere

oppure

$\mathcal{P}$ è falsa.

In base a questa definizione risultano vere delle implicazioni che nel linguaggio comune sono prive di senso, sia perché non è richiesta alcuna connessione logica tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sia perché si considera vera, ad esempio, una proposizione che partendo da un presupposto falso, implica una conseguenza vera. Ad esempio, la proposizione

" Se 5 è un numero allora Roma è una città "
veravera

è vera, eppure nella logica comune è senza significato. Ugualmente vera è la proposizione

" Se Parigi è la capitale d'Italia allora 5 + 5 = 10 "
veravera

in cui una premessa falsa implica una conseguenza vera. Dunque, l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ non significa necessariamente che $\mathcal{Q}$ sia una conseguenza logica di $\mathcal{P}$; per decidere se l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera o falsa non resta che tener conto della definizione.

Osserviamo che l'implicazione logica non soddisfa la proprietà commutativa

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \not\equiv (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}).$$

Infatti se $\mathcal{P}$ è *falsa* e $\mathcal{Q}$ è *vera*, l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è *vera*, mentre l'implicazione $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ è *falsa*.

ESEMPIO 2.

Sia $\mathcal{P}$ la proposizione: " l'ultima cifra di un numero è zero " e $\mathcal{Q}$ la proposizione: " il numero è divisibile per cinque "; è evidente che $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera, mentre $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ è falsa. Infatti ogni numero che ha come ultima cifra 0 risulta divisibile per 5, mentre esistono numeri divisibili per 5 che non hanno come ultima cifra 0.

Siamo ora in grado di definire in modo rigoroso il simbolo di *equivalenza* tra proposizioni " $\iff$ " che fin qui abbiamo usato quasi come simbolo stenografico.

Due proposizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono legate dal connettivo " ...se e solo se... " (che è detto *doppia implicazione* ed è indicato con il simbolo $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$), quando valgono contemporaneamente le implicazioni $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Tenendo conto di quanto detto sopra a proposito della definizione di implicazione, la doppia implicazione equivale a

$$[(\text{non}\mathcal{P}) \text{ o } \mathcal{Q}] \text{ e } (\text{non}\mathcal{Q} \text{ o } \mathcal{P}).$$

Applicando successivamente la proprietà distributiva possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned} & [(\text{non}\mathcal{P}) \text{ e } (\text{non}\mathcal{Q} \text{ o } \mathcal{P})] \text{ o } \{\mathcal{Q} \text{ e } [(\text{non}\mathcal{Q}) \text{ o } \mathcal{P}]\} \\ & [(\text{non}\mathcal{P}) \text{ e } \text{non}\mathcal{Q}] \text{ o } (\text{non}\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{P}) \text{ o } [(\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}) \text{ o } (\text{non}\mathcal{Q} \text{ e } \mathcal{Q})]. \end{aligned}$$

Poiché $(\mathcal{P} \text{ e } \text{non}\mathcal{P})$, $(\mathcal{Q} \text{ e } \text{non}\mathcal{Q})$ non sono mai vere, in definitiva la doppia implicazione equivale a

$$(\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}) \text{ o } (\text{non}\mathcal{P} \text{ e } \text{non}\mathcal{Q}).$$

L'osservazione precedente ci permette dunque di affermare che $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ è vera quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere o entrambe false. La scrittura $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ si legge anche " condizione necessaria e sufficiente perché sia vera $\mathcal{P}$ è che sia vera $\mathcal{Q}$ ".

ESEMPIO 3.

Consideriamo le proposizioni

$$\mathcal{P}: n^2 \text{ è pari}, \quad \mathcal{Q}: n \text{ è pari}.$$

Si ha

$$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}.$$

Infatti:

$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ perché un numero n pari si può scrivere nella forma $n = 2h$ (con h intero) e quindi $n^2 = 4h^2 = 2 \cdot 2h^2$.

$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ perché dall'identità $n^2 = (n+1)(n-1) + 1$ deduciamo che i due fattori $n-1$ e $n+1$ sono dispari e quindi n è pari.

Il metodo della *deduzione logica* è di fondamentale importanza nella costruzione di ogni teoria matematica. Punto di partenza sono i *concetti primitivi* cioè *enti* che a priori non sono definiti (quali il punto, la retta e il piano della geometria euclidea o il numero dell'aritmetica secondo Peano) e i *postulati*, o assiomi, cioè proposizioni ammesse come vere che si riferiscono agli *enti primitivi* e che di questi esprimono le proprietà e le relazioni. I *postulati* devono essere scelti in modo che risultino indipendenti (nel senso che nessuno di questi è logicamente deducibile dagli altri) e coerenti (nel senso che non sono contraddittori cioè da essi non si può dedurre contemporaneamente sia una proposizione $\mathcal{P}$ che la sua negazione $\text{non}\mathcal{P}$).

A partire dai postulati il metodo di deduzione logica permette di costruire tutta una serie di proprietà attraverso i *teoremi*; ciascuno di questi è un asserto che afferma la verità di una proposizione $\mathcal{Q}$ come conseguenza logica di una proposizione $\mathcal{P}$. Un teorema si può dunque ricondurre all'implicazione

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

dove $\mathcal{P}$ (detta *ipotesi*) è una proposizione che si assume vera e $\mathcal{Q}$ (detta *tesi*) è la proposizione di cui si vuol dedurre la verità.

Il processo di deduzione logica è detto *dimostrazione* e deve seguire regole ben precise (regole di inferenza):⁽⁵⁾

(1) *dimostrazione diretta* (modus ponens).

Se è vera l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ed è vera $\mathcal{P}$, allora è vera anche $\mathcal{Q}$. In simboli:

$$[(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{P}] \Rightarrow \mathcal{Q}.$$

Lo schema di ragionamento è il seguente:

Premessa	$\mathcal{P}$	vera
	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	vera
Conseguenza	$\mathcal{Q}$	vera

ESEMPIO 4.

Se due triangoli hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo compreso, sono uguali.

In questo caso si ha

$\mathcal{P}$: due triangoli hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo compreso

$\mathcal{Q}$: i triangoli sono uguali.

La proposizione $\mathcal{P}$ è l'**ipotesi**, $\mathcal{Q}$ è la **tesi**.

OSSERVAZIONE 1.

Il fatto di sapere che $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera non consente di concludere niente circa la verità di $\mathcal{P}$ e di $\mathcal{Q}$ senza avere ulteriori informazioni. Infatti abbiamo già visto che in questo caso $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ possono essere entrambe vere, entrambe false⁶ oppure $\mathcal{P}$ falsa e $\mathcal{Q}$ vera.

OSSERVAZIONE 2.

Talora la dimostrazione diretta avviene attraverso uno o più passaggi intermedi: se sono vere le implicazioni $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e se $\mathcal{P}$ è vera, allora è vera anche $\mathcal{Q}$.

In simboli

$$[(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{P}] \Rightarrow \mathcal{Q}.$$

Lo schema del ragionamento è il seguente:

Premessa	$\mathcal{P}$	vera
	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$	vera
	$\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q}$	vera
Conseguenza	$\mathcal{Q}$	vera

⁵Ci sembra opportuno citare a questo proposito due teoremi rivoluzionari nella logica del ventesimo secolo. Furono dimostrati nel 1931 dal matematico austriaco K. Gödel (1906-1978). Per "teorie sufficientemente potenti" (ad esempio: la teoria degli insiemi, la teoria elementare dei numeri) si ha

I) (Teorema dell'incompletezza) Qualsiasi sistema coerente di assiomi è necessariamente incompleto, nel senso che esisteranno sempre enunciati veri che non possono essere dedotti da tali assiomi.

II) È possibile avere una teoria priva di contraddizioni ma non è possibile dimostrare che all'interno di quella teoria non ci sono contraddizioni.

⁶Siano, ad esempio, $\mathcal{P}$: " $2 < 1$ ", $\mathcal{Q}$: " $3 < 2$ ". Poiché $\mathcal{P}$ è falsa, l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera; questo non garantisce che $\mathcal{Q}$ sia vera (e difatti nel nostro caso è falsa). Si osservi anche come $\mathcal{Q}$ possa essere dedotta in modo evidente da $\mathcal{P}$ (basta aggiungere 1 ad ambo i membri della disuguaglianza che definisce $\mathcal{P}$).

(2) *dimostrazione per assurdo* (modus tollens)

Se è vera l'implicazione $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$ ed è vera P , allora è vera anche Q . In simboli:

$$[(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P) \wedge P] \Rightarrow Q.$$

Premessa	P	vera
	$\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$	vera
Conseguenza	Q	vera

In pratica, supponendo Q falsa si arriva alla conclusione che anche P è falsa, contraddicendo l'ipotesi P . In altre parole, supponendo Q falsa, si arriva ad una conclusione assurda. Per rimuovere questa contraddizione dobbiamo necessariamente concludere che Q è vera.

La dimostrazione per assurdo si basa sull'equivalenza

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$$

(in base alle regole viste, entrambe le implicazioni sono vere quando P è falsa o Q è vera). Ciò stabilito, se sostituiamo la premessa $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$ con quella equivalente $P \Rightarrow Q$, lo schema della dimostrazione per assurdo è quello della dimostrazione diretta.

ESEMPIO 5.

Date le proposizioni:

$$P : "m \cdot n \neq 0", \quad Q : "m \neq 0 \text{ e } n \neq 0"$$

e dunque

$$\text{non } P : "m \cdot n = 0" \quad \text{non } Q : "m = 0 \text{ o } n = 0",$$

$P \Rightarrow Q$ significa "se il prodotto di due numeri è diverso da zero, allora i due numeri sono entrambi diversi da zero"

mentre

$\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$ equivale a "data una coppia di numeri di cui almeno uno è zero allora il loro prodotto è zero".

I due enunciati sono diversi dal punto di vista formale, ma equivalenti da quello logico.

Un'altra versione della **dimostrazione per assurdo** è la seguente:

$$(P \text{ e } \text{non } Q) \Rightarrow R \quad (\text{con } R \text{ falsa})$$

Infatti

$$(P \text{ e } \text{non } Q) \Rightarrow R$$

equivale successivamente a

$$\text{non } R \Rightarrow \text{non}(P \text{ e } \text{non } Q)$$

$$\text{non } R \Rightarrow [\text{non } P \text{ o } \text{non}(\text{non } Q)]$$

$$\text{non } R \Rightarrow (\text{non } P \text{ o } Q)$$

$$\text{non } R \Rightarrow (P \Rightarrow Q);$$

per la *regola di deduzione* questo equivale a

$$(R \text{ o } [P \Rightarrow Q]);$$

poichè R è falsa, allora deve essere vera $(P \Rightarrow Q)$.

A titolo di esempio, vediamo come si può schematizzare l'enunciato e la dimostrazione (per assurdo) di un teorema di geometria seguendo gli schemi visti sopra.

TEOREMA 1.

Data una retta r ed un punto A fuori di essa esiste una ed una sola retta passante per A e perpendicolare ad r

Possiamo indicare l'ipotesi del teorema con

$\mathcal{P}$: A è un punto che non appartiene alla retta r ,

mentre la tesi è $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \wedge \mathcal{Q}_2$ dove

$\mathcal{Q}_1$: esiste una retta passante per A e perpendicolare ad r .

$\mathcal{Q}_2$: la retta passante per A e perpendicolare ad r è unica.

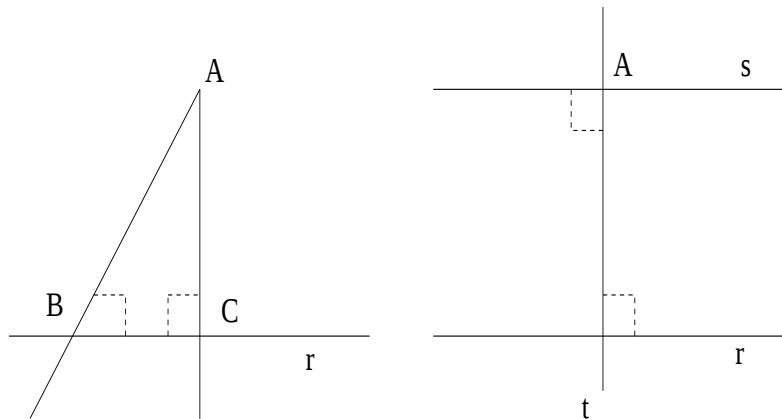
Il teorema si può schematizzare con $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Inoltre (per la prima legge di De Morgan)

$\text{non}\mathcal{Q} = \text{non}\mathcal{Q}_1 \vee \text{non}\mathcal{Q}_2$: non esiste alcuna retta passante per A e perpendicolare a r oppure ne esistono almeno due.

Si dimostra facilmente che esiste una retta passante per A e perpendicolare ad r .⁽⁷⁾ Dunque resta la possibilità che esistano due perpendicolari ad r passanti per A . D'altra parte se ci fossero due perpendicolari AC e AB (vedi figura) condotte da A ad r , avremmo un triangolo con due angoli retti, cosa che è dimostrata essere falsa. Lo schema di questa dimostrazione segue quello della seconda versione della dimostrazione per assurdo, ovvero: si deduce da $\mathcal{P}$ e $\text{non}\mathcal{Q}$ una proposizione $\mathcal{R}$ falsa, prendendo

$\mathcal{R}$: il triangolo A, B, C ha due angoli retti.



Una frase del tipo " x è un numero dispari" non è una proposizione, perchè il suo valore di verità dipende dal valore di x : se x vale 3 si ottiene un enunciato vero, se x vale 8 si ottiene un enunciato falso.

Scritture come la precedente, che contengono delle variabili e che diventano proposizioni quando al posto di queste si sostituiscono valori particolari, si dicono *enunciati aperti* o *predicati*. In un predicato individuiamo dei soggetti (*variabili*) e degli enunciati; questi ultimi esprimono le proprietà di un soggetto o le relazioni tra due o più soggetti. Per indicare un predicato useremo una lettera corsiva maiuscola (legata all'enunciato) seguita da una o più lettere minuscole entro parentesi (legate al soggetto). Ad esempio, per indicare che il soggetto x possiede la proprietà $\mathcal{P}$, scriveremo $\mathcal{P}(x)$ (nell'esempio di partenza $\mathcal{P}(x)$: x è un numero dispari); per indicare che due soggetti sono legati dalla relazione $\mathcal{Q}$ scriveremo $\mathcal{Q}(x, y)$, (ad esempio $\mathcal{Q}(x, y)$: $x < y$).

È evidente che, perché un predicato sia ben definito, occorre stabilire l'insieme in cui assumono valore le sue variabili (dominio); l'insieme di verità del predicato (cioè i valori che devono assumere le sue variabili perché l'enunciato sia vero) è un sottoinsieme di tale dominio.

⁷Basta infatti considerare la retta s parallela ad r e passante per A . Questa individua un angolo piatto di vertice A che ammette una retta bisettrice t che lo divide in due angoli retti; t è perpendicolare anche ad r .

ESEMPIO 6.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x) &: x < 0 \\ \mathcal{Q}(x, y) &: xy = 1.\end{aligned}$$

Il *dominio* di $\mathcal{P}$ è costituito dai numeri reali; l'*insieme di verità* sono i numeri negativi.

Il *dominio* di $\mathcal{Q}$ è dato dalle coppie di numeri reali; l'*insieme di verità* sono le coppie di numeri i cui elementi sono l'uno il reciproco dell'altro.

Cambiando il dominio cambia anche l'insieme di verità. Ad esempio, se come dominio di $\mathcal{P}$ scegliessimo l'insieme dei numeri naturali l'enunciato sarebbe sempre falso.

Con i predicati si possono utilizzare gli stessi connettivi introdotti per le proposizioni.

Se $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ sono due predicati definiti in uno stesso dominio,

$\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)$	è vero per i valori di x che rendono veri entrambi gli enunciati
$\mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)$	è vero per i valori di x che rendono vero almeno uno dei due enunciati
$\text{non}\mathcal{P}(x)$	è vero per i valori di x che rendono falso l'enunciato $\mathcal{P}(x)$
$\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$	è vero per i valori di x che rendono falso $\mathcal{P}(x)$ oppure vero $\mathcal{Q}(x)$
$\mathcal{P}(x) \iff \mathcal{Q}(x)$	è vera per i valori di x che rendono $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$ contemporaneamente veri o falsi.

Abbiamo visto che un enunciato aperto diventa una proposizione quando sostituiamo valori particolari alle sue variabili: solo in questo caso possiamo stabilire il valore dell'enunciato che si ottiene. Consideriamo però le seguenti scritture:

tutti i multipli di 4 sono pari

qualche numero è pari

nessun numero è pari

che equivalgono alle seguenti:

tutti i numeri x che sono multipli di 4 sono pari

c'è qualche numero x che è pari

non esiste un numero x che sia pari.

Di ciascuna di esse possiamo dire se è vera o falsa anche senza sapere di quale numero x si sta parlando (in particolare, le prime due sono vere, la terza è falsa); anche se in queste frasi ci sono delle variabili, possiamo ugualmente dire che si tratta di proposizioni. Il motivo che ci permette di fare questa affermazione è che abbiamo *quantificato* le variabili, nel senso che nel primo caso abbiamo detto che la proprietà vale per tutti gli elementi del dominio, nel secondo per qualche elemento, nel terzo per nessun elemento.

Un enunciato aperto può quindi essere trasformato in una proposizione in due modi diversi:

- sostituendo alle variabili valori particolari
- *quantificando* le variabili.

I quantificatori logici sono due:

- *il quantificatore universale* (indicato con il simbolo $\forall$, che si legge "*per ogni*") esprime il fatto che una data proprietà $\mathcal{P}$ vale per tutti i valori possibili delle variabili.
- *Il quantificatore esistenziale* (indicato con il simbolo $\exists$...:, che si legge "*esiste almeno un/una ... tale che*") esprime il fatto che una data proprietà vale per almeno un valore delle variabili.

ESEMPIO 7. (*il quantificatore universale*)

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ è multiplo di } 4 \Rightarrow n \text{ pari}$,

indica che ogni numero multiplo di 4 è pari.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}, (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

indica che l'uguaglianza scritta è valida quando diamo ad x e ad y un qualunque valore numerico.

ESEMPIO 8. (*Il quantificatore esistenziale*)

La proposizione " $\exists n \in \mathbb{N}: n \text{ è pari}$ " afferma l'esistenza di almeno un numero pari.

La proposizione " $\exists x \in \mathbb{R}: 2x + 1 = 0$ " afferma che l'equazione $2x + 1 = 0$ ammette almeno una soluzione.

OSSERVAZIONE 3.

Per la seconda proposizione dell'esempio precedente vale un risultato più forte di quello che abbiamo enunciato; in realtà, l'equazione ammette un'unica soluzione, cioè esiste un unico valore da assegnare alla variabile x perché valga l'uguaglianza indicata. Per esprimere questa nuova informazione scriviamo:

$$\exists_1 x \in \mathbb{R} : 2x + 1 = 0.$$

Il simbolo $\exists_1$ si legge "*esiste solamente un/una*" oppure "*esiste uno/una ed un solo/a*".

ESEMPIO 9.

$$\exists_1 x : x^2 = 0$$

$\exists_1 x : x$ è l'autore della Divina Commedia.

OSSERVAZIONE 4.

Per esprimere il fatto che una data proprietà non è verificata per nessun valore delle variabili, ad esempio

nessun numero è pari

(che è ovviamente falsa),

oppure

il quadrato di nessun numero è strettamente negativo

(che è vera),

possiamo usare il simbolo $\nexists$, che si legge "non esiste un/una":

$$\nexists n : n \text{ pari}$$

$$\nexists x : x^2 < 0.$$

Più comunemente, si preferisce usare il quantificatore $\forall$, affermando che per tutti i valori delle variabili è vera la negazione dell'asserto:

$$\forall n, n \text{ è dispari}$$

$$\forall x, x^2 \geq 0.$$

OSSERVAZIONE 5.

Quando una variabile è legata ad un quantificatore si dice che è *vincolata*, altrimenti si dice che è *libera*. Negli esempi finora incontrati le variabili erano sempre vincolate. Se scriviamo invece:

$$\text{esiste un numero } x \text{ tale che } x + y = 2$$

ovvero in forma simbolica,

$$\exists x : x + y = 2,$$

la variabile x è vincolata (al quantificatore esistenziale), mentre le variabili y è libera. In questo caso si ha un enunciato *aperto*, il cui significato è

$$\text{dato } y, \text{ esiste un valore di } x \text{ per il quale } x + y = 2.$$

Per chiudere un enunciato in più variabili, occorre legare ciascuna di esse ad un quantificatore. Nel caso dell'esempio precedente, potremo scrivere

$$\forall y, \exists x : x + y = 2$$

esprimendo in questo modo il fatto che, qualunque sia il valore assegnato alla variabile y , l'equazione $x + y = 2$ nell'incognita x ha sempre (almeno) una soluzione. In questo caso potremmo scrivere con più precisione

$$\forall y, \exists_1 x : x + y = 2$$

esprimendo l'informazione che non solo la soluzione esiste, ma è anche unica.⁽⁸⁾

I *quantificatori* verificano alcune proprietà legate al fatto che sostanzialmente essi sono congiunzioni o disgiunzioni allargate a tutti gli elementi di un insieme. Possiamo riassumere queste proprietà dicendo che

- *due quantificatori dello stesso tipo* possono essere scambiati di posto senza alterare il senso dell'enunciato, cioè il suo valore di verità;
- due quantificatori di diverso tipo **non** si possono scambiare.

ESEMPIO 10.

Sia $P(x, y)$ il predicato " x, y sono numeri e $y \geq x$ "; le due scritture

$$\forall x, \exists y : y \geq x$$

$$\exists y : \forall x, y \geq x,$$

sono diverse.

Infatti nel primo caso si esprime il fatto che fissato un qualunque numero, ne esiste sempre almeno uno più grande di questo. Nel secondo caso si afferma l'esistenza di un numero che è più grande di tutti gli altri numeri. Evidentemente la prima affermazione è vera, la seconda è falsa.

ESEMPIO 11.

Sia $P(x, y)$: " x è perpendicolare a y ", esteso alle rette del piano. L'enunciato

$$\forall x, \exists y : P(x, y)$$

significa che per ogni retta x ne esiste almeno una y ad essa perpendicolare (enunciato vero), mentre

$$\exists y : \forall x, P(x, y)$$

significa che esiste una retta y perpendicolare a tutte le rette x del piano (enunciato falso).

⁸L'esempio andrebbe formulato in una forma più corretta precisando in quali insiemi numerici variano x e y . Ad esempio se x e y sono numeri interi l'equazione ha sempre soluzione; se invece x e y sono numeri naturali, l'equazione potrebbe non avere soluzioni, come succede nel caso $y = 3$: non esiste alcun numero naturale x tale che $x + 3 = 2$.

La *negazione* di un enunciato che contiene quantificatori si realizza *scambiando* tra loro il *quantificatore universale* $\forall$ ed il *quantificatore esistenziale* $\exists$ e *negando* il predicato:

$$\begin{aligned} \text{non } [\forall x, \mathcal{P}(x)] &\iff \exists x : \text{non } \mathcal{P}(x) \\ \text{non } [\exists x : \mathcal{P}(x)] &\iff \forall x, \text{non } \mathcal{P}(x). \end{aligned}$$

ESEMPIO 12.

Nelle seguenti coppie di predicati, uno è la negazione dell'altro:

	<i>predicato</i>	<i>negazione del predicato</i>
•	$\exists x : x^2 - 1 < 0$	$\forall x, x^2 - 1 \geq 0$
•	$\forall x, x^2 = x$	$\exists x : x^2 \neq x$
•	$\forall x \exists y : y \geq x$	$\exists x : \forall y, y < x$

Nell'ultimo esempio, il predicato afferma che, fissato un qualunque numero x , ne esiste almeno uno y non minore di quello. La negazione afferma l'esistenza di un numero x maggiore di tutti i numeri y .

1.2 Insiemi

Il concetto di **insieme** è assunto come *primitivo*: chiameremo *insieme* una collezione di oggetti (gli *elementi* dell'insieme) di natura qualsiasi. Normalmente indicheremo con una lettera maiuscola un insieme e con una lettera minuscola un suo elemento. Un insieme A rimane quindi definito quando, dato un qualunque oggetto x , è possibile stabilire se x appartiene o no ad A . Scriveremo

$$x \in A$$

per indicare che l'elemento x *appartiene* all'insieme A , mentre con la scrittura

$$x \notin A$$

indicheremo che l'elemento x *non appartiene* ad A .

Un insieme particolare è l'*insieme vuoto* ($\emptyset$) che è l'insieme privo di elementi.

ESEMPIO 13.

- La frase " A è l'insieme dei numeri minori di 8" non individua un insieme perché non è specificato di quale tipo sono i numeri appartenenti ad A : reali, razionali, interi,....
- La definizione " B è l'insieme dei numeri reali maggiori di 2 e minori di 8" è corretta, perché la legge assegnata permette di stabilire quali sono gli elementi di B .
- L'enunciato " C è l'insieme dei numeri reali x tali che $x^2 + 1 = 0$ " individua l'insieme vuoto. È evidente che questo insieme può essere individuato in infiniti altri modi; un altro possibile esempio è " D è l'insieme dei somari che volano".

Esistono due modi per definire un insieme:

- elencando i suoi elementi
- indicando una o più proprietà che "caratterizzano" i suoi elementi, nel senso che tutti gli elementi dell'insieme e solo questi le verificano.

Esempi fondamentali di insiemi numerici sono:

numeri naturali	$\mathbb{N}$	$= \{1, 2, 3, \dots\}$
numeri interi	$\mathbb{Z}$	$= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
numeri razionali	$\mathbb{Q}$	$= \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, m \text{ ed } n \text{ primi tra loro}\}.$

I primi due insiemi sono definiti elencandone gli elementi, anche se in realtà l'elenco è limitato ad un numero esiguo di termini; i punti di sospensione stanno ad indicare che l'effettivo elenco dovrebbe contenere un numero infinito di termini. In una scrittura di questo genere si presuppone che il lettore sia in grado di estrapolare la legge di appartenenza dell'insieme, ma dovrebbe essere chiaro come questo non sia accettabile da un punto di vista formale. Non insistiamo oltre su questo tipo di obiezione. Per quanto riguarda la definizione di $\mathbb{Q}$, questa è stata data scrivendo esplicitamente la legge che ne caratterizza gli elementi. Anche per definire l'insieme

$$\mathbb{R} \text{ (numeri reali)}$$

si segue questo modello, ma illustrare le proprietà (o più precisamente gli assiomi) con cui i numeri reali possono essere caratterizzati esula dagli obiettivi di questo libro. A questo scopo rimandiamo ad un qualunque testo di Analisi Matematica. Qui ci limitiamo a ricordare che l'insieme è costituito dai numeri razionali (che hanno una rappresentazione decimale finita o periodica) e da quelli irrazionali (che hanno una rappresentazione decimale infinita, non periodica).

I numeri reali sono messi in corrispondenza biunivoca con i punti della retta quando su di essa si introduce un riferimento cartesiano. Per prima cosa orientiamo la retta, fissando un verso che chiamiamo positivo, mentre il suo opposto sarà chiamato negativo. Sulla retta orientata scegliamo un punto O , che chiameremo punto origine (o più semplicemente *origine*.) Questo divide la retta in due semirette: semiretta positiva quella che contiene i punti successivi ad O , negativa l'altra. Fissato un punto U sulla semiretta positiva, possiamo misurare ogni altro segmento OP mediante l'unità di misura OU . In questo modo ad ogni

punto P della retta associamo uno ed un solo numero reale x che coincide con la misura p di OP (rispetto all'unità OU) se P appartiene alla semiretta positiva, oppure con il valore $-p$ se P appartiene alla semiretta negativa. Se $O \equiv P$ allora $x = 0$. Viceversa ad ogni numero reale x viene associato un punto P che è l'unico punto tale che il segmento OP misura x rispetto ad OU e si trova dalla parte positiva se $x \geq 0$ oppure misura $-x$ e si trova dalla parte negativa se $x < 0$.

L'introduzione di un riferimento cartesiano permette dunque di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e i numeri reali: ad ogni punto P della retta rimane associato un ed un solo numero reale x detta ascissa di P . Identificando ogni punto con la propria ascissa (in pratica, scrivendo $P = x$), la retta viene identificata con l'insieme dei numeri reali: in questo modo ad un ente geometrico si sovrappone una struttura numerica; parleremo a questo proposito di retta reale. In particolare possiamo descrivere certi sottoinsiemi della retta mediante equazioni o disequazioni e viceversa indicare certi sottoinsiemi di numeri reali con il nome dell'insieme geometrico a cui corrispondono, come ad esempio, *intervalli* e *semirette*. Più precisamente:

Intervalli	$[a, b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
	$[a, b)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
	$(a, b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
	(a, b)	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
Semirette	$[a, +\infty)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
	$(a, +\infty)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
	$(-\infty, b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
	$(-\infty, b)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

DEFINIZIONE 1.

Si dice che l'insieme A è contenuto nell'insieme B (oppure che A è sottoinsieme di B) e si scrive

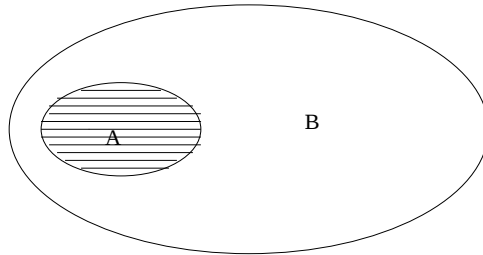
$$A \subset B$$

se ogni elemento di A è anche elemento di B . In simboli

$$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B$$

o anche

$$A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B).$$



DEFINIZIONE 2.

Si dice che l'insieme A è sottoinsieme proprio dell'insieme B e si scrive

$$A \subsetneq B$$

se $A \subset B$ ma $B \not\subset A$, cioè se esiste qualche elemento di B , che non appartiene ad A . In simboli

$$A \subsetneq B \iff (\forall x \in A, x \in B) \wedge (\exists x \in B : x \notin A)$$

o anche

$$A \subsetneq B \iff [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \not\Rightarrow x \in A)].$$

DEFINIZIONE 3.

Due insiemi A, B si dicono uguali, e si scrive

$$A = B,$$

se ogni elemento del primo insieme è anche elemento del secondo e viceversa, ovvero se ciascuno è sottoinsieme dell'altro: $A \subset B$ e $B \subset A$. In simboli

$$A = B \iff (\forall x \in A, x \in B) \wedge (\forall x \in B, x \in A)$$

oppure

$$A = B \iff A \subset B \text{ e } B \subset A$$

o anche

$$A = B \iff (\forall x, x \in A \iff x \in B).$$

L'insieme vuoto è considerato sottoinsieme di qualunque insieme, cioè si può scrivere

$$\forall A, \emptyset \subset A.$$

Poiché

$$A \subset A,$$

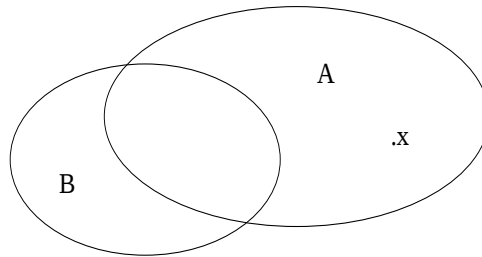
possiamo affermare che ogni insieme non vuoto ha almeno due sottoinsiemi: se stesso e l'insieme vuoto.

Nel caso in cui

$$A = \{x : \mathcal{P}(x)\}, \quad B = \{x : \mathcal{Q}(x)\},$$

allora

$$\begin{aligned} A \subset B &\iff \forall x, \mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x), \\ A \not\subset B &\iff \exists x : \mathcal{P}(x) \wedge \text{non} \mathcal{Q}(x) \\ A \subsetneq B &\iff \forall x, (\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)) \wedge (\exists x : \mathcal{Q}(x) \cap \text{non} \mathcal{P}(x)). \end{aligned}$$

**ESEMPIO 14.**

Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} = (-\infty, 0)$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} = (-\infty, 1)$. In questo caso $A \subset B$ e $B \not\subset A$.

Infatti ogni elemento dell'insieme A appartiene a B : $\forall x, x < 0 \Rightarrow x < 1$.

$B \not\subset A$ perché esiste almeno un elemento di A che non appartiene a B cioè $\exists x : x < 1 \wedge x \geq 0$ (ad esempio $x = \frac{1}{2}$, ma di numeri con questa proprietà ne esistono infiniti, precisamente tutti i numeri dell'intervallo $[0, 1)$).

ESEMPIO 15.

Verificare quale delle inclusioni $\subset$ o $\supset$ vale tra gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} : 4x - 2 \leq x + 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 2x < 3 + x\}$.

Per stabilire se uno dei due insiemi è contenuto nell'altro, esplicitiamo le condizioni di appartenenza, risolvendo le due disequazioni:

$$4x - 2 \leq x + 10 \iff 3x \leq 12 \iff x \leq 4$$

$$2x < 3 + x \iff x < 3.$$

Dunque

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\} = (-\infty, 4]$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x < 3\} = (-\infty, 3).$$

Poiché

$$x < 3 \Rightarrow x \leq 4 \quad \text{ma} \quad x \leq 4 \not\Rightarrow x < 3,$$

si ha

$$B \subsetneq A.$$

ESEMPIO 16.

Siano

$$A = \{x : 1 < x < 3\}, \quad B = \{x : 2 < x < 4\}.$$

È evidente che $A \not\subset B$ perché possiamo trovare un elemento x in A (ne basta uno) che non appartiene a B , ad esempio $x = 1,5$; analogamente $B \not\subset A$, perché possiamo trovare un elemento di B che non appartiene ad A , ad esempio $x = 3,5$.

ESEMPIO 17.

Siano

$$A = \{x : x^4 - x^2 = 0\} \quad \text{e} \quad B = \{-1, 0, 1\}.$$

In questo caso $A = B$.

Infatti risulta $A \subset B$ perché $x \in A$ significa x risolve l'equazione $x^4 - x^2 = 0$ e questa ha per soluzioni proprio $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, che sono anche elementi di B . D'altra parte i valori $0, 1, -1$ (elementi di B) sono soluzioni di $x^4 - x^2 = 0$, quindi appartengono ad A .

Per gli insiemi numerici che abbiamo introdotto valgono le seguenti inclusioni:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Osserviamo che il simbolo $\subset$ è *transitivo*, ovvero

$$A \subset B \text{ e } B \subset C \Rightarrow A \subset C,$$

mentre il simbolo $\in$ non lo è. Esempio

$$x \in \{x\} \text{ e } \{x\} \in \{\{x\}\} \text{ ma } x \notin \{\{x\}\}.$$

OSSERVAZIONE 6.

Si presti attenzione al diverso significato che hanno i simboli $\in$, $\subset$. Quando si scrive $x \in A$, si intende che A è un insieme e x un suo elemento; la scrittura $B \subset A$ significa che A e B sono due insiemi e che ogni elemento del primo appartiene al secondo. In particolare

$x \in \{x\}$ è una scrittura corretta, perché $\{x\}$ è un insieme che ha come unico elemento x .

$x \subset \{x\}$ non ha senso perché i termini collegati dal simbolo sono "gerarchicamente" diversi (un oggetto ed un insieme).

Per capire l'esempio sulla transitività del simbolo $\in$, si noti che $\{\{x\}\}$ è l'insieme che ha come unico elemento l'insieme $\{x\}$ e non l'elemento x stesso.

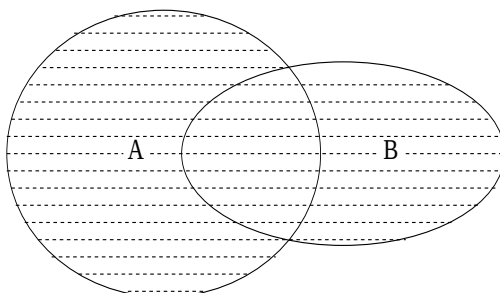
DEFINIZIONE 4.

L'unione di due insiemi A , B , indicata con $A \cup B$, è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

In particolare

$$A \cup \emptyset = A.$$

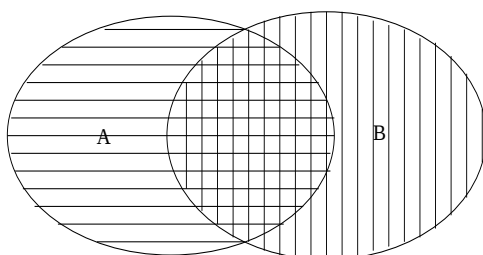


Nella figura sopra, l'insieme $A \cup B$ è rappresentato a tratteggio.

DEFINIZIONE 5.

L'intersezione di due insiemi A , B , indicata con $A \cap B$, è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Nella figura sopra $A \cap B$ è rappresentato col tratteggio a quadri.

Se A e B non hanno elementi in comune, scriveremo

$$A \cap B = \emptyset,$$

mentre in ogni caso risulta

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

ESEMPIO 18.

Se

$$A = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4\} \text{ e } B = \{x, y, z, w, 1, 2, 3\},$$

allora

$$A \cup B = \{a, b, c, d, x, y, z, w, 1, 2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{1, 2, 3\}.$$

Osserviamo che l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

può essere scritto nella forma

$$A \cap B,$$

dove A e B sono gli insiemi in cui sono rispettivamente verificate la prima e la seconda disequaglianza del sistema, cioè

$$A = \{x : x > 1\}, \quad B = \{x : x < 3\}.$$

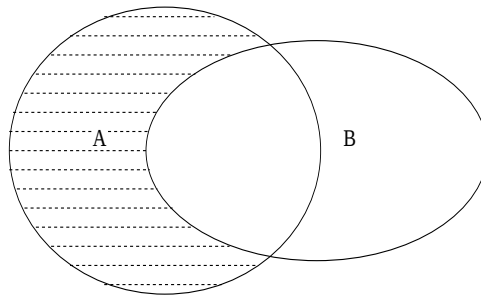
Infatti risolvere il sistema significa cercare i valori di x che verificano contemporaneamente le due disequazioni. È immediato concludere che

$$A \cap B = \{x : 1 < x < 3\}.$$

DEFINIZIONE 6.

La differenza di due insiemi A, B è l'insieme degli elementi che appartengono ad A ma non a B :

$$A - B \text{ (oppure } A \setminus B) = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$



L'insieme $A - B$ è rappresentato a tratteggio nella figura sopra.

Alla differenza $A - B$ si dà anche il nome di *complementare* di B in A . Il termine "*complementare*" si usa più comunemente quando ci occupiamo di insiemi B che sono tutti sottoinsiemi di uno stesso insieme fisso A , che chiameremo insieme *universo* o *spazio ambiente*. La notazione più comunemente usata per descrivere il complementare di B (in A) è $\mathcal{C}_A B$, che sostituisce con lo stesso significato la notazione $A - B$. Quando poi l'insieme universo è fissato una volta per tutte senza possibilità di equivoci, possiamo scrivere semplicemente $\mathcal{C}B$ invece di $\mathcal{C}_A B$.

Nel caso in cui

$$A = \{x : \mathcal{P}(x)\}, \quad B = \{x : \mathcal{Q}(x)\},$$

le operazioni sugli insiemi si traducono in operazioni sui predicati:

$$A \cup B = \{x : \mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)\},$$

$$A \cap B = \{x : \mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)\},$$

$$A - B = \{x : \mathcal{P}(x) \wedge \text{non}\mathcal{Q}(x)\},$$

$$\mathcal{C}B = \{x : \text{non}\mathcal{Q}(x)\}.$$

Proprietà delle operazioni tra insiemi.

	PROPRIETÀ	OPERAZIONI TRA INSIEMI	OPERAZIONI TRA PREDICATI
(1)	Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \iff \mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$
	Commutativa	$A \cap B = B \cap A$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \iff \mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$
(2)	Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \iff \mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$
	Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \iff \mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$
(3)	Distributiva	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \iff (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$
	Distributiva	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \iff (\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$
(4)	Doppia negazione	$\mathcal{C}\mathcal{C}B = B$	$\text{non}(\text{non}\mathcal{P}) \iff \mathcal{P}$
(5)	1 ^a Legge di De Morgan	$\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$	$\text{non}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \iff \text{non}\mathcal{P} \wedge \text{non}\mathcal{Q}$
(6)	2 ^a Legge di de Morgan	$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$	$\text{non}(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \iff \text{non}\mathcal{P} \vee \text{non}\mathcal{Q}$

La proprietà associativa permette di estendere le operazioni unione ed intersezione ad un numero qualunque di insiemi.

ESEMPIO 19.

Se $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\} = \{x : x \leq -1\} \cup \{x : x \geq 1\}$, allora $\mathcal{C}A = \{x : x > -1\} \cap \{x : x < 1\} = (-1, 1)$.

ESEMPIO 20.

Se $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2\} = \{x : x > -1\} \cap \{x : x < 2\}$, allora $\mathcal{C}A = \{x : x \leq -1\} \cup \{x : x \geq 2\}$.

DEFINIZIONE 7.

Il prodotto cartesiano degli insiemi A e B , indicato con $A \times B$, è l'insieme di tutte le coppie il cui primo elemento appartiene ad A ed il secondo a B :

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

ESEMPIO 21.

Un esempio significativo di prodotto cartesiano è quello dell'insieme $\mathbb{R}$ per se stesso, cioè l'insieme delle coppie di numeri reali (che individuano i punti del piano cartesiano):

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Comunemente questo insieme si indica $\mathbb{R}^2$.

Il fatto che nella definizione si considerino coppie ordinate implica che il prodotto cartesiano non è commutativo, cioè:

$$A \times B \neq B \times A.$$

Basta infatti pensare che nel piano cartesiano le coppie (a, b) e (b, a) rappresentano punti diversi se $a \neq b$.

Nella scrittura $x \in A$ abbiamo sempre convenuto che A rappresenti un insieme e x un elemento, stabilendo una specie di gerarchia tra questi due concetti. Esistono però insiemi che contengono se stessi come elemento. Un esempio è "l'insieme X dei concetti astratti": poichè X è esso stesso un concetto astratto, risulta $X \in X$.

Si chiamano regolari gli insiemi che *non* contengono se stessi tra i propri elementi e non regolari gli altri. È ragionevole supporre che ogni insieme X appartenga all'una o all'altra categoria, cioè che sia $X \notin X$ oppure $X \in X$.

Consideriamo adesso $\mathcal{R} = \{ \text{l'insieme di tutti gli insiemi } X \text{ regolari} \}$.

Non è possibile stabilire se $\mathcal{R}$ è o non è regolare. Infatti, se $\mathcal{R}$ fosse regolare, tra gli insiemi che ne costituiscono gli elementi ci sarebbe anche $\mathcal{R}$, ma allora $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ cioè $\mathcal{R}$ non è regolare.

Se invece $\mathcal{R}$ fosse regolare, tra gli insiemi suoi elementi non ci sarebbe $\mathcal{R}$, cioè $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$; ma allora $\mathcal{R}$ sarebbe regolare.

Formalizzando quanto sopra, si può scrivere:

$$\mathcal{R} = \{ X : X \notin X \}$$

$$\mathcal{R} \notin \mathcal{R} \iff \mathcal{R} \in \mathcal{R},$$

che costituisce un *paradosso* o *antinomia*, cioè una contraddizione all'interno della teoria degli insiemi. Non è qui possibile presentare i problemi che nascono da questo esempio. Ad un'altra antinomia abbiamo già accennato: la frase "io sono sempre un bugiardo" è una frase sintatticamente corretta, ma evidentemente contraddittoria.

Ricordiamo che alla classica teoria degli insiemi sin qui esposta, nella quale possono presentarsi più antinomie, è stato da tempo attribuito il titolo di *teoria ingenua* o *naïf* e che ad essa è stata sostituita una teoria più complessa, di tipo *assiomatico*, molto più attenta all'uso del termine "insieme". La *teoria elementare* è comunque del tutto adeguata per le applicazioni non specialistiche.

1.3 Il Principio di induzione

Il *principio di induzione* permette di provare la verità di un predicato definito sui *numeri naturali*.

TEOREMA 2 (Principio di Induzione).

Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato definito sui numeri naturali $\mathbb{N}$, tale che :

1. $\mathcal{P}(1)$ è vera
2. $\forall n \in \mathbb{N} : \text{supponendo } \mathcal{P}(n) \text{ vera segue che anche } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera.}$

Allora $\mathcal{P}(n)$ risulta vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In formula:

$$\{\mathcal{P}(1) \wedge [\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)]\} \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)].$$

Una formulazione più generale del *principio di induzione* (ma dal punto di vista logico ad essa equivalente) riguarda quei predicati definiti sui naturali maggiori di un assegnato numero k .

TEOREMA 3 (Principio di Induzione).

Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato definito $\forall n \geq k$ tale che :

1. $\mathcal{P}(k)$ è vera
2. $\forall n \geq k : \text{supponendo } \mathcal{P}(n) \text{ vera segue che anche } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera.}$

Allora $\mathcal{P}(n)$ risulta vera per ogni $n \geq k$.

ESEMPIO 22.

Provare la seguente eguaglianza:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Posto $\mathcal{P}(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, applichiamo il *Principio di Induzione*:

1. $\mathcal{P}(1)$ è vera perché $\mathcal{P}(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$: supponendo $\mathcal{P}(n)$ vera *segue* che anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Infatti essendo $\mathcal{P}(n+1) : 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, risulta

$$\overbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}^{\text{per l'ipotesi } \mathcal{P}(n)} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Quindi, per il principio di induzione l'eguaglianza è verificata.

Il matematico tedesco Gauss ⁽⁹⁾, a soli dieci anni, dedusse la veridicità della precedente eguaglianza utilizzando il seguente algoritmo:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & +2 & +3 & \dots & +n & + \\ n & +n-1 & +n-2 & \dots & +1 & = \\ \hline n+1 & +n+1 & +n+1 & \dots & +n+1 & = n(n+1) \end{array}$$

ESEMPIO 23.

Dimostrare che $n \cdot (n^2 + 5)$ è divisibile per 6, $\forall n \in \mathbb{N}$.

In questo caso il predicato è $\mathcal{P}(n) : n \cdot (n^2 + 5)$ è divisibile per 6.⁽¹⁰⁾

Verifichiamo il primo passo: $\mathcal{P}(1) : 1 \cdot (1^2 + 5)$ è divisibile per 6, cioè 6 è divisibile per 6, il che è ovviamente vero.

Verifichiamo l'induttività della proposizione (ovviamente $\mathcal{P}(n+1) : (n+1) \cdot [(n+1)^2 + 5]$ è divisibile per 6) esplicitando l'espressione che compare nella definizione di $\mathcal{P}(n+1)$:

$$\begin{aligned} (n+1)[(n+1)^2 + 5] &= (n+1)[n^2 + 2n + 1 + 5] = \overbrace{n(n^2 + 5)}^{\text{per l'ipotesi induttiva}} + 3n^2 + 3n + 6 = \\ &= k \cdot 6 + 3n^2 + 3n + 6 = 6(k+1) + 3n(n+1) = 6(k+1+k'). \end{aligned}$$

Infatti, nel prodotto $3n(n+1)$ compaiono due interi consecutivi n e $n+1$; poiché almeno uno dei due è pari, il loro prodotto contiene come fattore 2; possiamo allora scrivere $n(n+1) = 2k'$ e dunque $3n(n+1) = 6k'$.

ESEMPIO 24.

Il principio di induzione si applica a qualunque predicato che sia definito sui numeri naturali e quindi anche ad un gioco come il seguente, che prende il nome di Torre di Hanoy.

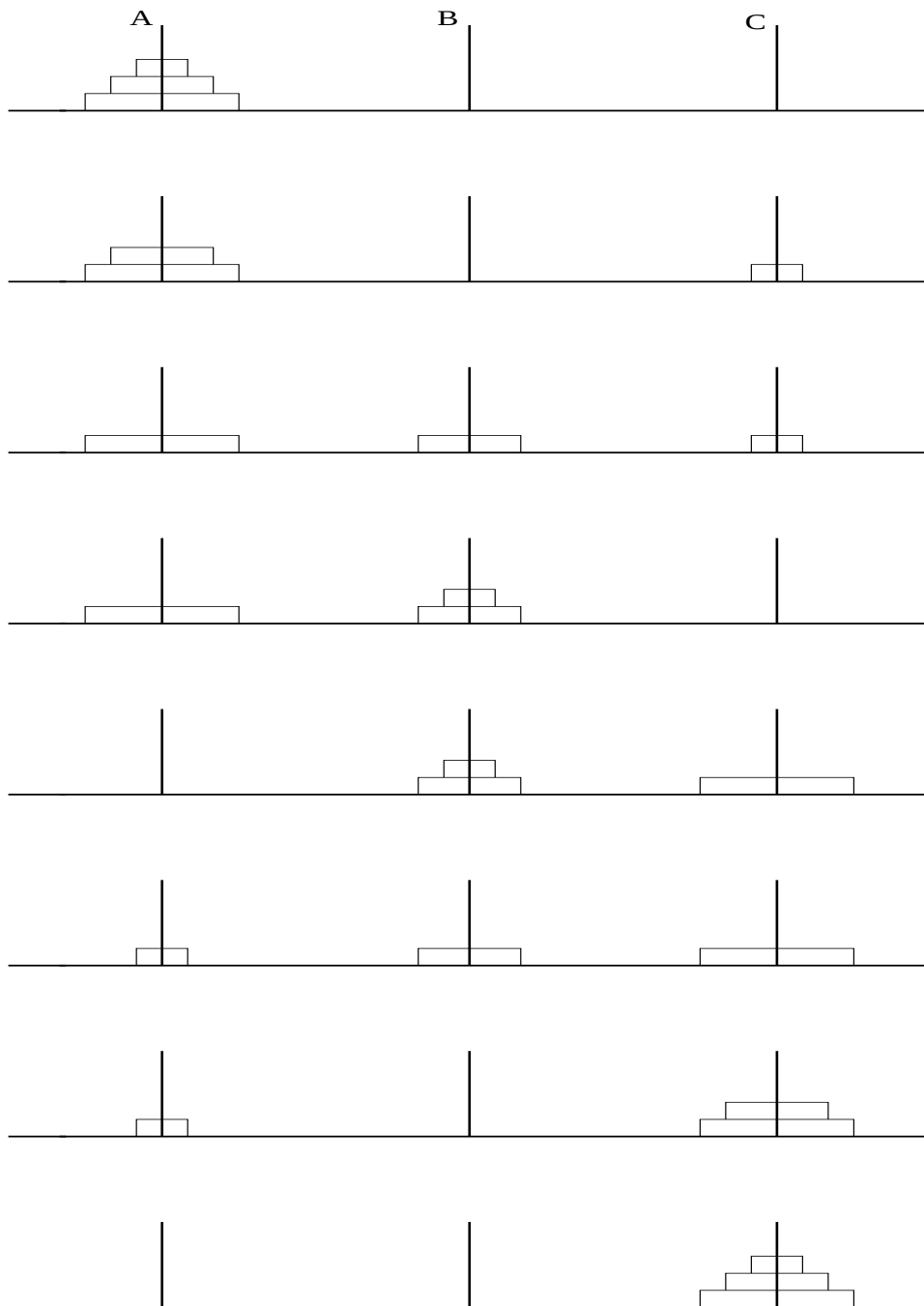
Sono dati n dischi infilati nell'asse A in modo da formare una torre: ogni disco sia sovrapposto ad un altro con diametro maggiore in modo da formare una specie di cono. Il gioco consiste nel trasportare n dischi dall'asse A all'asse C con il minimo numero di mosse, seguendo le seguenti regole:

1. si può trasportare solo un disco alla volta;
2. non si può sovrapporre ad un disco un altro che abbia diametro maggiore.

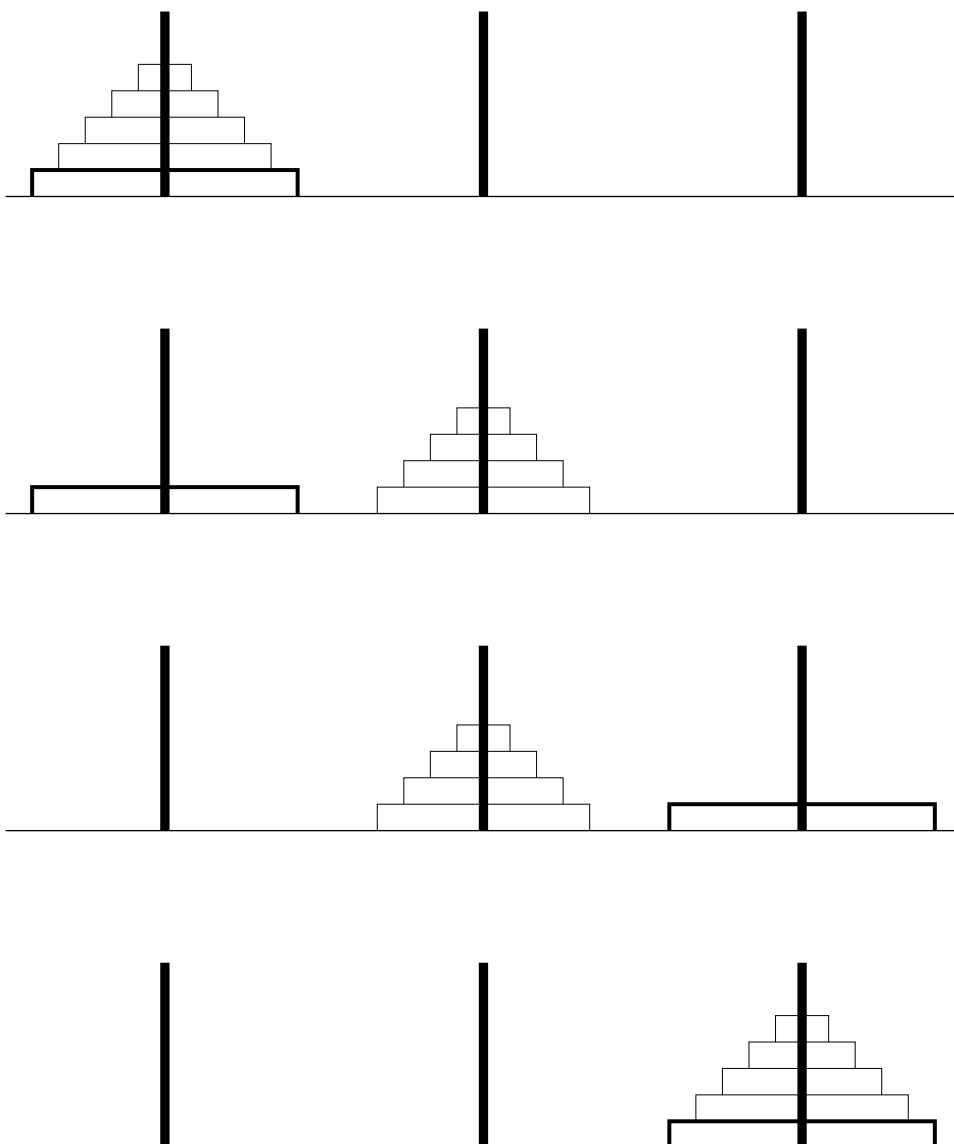
⁹Carl Friedrich Gauss (1777-1855), pietra miliare della storia della matematica, *enfant prodige*, fu uno degli ultimi studiosi a riuscire a dare importanti contributi in tutti i settori della matematica.

¹⁰Un numero intero m è *divisibile* per $h \in \mathbb{N}$ se esiste un altro numero intero k tale che $m = kh$.

Il problema è calcolare il numero R_n di queste mosse.
 Nella figura sottostante facciamo l'esempio del caso di tre dischi.



Il primo passo per la risoluzione del problema è quello di "intuire" R_n . A tale scopo si può procedere nel modo seguente. Se abbiamo $n + 1$ dischi in A , con R_n mosse ne portiamo n in B , quindi portiamo l' n -esimo in C ed infine con altre R_n mosse portiamo gli n dischi in C (vedi figura).



In totale $R_{n+1} = 2R_n + 1$. A questo punto si tratta di determinare R_n in funzione di n . Sostituendo nella relazione trovata $n = 1, n = 2, n = 3$, ecc. possiamo compilare la seguente tabella:

$n :$ 1 2 3 4 5 ...

$R_n :$ 1 3 7 15 31 ...

Osservando la tabella si "*intuisce*" che i numeri della seconda riga sono gli interi che precedono le potenze di 2. Ovvero

$$R_n = 2^n - 1.$$

Ovviamente l'esattezza di questa *intuizione* va verificata. Per fare questo, utilizziamo il principio di induzione per il predicato $\mathcal{P}(n) : R_n = 2^n - 1$. Per $n = 1$ è evidentemente vera. Per provare l'induttività di $\mathcal{P}(n)$, ragioniamo come abbiamo fatto sopra per determinare la relazione tra R_{n+1} e R_n . Dovendo spostare $n + 1$ dischi ne spostiamo n da A a B con $2^n - 1$ mosse (qui si utilizza l'ipotesi induttiva), poi spostiamo da A a C l' $(n+1)$ -esimo, infine con altre $2^n - 1$ mosse (è ancora utilizzata l'ipotesi induttiva) portiamo gli n dischi da B a C . In totale:

$$R_{n+1} = (2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

ESEMPIO 25. (*Diseguaglianza di Bernoulli*)

Dimostrare per induzione che:

$$1 + nh < (1 + h)^n, \quad \forall n \geq 2 \quad (\text{dove } h > -1, h \neq 0).$$

In questo predicato il primo passo da dimostrare è quello per $n = 2$:

$$\mathcal{P}(2) : 1 + 2h < (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2,$$

che è ovviamente vero. Per provare l'induttività: $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$, osserviamo che

$$\mathcal{P}(n + 1) : 1 + (n + 1)h < (1 + h)^{n+1}.$$

Possiamo partire dal secondo membro, cercando di evidenziare nell'espressione il termine al quale applicare la proposizione induttiva:

$$\begin{aligned} (1 + h)^{n+1} &= (1 + h) \overbrace{(1 + h)^n} > \quad (\text{per l'ipotesi induttiva}) \\ &> (1 + h) \overbrace{(1 + nh)} = 1 + h + nh + nh^2 > 1 + (n + 1)h \quad (\text{perché } nh^2 > 0). \end{aligned}$$

IL SIMBOLO DI SOMMATORIA

Per semplificare le espressioni in cui intervengono delle somme, possiamo utilizzare il *simbolo di sommatoria* e scrivere:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

L'indice i si chiama indice di sommatoria e la sua scelta è del tutto arbitraria. Ad esempio avremmo potuto scrivere $\sum_{k=1}^n a_k$. Generalmente, per indicare questa possibilità, si dice che l'indice di sommatoria è "una variabile muta".

ESEMPIO 26.

$$\sum_{i=1}^3 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n.$$

Il principio di induzione permette di dare una definizione rigorosa del *simbolo di sommatoria*, assegnandone il valore al "primo passo" e la legge che, noto il valore al passo n -esimo, permette di dedurre quello al passo $n + 1$ -esimo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^1 a_i = a_1 \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i = a_{n+1} + \sum_{i=1}^n a_i \end{array} \right.$$

Applicando il *principio di induzione* alla proposizione

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{i=1}^n a_i \text{ è definito,}$$

si deduce che $\mathcal{P}(n)$ è sempre vero, cioè che il simbolo di sommatoria risulta pienamente definito. Un procedimento di questa forma si dice costituire una **definizione per ricorrenza**.

Non è difficile provare le seguenti proprietà del *simbolo di sommatoria*.

1. $\sum_{i=1}^n c = \overbrace{c + c + \dots + c}^{n \text{ volte}} = nc$
2. $\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i$
3. $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$
4. $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j \quad (^{11})$
5. $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i, \quad m < n$
6. $\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}$
7. $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j.$

ESEMPIO 27.

Dimostrare la seguente eguaglianza (somma dei primi n termini di una progressione geometrica)⁽¹²⁾

$$\sum_{i=0}^n a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad (^{13})$$

Procediamo applicando il principio di induzione.

Per $n = 0$ l'eguaglianza è vera, riducendosi alla seguente

$$a^0 = \frac{1 - a}{1 - a}, \quad \text{cioè} \quad 1 = 1.$$

¹¹L'abbiamo già precisato: *l'indice di sommatoria* è una *variabile muta*.

¹²Si definisce *progressione geometrica* una successione di numeri tali che sia costante il rapporto tra un termine e quello che lo precede (*ragione* della progressione). Ad esempio la *progressione geometrica* di ragione 2 è costituita dai numeri 1, 2, 4, 8, 16, ..., ovvero dai numeri della forma 2^{n-1} , $n = 1, 2, \dots$, o anche 2^n , $n = 0, 1, 2, \dots$.

¹³Si noti che nell'esempio considerato l'indice di sommatoria parte da 0 invece che da 1. Ovviamente questa non è una modifica sostanziale. D'altra parte anche nell'enunciato del *Principio di Induzione* possiamo considerare proposizioni definite per $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z}^+$ invece che in $\mathbb{N}$. Quanto detto in precedenza si ripete interamente, con le solite avvertenze che adesso il primo passo è quello per $n = 0$ invece che per $n = 1$.

Dimostriamo l'induttività della proposizione, osservando che

$$\mathcal{P}(n+1) : \sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}.$$

Scomponiamo la sommatoria applicando la proprietà 5, in modo da poter applicare l'ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} \overbrace{\sum_{i=0}^n a^i} + a^{n+1} &= \text{(per l'ipotesi induttiva)} \\ &= \frac{\overbrace{1-a^{n+1}}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a} \end{aligned}$$

I FATTORIALI

DEFINIZIONE 8 (Fattoriale).

Definiamo il fattoriale di un numero naturale n come il prodotto dei primi n naturali:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

ESEMPIO 28.

$$\begin{aligned} 1! &= 1, \\ 2! &= 1 \cdot 2 = 2, \\ 3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \\ 4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \\ (n+1)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1), \\ (2n)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) \cdots (2n-1) \cdot 2n \end{aligned}$$

Anche il fattoriale può essere definito per *ricorrenza*, nel modo seguente:

$$\begin{cases} 1! = 1 \\ (n+1)! = n! (n+1). \end{cases}$$

In Analisi Matematica è opportuno definire anche il fattoriale del numero 0 ponendo:

$$0! = 1.$$

Il valore del fattoriale cresce molto rapidamente al crescere di n , come si vede dalla seguente tabella

n	$n!$	n	$n!$
1	1	11	399 16800
2	2	12	47990 01600
3	6	13	62270 20800
4	24	14	8 71782 91200
5	120	15	130 76743 68000
6	720	16	2092 27898 88000
7	5040	17	35568 74280 96000
8	40320	18	6 40237 37057 28000
9	3 62880	19	121 64510 04088 32000
10	36 28800	20	2432 90200 81766 40000

Nella tabella successiva sono riportati i valori approssimati dei fattoriali dei multipli di 10 compresi tra 30 e 100.

n	$n!$
30	26.525×10^{32}
40	81.582×10^{47}
50	30.414×10^{64}
60	83.210×10^{81}
70	11.979×10^{100}
80	71.569×10^{118}
90	14.857×10^{138}
100	93.326×10^{157}

ESEMPIO 29.

Dimostrare per induzione che

$$2^n \leq (n+1)! \quad n \in \mathbb{N}$$

Per $n=1$ è evidente in quanto la disuguaglianza si riduce a $2 \leq 4$.

Posto $\mathcal{P}(n) : 2^n \leq (n+1)!$, dimostriamo che $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Utilizzando l'ipotesi induttiva, otteniamo

$$2^{n+1} = 2(2^n) \leq 2[(n+1)!].$$

Per ottenere la tesi, basta provare che

$$2[(n+1)!] \leq (n+2)!.$$

Sviluppando il fattoriale al secondo membro e semplificando, si ottiene

$$2[(n+1)!] \leq (n+1)!(n+2) \iff 2 \leq n+2,$$

che è sempre verificata.

ESEMPIO 30.

Dimostrare per induzione che

$$n! \leq n^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Per $n = 1$ è banalmente verificata ($1 \leq 1$). Dimostriamo l'induttività della proposizione. Per l'ipotesi induttiva si ha:

$$(n+1)! = n!(n+1) \leq n^n(n+1).$$

Rimane da provare che è

$$n^n(n+1) \leq (n+1)^{(n+1)} = (n+1)^n(n+1).$$

Questo segue dal fatto che

$$n^n \leq (n+1)^n.$$

ESEMPIO 31.

Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Per $n = 1$ è banalmente verificata: $(-1)^2 \cdot 1 = (-1)^2 \cdot 1$.

Osserviamo che

$$\mathcal{P}(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

e scomponiamo la somma al primo membro con la proprietà (5) del simbolo di sommatoria per provare l'induttività della proposizione

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 &= \overbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2} + (-1)^{n+2} (n+1)^2 = \text{(per l'ipotesi induttiva)} \\ &= \overbrace{(-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}} + (-1)^{n+2} (n+1)^2 = (-1)^{n+2} \left[(n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right] = (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Capitolo 2

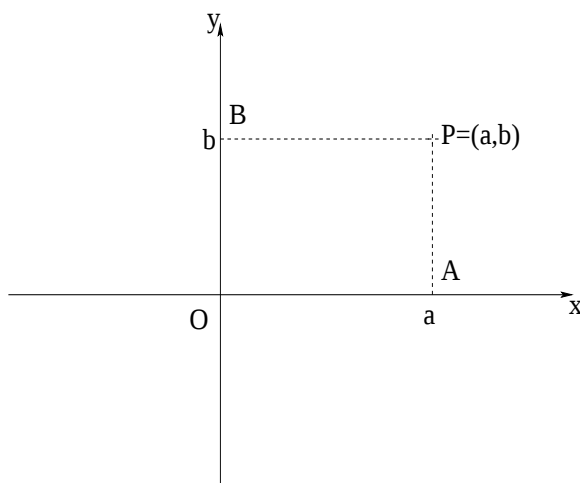
RICHIAMI DI GEOMETRIA ANALITICA

2.1 Le coordinate cartesiane del piano

Fissiamo nel piano un riferimento cartesiano costituito due rette orientate ⁽¹⁾ tra loro perpendicolari nel punto O : le chiameremo *assi coordinati* o *assi cartesiani*; più precisamente, una delle due sarà detta *asse delle ascisse* o *asse delle x* e l'altra *asse delle ordinate* o *asse delle y* . In genere si sceglie come verso positivo degli assi quello per cui la rotazione di 90^0 in senso antiorario attorno al punto O porta la semiretta positiva dell'asse x a sovrapporsi alla semiretta positiva dell'asse y (vedere figura seguente).

Preso un punto P del piano, da esso conduciamo le perpendicolari agli assi, che intersecano nei punti A e B rispettivamente l'asse x e l'asse y .

Sull'asse x al punto A corrisponde un numero reale a , mentre sull'asse y al punto B corrisponde un numero reale b . In definitiva, al punto P rimane associata una coppia ordinata (a, b) di numeri reali. La costruzione geometrica inversa permette di associare ad ogni coppia ordinata (a, b) di numeri reali un punto P del piano.



In questo modo si stabilisce una corrispondenza *biunivoca* ⁽²⁾ tra i punti del piano e le coppie di numeri reali, che permette di identificare oggetti di natura diversa e scrivere semplicemente $P = (a, b)$.

¹Ovvero: sulle quali siano stati individuati *un'origine, un verso ed un'unità di misura*, (vedi capitolo I, paragrafo 1.2).

²Una **corrispondenza biunivoca** tra due insiemi è una legge che associa ad ogni elemento del primo insieme uno ed un solo elemento del secondo insieme e viceversa.

Il piano geometrico in cui sia stato definito un riferimento cartesiano (**piano cartesiano**) può dunque essere identificato con l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali

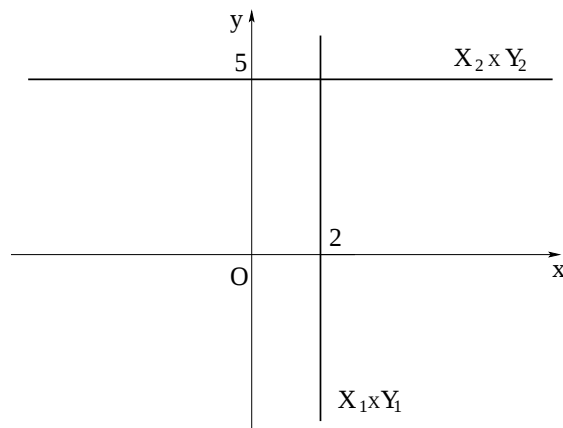
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\};$$

Se $X \subset \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}$ allora $X \times Y \subset \mathbb{R}^2$, cioè il prodotto cartesiano di due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Questo permette di descrivere mediante equazioni o disequazioni alcuni sottoinsiemi del piano.

ESEMPIO 32.

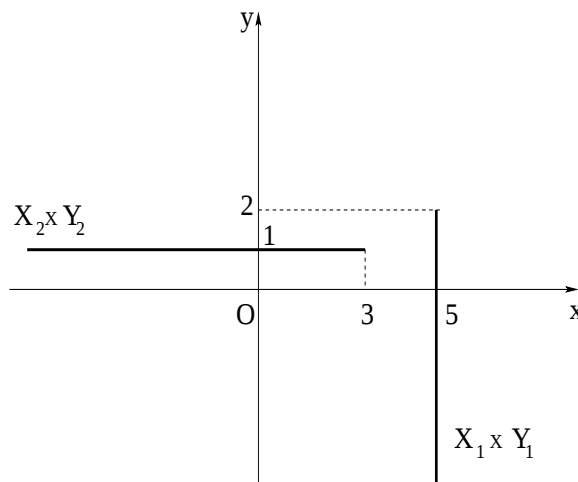
Se $X_1 = \{2\}$, $Y_1 = \mathbb{R}$, allora $X_1 \times Y_1 = \{(x, y) : x = 2, y \in \mathbb{R}\}$, mentre se $X_2 = \mathbb{R}$, $Y_2 = \{5\}$, $X_2 \times Y_2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = 5\}$.

Come è rappresentato nella figura seguente, questi due sottoinsiemi identificano due rette del piano, la prima parallela all'asse delle y e la seconda parallela all'asse delle x . Con semplificazione del linguaggio, potremo dire che questi due sottoinsiemi *sono* due rette del piano.



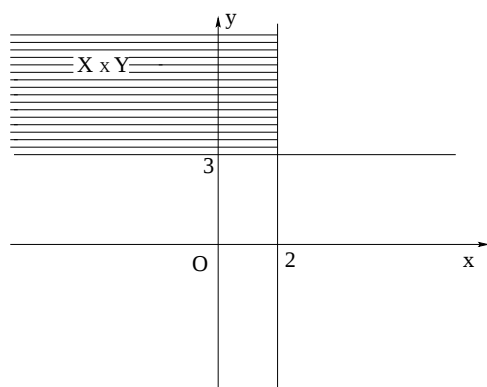
ESEMPIO 33.

Siano $X_1 = \{5\}$, $Y_1 = \{y : y \leq 2\}$ e $X_2 = \{x : x \leq 3\}$, $Y_2 = \{1\}$. I sottoinsiemi del piano cartesiano $X_1 \times Y_1$ e $X_2 \times Y_2$ sono le due semirette rappresentate nella figura seguente.



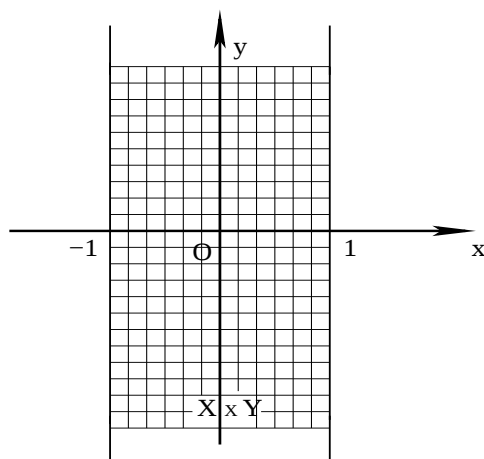
ESEMPIO 34.

Siano $X = \{x : x \leq 2\}$ e $Y = \{y : y \geq 3\}$. L'insieme $X \times Y$ è la porzione di piano rappresentato nella seguente figura.



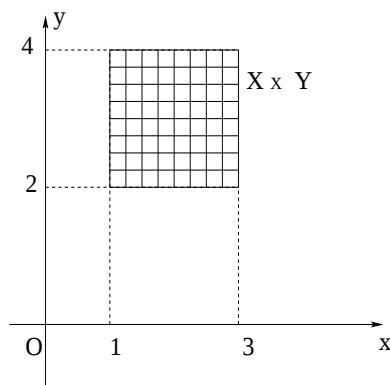
ESEMPIO 35.

Siano $X = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$ e $Y = \mathbb{R}$. L'insieme $X \times Y$ è la striscia, delimitata dalle due rette verticali passanti per $x = -1$ e $x = 1$, rappresentata in figura.



ESEMPIO 36.

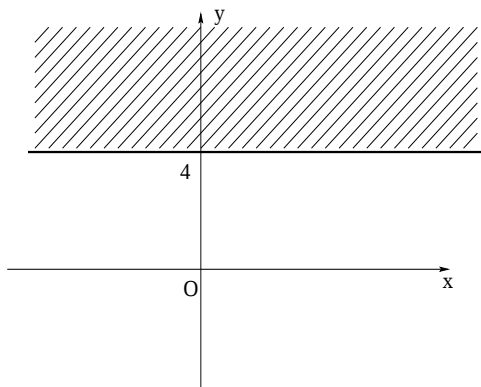
Siano $X = \{x : 1 \leq x \leq 3\}$ e $Y = \{y : 2 \leq y \leq 4\}$. L'insieme $X \times Y$ è il quadrato rappresentato in figura.



ESEMPIO 37.

Il semipiano chiuso ⁽³⁾ Π posto sopra la retta orizzontale passante per il punto $P = (0, 4)$ può essere descritto nella forma

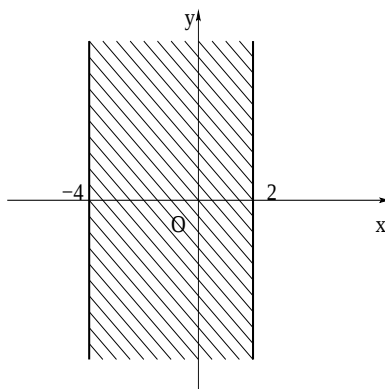
$$\Pi = \{(x, y) : y \geq 4\}.$$



ESEMPIO 38.

L'intersezione tra il semipiano chiuso Π_1 posto a destra della retta verticale passante per $(-4, 0)$ ed il semipiano chiuso Π_2 posto a sinistra della retta verticale passante per $(2, 0)$ è descritto da

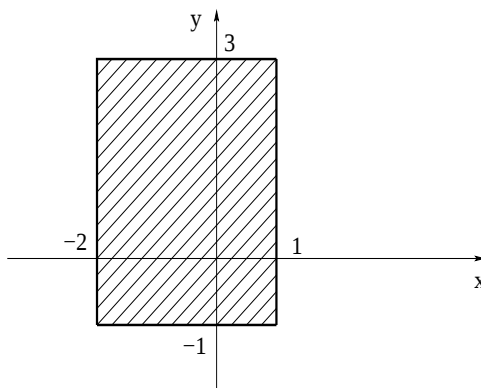
$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{(x, y) : -4 \leq x \leq 2\}.$$



ESEMPIO 39.

Il rettangolo R di vertici $(-2, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 3)$, $(-2, 3)$ si descrive nella forma

$$R = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 3\}.$$



³Un semipiano si dice **chiuso** se contiene la retta che lo delimita.

2.2 Le rette del piano

Ogni retta del piano cartesiano può essere descritta mediante un'equazione. A tale scopo iniziamo con il considerare le rette parallele agli assi coordinati.

I punti $P = (x, y)$ di una retta $\mathcal{R}_1$ parallela all'asse y e passante per il punto di coordinate (h, k) sono caratterizzati dall'avere tutti lo stesso valore h dell'ascissa, quindi

$$(x, y) \in \mathcal{R}_1 \iff x = h.$$

Possiamo anche scrivere $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) : x = h\}$, o più semplicemente dire che $x = h$ è l'equazione di tale retta.

Analogamente i punti di una retta $\mathcal{R}_2$ parallela all'asse x e passante per il punto di coordinate (h, k) hanno tutti lo stesso valore k dell'ordinata, e quindi

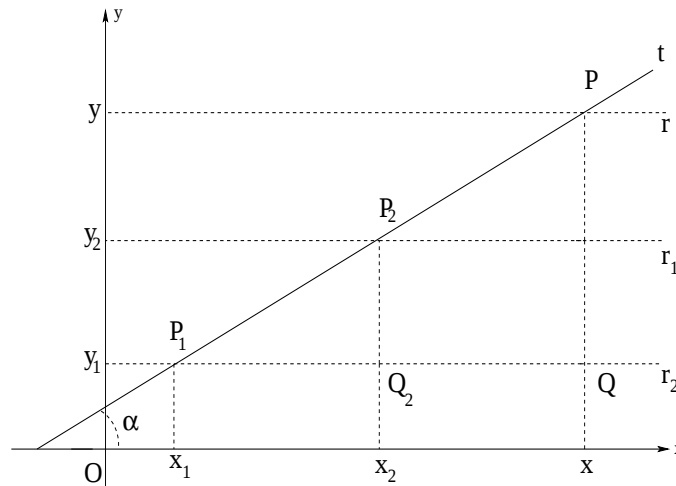
$$(x, y) \in \mathcal{R}_2 \iff y = k.$$

Possiamo anche scrivere $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) : y = k\}$ e dire che $y = k$ è l'equazione della retta esaminata.

Consideriamo ora il caso in cui la retta $\mathcal{R}$ non è parallela agli assi coordinati.

Su $\mathcal{R}$ prendiamo i punti distinti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P = (x, y)$.

Poiché i triangoli rettangoli (vedi figura) $P_1Q_2P_2$ e P_1QP sono simili,



possiamo scrivere:

$$\frac{P_1Q}{PQ} = \frac{P_1Q_2}{P_2Q_2}.$$

Essendo poi

$$P_1Q = x - x_1, \quad PQ = y - y_1, \quad P_1Q_2 = x_2 - x_1, \quad P_2Q_2 = y_2 - y_1,$$

risulta

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad (2.1)$$

ovvero

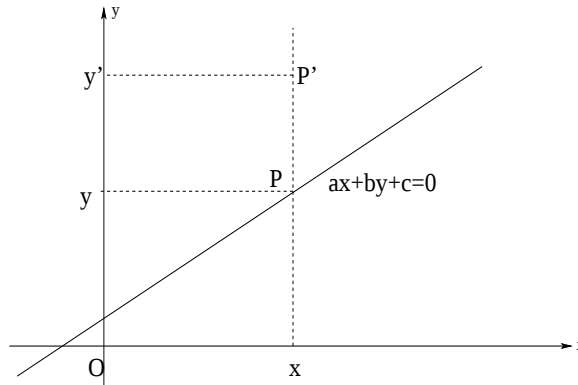
$$x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + x_2y_1 - x_1y_2 = 0;$$

ponendo $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$, $c = x_2y_1 - x_1y_2$, otteniamo l'**equazione della retta**:

$$ax + by + c = 0. \quad (2.2)$$

I punti della retta $\mathcal{R}$ soddisfano quindi l'equazione (2.2), ossia le coordinate di ogni punto di $\mathcal{R}$ sostituite al posto di x, y in (2.2) verificano l'equazione, riducendola ad una identità.

Osserviamo che nelle ipotesi fatte, risulta $a \neq 0, b \neq 0$.
Viceversa, siano $P = (x, y) \in \mathcal{R}$ e $P' = (x, y') \notin \mathcal{R}$, con $y \neq y'$ (vedi figura)



Abbiamo già provato che le coordinate di P verificano l'equazione (2.2): adesso mostriamo che le coordinate di P' non la verificano; basta osservare che

$$y' \neq y \iff by' \neq by \iff ax + by' + c \neq ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + by' + c \neq 0.$$

Analogamente per $P = (x, y) \in \mathcal{R}$ e $P = (x'', y) \notin \mathcal{R}$, con $x \neq x''$. In conclusione,

$P = (x, y) \in \mathcal{R}$ se e solo se le coordinate x, y verificano l'equazione (2.2).

ESEMPIO 40.

Sia R la retta individuata dall'equazione $x - y + 1 = 0$. È evidente che $(2, 3) \in \mathcal{R}$ perché $2 - 3 + 1 = 0$, mentre $(4, 1) \notin \mathcal{R}$ perché $4 - 1 + 1 \neq 0$.

Dall'equazione (2.1) si ricava **l'equazione della retta (non parallela ad alcun asse coordinato) passante per due punti distinti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$** :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2.3)$$

Come abbiamo osservato, nell'equazione (2.2) i coefficienti a e b sono entrambi diversi da 0.

Per $b = 0$ l'equazione (2.2) diventa $x = -\frac{c}{a}$ che, per quanto osservato all'inizio del paragrafo, rappresenta una retta parallela all'asse y ; per $a = 0$ otteniamo invece $y = -\frac{c}{b}$, che rappresenta una retta parallela all'asse x . In conclusione l'equazione (2.2) **rappresenta tutte le rette del piano**, se ammettiamo la possibilità che i coefficienti a e b si annullino (non contemporaneamente).

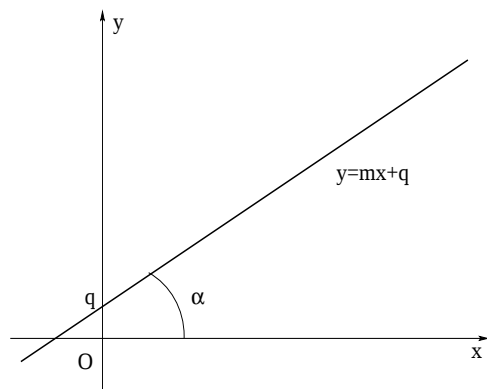
Sia ora $b \neq 0$. ⁽⁴⁾ Da (2.2) si ottiene $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$; posto $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$, otteniamo **l'equazione esplicita della retta**:

$$y = mx + q; \quad (2.4)$$

- q si chiama *termine noto* e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione di $\mathcal{R}$ con l'asse delle y ⁽⁵⁾
- m si chiama *coefficiente angolare* e si dimostra che è legato all'angolo α che la semiretta delle x positive percorre per sovrapporsi ad $\mathcal{R}$ ruotando attorno al punto di intersezione: precisamente, vale $m = \tan \alpha$ (vedi figura successiva).

⁴Quindi, per quanto detto, la retta non può essere parallela all'asse y .

⁵Infatti se in (2.4) prendiamo $x = 0$ otteniamo $y = q$.



A riprova di questa interpretazione, le rette

$$y = mx + q$$

$$y = mx + q'$$

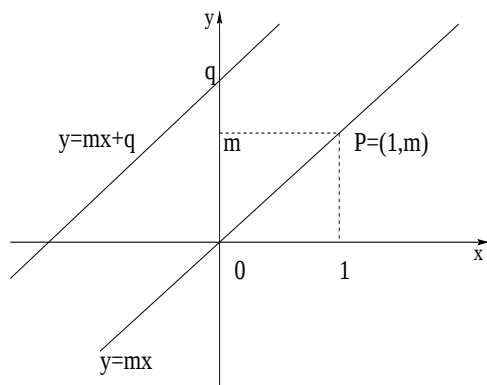
con lo stesso *coefficiente angolare* sono parallele. Infatti il sistema formato dalle due equazioni non ha soluzioni se $q \neq q'$ (le due rette sono parallele in senso stretto), ne ha infinite se $q = q'$ (le due rette sono coincidenti e questo è un caso particolare di rette parallele).

Quindi, data la retta $\mathcal{R}_1$ di equazione $y = mx + q$, la parallela $\mathcal{R}_2$ di equazione $y = mx + q'$ passante per $P = (x_0, y_0)$ ha equazione

$$y - y_0 = m(x - x_0). \quad (2.5)$$

Infatti la retta passa per P perché le coordinate del punto verificano l'equazione; inoltre la retta è parallela ad $\mathcal{R}_1$ perché ha lo stesso coefficiente angolare.

Per capire meglio il significato del *coefficiente angolare* m nell'equazione $y = mx + q$, consideriamo la retta $y = mx$ parallela alla precedente e passante per l'origine: m è l'ordinata del punto sulla retta di ascissa $x = 1$: $P = (1, m)$. Se m è positivo la retta $y = mx$ occupa il primo e terzo quadrante del piano, se m è negativo i rimanenti due.

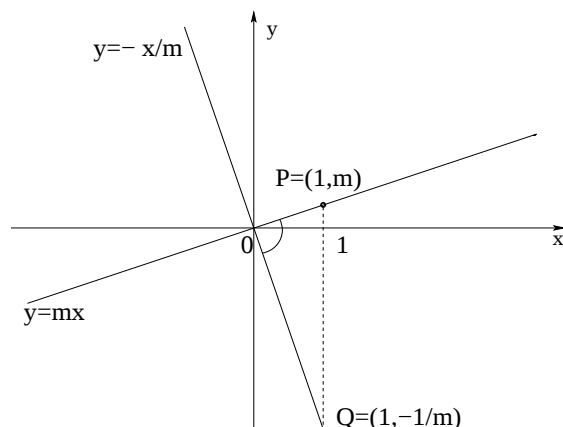


Nel caso di m positivo, all'aumentare di m aumenta l'ordinata del punto P e quindi la retta diventa "più ripida". Analogo discorso nel caso di m negativo: al diminuire di m diminuisce l'ordinata di P e quindi la retta assume una posizione sempre più prossima a quella verticale. Il caso $m = 0$ corrisponde alla posizione orizzontale.

Con considerazioni di carattere geometrico (o utilizzando le formule della trigonometria) si dimostra che, data la retta $\mathcal{R}_1$ di equazione $y = mx + q$, con $m \neq 0$, la perpendicolare $\mathcal{R}_2$ passante per $P = (x_0, y_0)$ ha equazione:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0). \quad (2.6)$$

Infatti poiché le rette $y = mx$, $y = -\frac{1}{m}x$ sono parallele a quelle considerate (e passano per l'origine) basterà provare che queste sono tra loro perpendicolari. Nella figura successiva, $P = (1, m)$, $Q = (1, -\frac{1}{m})$.



Basterà provare che il triangolo OPQ è rettangolo, cioè che è soddisfatta la relazione di Pitagora: $OP^2 + OQ^2 = PQ^2$.

Poiché $OP = \sqrt{1 + m^2}$, $OQ = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}$, $PQ = \left| m + \frac{1}{m} \right|$, la verifica è immediata.

Se $m = 0$, la retta di partenza ha equazione $y = q$ ed è parallela all'asse x : la perpendicolare ad essa passante per $P = (x_0, y_0)$ è parallela all'asse y e la sua equazione è $x = x_0$. Riscrivendo l'equazione della perpendicolare nella forma

$$x - x_0 = -m(y - y_0),$$

si comprendono i due casi.

ESEMPIO 41.

Data la retta $\mathcal{R}$ di equazione

$$y = -3x + 1,$$

determinare la retta $\mathcal{R}_1$ passante per $P_1 = (3, -2)$ e parallela ad $\mathcal{R}$ e la retta $\mathcal{R}_2$ passante per $P_2 = (1, 2)$ e ad essa perpendicolare.

Dalla formula (2.5) sostituendo le coordinate di P_1 e tenendo presente che nel nostro caso $m = -3$, otteniamo l'equazione di $\mathcal{R}_1$:

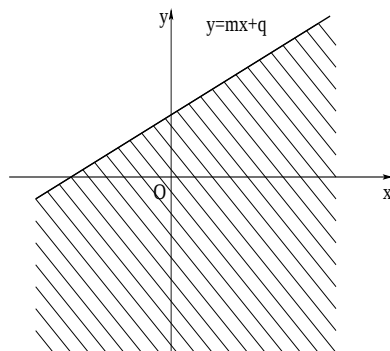
$$y + 2 = -3(x - 3) \iff y = -3x + 7.$$

Dalla formula (2.6), sostituendo le coordinate di P_2 , si ha:

$$y - 2 = -\frac{1}{-3}(x - 1) \iff y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

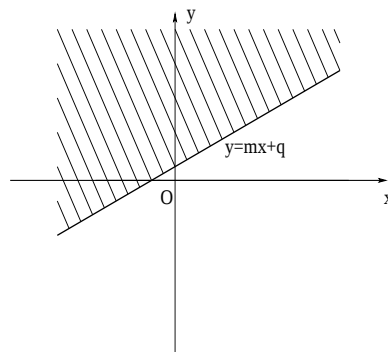
Data la retta $\mathcal{R}$ di equazione $y = mx + q$, per ogni punto $P = (x_0, y_0)$ appartenente a $\mathcal{R}$ risulta $y_0 = mx_0 + q$. I punti appartenenti alla retta $x = x_0$ (parallela all'asse y) hanno ordinata $y > y_0$ se posti al di sopra del punto P , ordinata $y < y_0$ se posti al di sotto. Possiamo quindi descrivere il semipiano al di sotto di $\mathcal{R}$ con la disequazione (vedi figura)

$$y < mx + q,$$



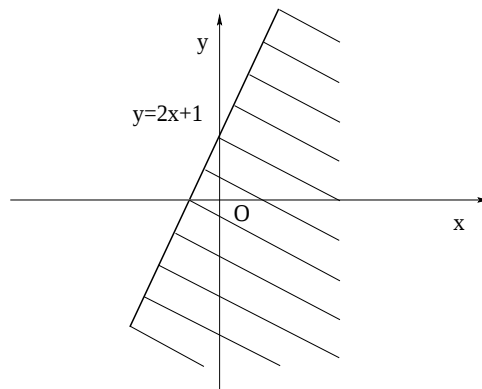
mentre il semipiano posto al di sopra di $\mathcal{R}$ (vedi figura) è descritto dalla disequazione

$$y > mx + q.$$



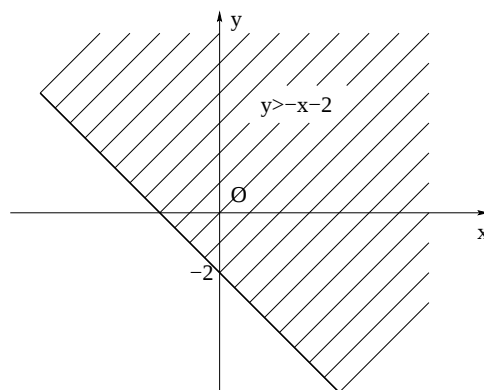
ESEMPIO 42.

Disegnare il semipiano $\{(x, y) : y < 2x + 1\}$



ESEMPIO 43.

Disegnare il semipiano $\{(x, y) : y > -x - 2\}$



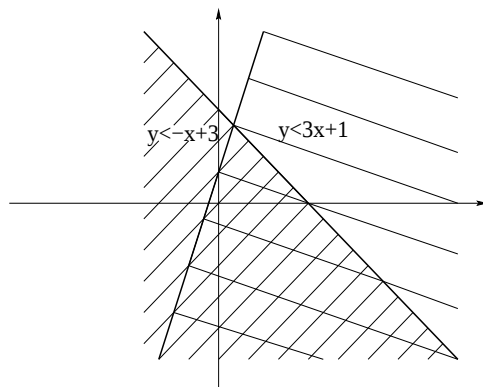
ESEMPIO 44.

Siano

$$\Pi_1 = \{(x, y) : y < 3x + 1\}$$

$$\Pi_2 = \{(x, y) : y < -x + 3\}$$

Disegnare $\Pi_1 \cap \Pi_2$



2.3 Equazione parametrica di un segmento

Siano $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ due punti distinti appartenenti alla retta $\mathcal{R}$ di equazione $y = mx + q$. L'insieme

$$S = \{(x, y) : y = mx + q, x_A \leq x \leq x_B\} \quad (2.7)$$

rappresenta il segmento di estremi A, B appartenente alla retta.

È possibile descrivere il segmento AB in un altro modo. Poiché

$$\alpha < \beta \text{ e } t \in [0, 1] \Rightarrow \alpha \leq t\alpha + (1-t)\beta \leq \beta,$$

posto

$$x_t = tx_A + (1-t)x_B \quad (2.8)$$

$$y_t = ty_A + (1-t)y_B, \quad (2.9)$$

risulta

$$x_A \leq x_t \leq x_B, \quad y_A \leq y_t \leq y_B, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Inoltre si verifica facilmente che $P_t = (x_t, y_t)$ soddisfa l'equazione della retta, ovvero:

$$y_t = mx_t + q. \quad (2.10)$$

Infatti

$$(x_A, y_A) \in \mathcal{R} \iff y_A = mx_A + q, \quad (x_B, y_B) \in \mathcal{R} \iff y_B = mx_B + q.$$

Moltiplicando la prima equazione per t , la seconda per $1-t$ e sommando membro a membro, otteniamo

$$ty_A + (1-t)y_B = m[t x_A + (1-t)x_B] + q,$$

che è appunto la (2.10).

Al sistema

$$\begin{cases} x_t = tx_A + (1-t)x_B \\ y_t = ty_A + (1-t)y_B, \quad t \in [0, 1] \end{cases} \quad (2.11)$$

possiamo dare il nome di rappresentazione in **forma parametrica di un segmento di estremi** $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$.

Osserviamo che (x_t, y_t) soddisfa l'equazione (2.10) indipendentemente dal valore di $t \in \mathbb{R}$. Si dimostra facilmente che *al variare di* $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_t = tx_A + (1-t)x_B \\ y_t = ty_A + (1-t)y_B \end{cases} \quad (2.12)$$

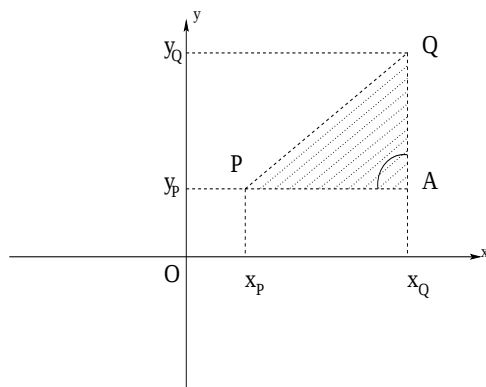
sono tutti e soli i punti della retta passante per A, B ; dunque il sistema (2.12) con $t \in \mathbb{R}$ costituisce la **rappresentazione parametrica della retta passante per i punti A, B** .

2.4 Distanza di due punti

Definiamo *distanza* tra due punti P e Q del piano la *lunghezza* del segmento $\overline{PQ}$; indicheremo questo numero con $d(P, Q)$.

Nel piano cartesiano è possibile calcolare la distanza tra due punti a partire dalle loro coordinate. Se $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$, utilizzando il *Teorema di Pitagora* si ha (vedi figura):

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}. \quad (2.13)$$



La formula della distanza tra due punti permette di descrivere mediante equazioni tutti quei luoghi geometrici del piano definiti mediante una distanza, come circonferenza, ellisse, iperbole. Questo procedimento è sviluppato nei paragrafi seguenti. Completiamo invece il presente paragrafo considerando alcune semplici applicazioni della formula della distanza a problemi riguardanti le rette.

2.5 Asse di un segmento

DEFINIZIONE 9.

*Si definisce **asse di un segmento** l'insieme dei punti del piano equidistanti dai suoi estremi.*

Detti $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ gli estremi del segmento, dalla *definizione* (9) sappiamo che ogni punto P dell'asse deve verificare

$$d(P, A) = d(P, B)$$

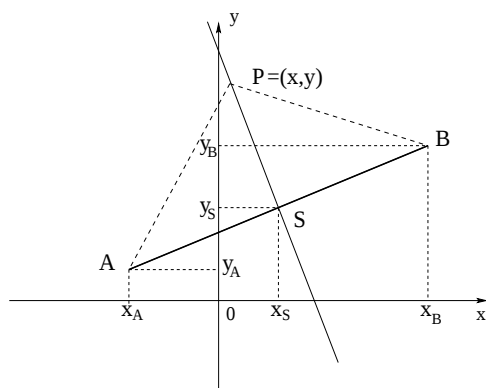
cioè (vedi figura successiva)

$$\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2};$$

elevando al quadrato e semplificando, si ottiene

$$2(x_B - x_A)x + 2(y_B - y_A)y = x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 - y_A^2,$$

che è dunque l'equazione dell'asse.



Una semplice conseguenza della definizione permette di dare una diversa caratterizzazione dell'asse di un segmento:

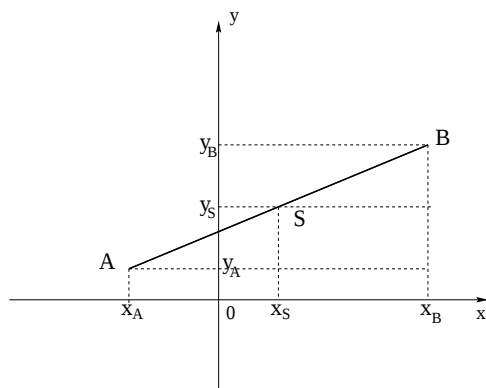
TEOREMA 4.

L'asse di un segmento coincide con la perpendicolare condotta per il suo punto medio.

Esprimiamo le coordinate (x_S, y_S) del *punto medio* S di un segmento in funzione delle coordinate dei suoi estremi:

$$(x_S, y_S) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

(si deduce dal *teorema di Talete* con semplici considerazioni geometriche, vedi figura seguente).



Distinguiamo vari casi.

- Se $x_A = x_B$, l'asse ha equazione $y = \frac{y_A + y_B}{2}$;
- se $y_A = y_B$, l'asse ha equazione $x = \frac{x_A + x_B}{2}$;
- Caso generale. Il coefficiente angolare della retta passante per AB è $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ e dunque quello dell'asse è ⁽⁶⁾ $-\frac{1}{m} = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$.

L'equazione dell'*asse del segmento* AB è dunque

$$y - \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \left(x - \frac{x_B + x_A}{2} \right)$$

ovvero

$$2(x_B - x_A)x + 2(y_B - y_A)y = x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 - y_A^2$$

che ovviamente coincide con l'equazione trovata precedentemente.

2.6 Distanza di un punto da una retta

DEFINIZIONE 10.

La **distanza di un punto da una retta** è la lunghezza del segmento di perpendicolare condotta dal punto alla retta.

Se $P = (x_0, y_0)$ ed r è la retta di equazione $ax + by + c = 0$, la **distanza** $d(P, r)$ di P da r è data da

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (2.14)$$

⁶Si tenga presente la relazione tra il coefficiente angolare di retta e quello della sua perpendicolare.

ESEMPIO 45.

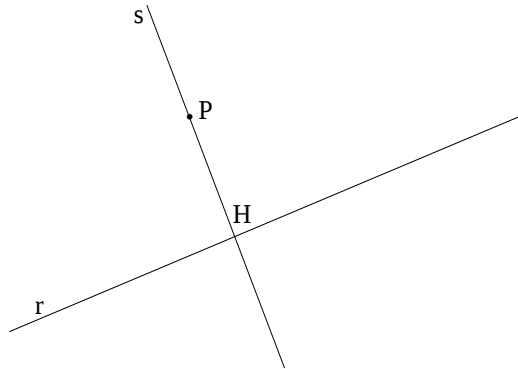
Determinare la distanza del punto $P = (5, 1)$ dalla retta r di equazione $x - 2y + 2 = 0$.

Applichiamo la formula (2.14):

$$d(P, r) = \frac{1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 + 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}.$$

Per giustificare questo risultato osserviamo che la retta s passante per P e *perpendicolare* ad r ha equazione

$$y - 1 = -2(x - 5) \quad \Longleftrightarrow \quad 2x + y - 11 = 0.$$



Determiniamo le coordinate del punto H di intersezione tra s e r risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2x + y - 11 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Dunque

$$d(P, r) = d(P, H) = \sqrt{(5 - 4)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{5}.$$

Il calcolo fatto per l'esempio si ripete nel caso generale, in modo da ottenere la formula della distanza. Infatti, la retta per P *perpendicolare* ad r ha equazione

$$bx - ay = bx_0 - ay_0.$$

Le coordinate di H si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad H = \left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2} \right);$$

la distanza $d(P, r)$ è dunque data da

$$d(P, r) = \sqrt{\left(x_0 - \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2}\right)^2}.$$

Svolgendo i calcoli (che per brevità non riportiamo), si deduce (2.14).

2.7 Equazioni delle bisettrici tra due rette

Siano $r : ax + by + c = 0$ e $r' : a'x + b'y + c' = 0$ le equazioni di due rette non coincidenti che si intersecano in un punto P . Queste individuano due coppie di angoli congruenti opposti al vertice, caratterizzati uno dalla condizione:

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') \geq 0,$$

l'altro dalla condizione

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') \leq 0.$$

Ricordiamo che **le bisettrici sono le due rette passanti per P luogo dei punti equidistanti da r e r'** (vedi figura).

La condizione che un punto $Q = (x, y)$ sia equidistante dalle due rette si traduce nell'equazione

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}},$$

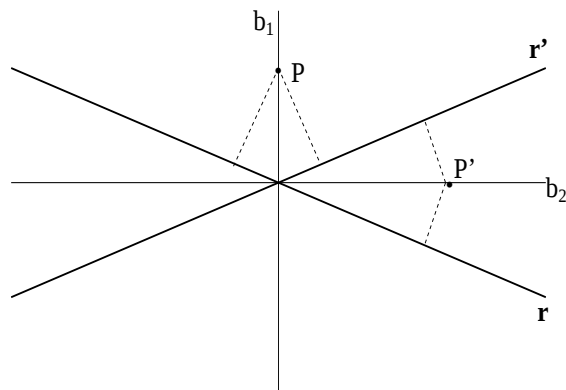
che, togliendo i valori assoluti, dà origine alle due equazioni

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

oppure

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}};$$

queste sono le equazioni delle due bisettrici.



ESEMPIO 46.

Determinare le bisettrici degli angoli formati dalle rette

$$r : y = \frac{1}{2}x + 1 \quad r' : y = 2x - 1.$$

Procedendo come sopra, si trova

$$\frac{|x - 2y + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{5}}$$

da cui

$$x - 2y + 2 = 2x - y - 1 \iff x + y - 3 = 0$$

oppure

$$x - 2y + 2 = -2x + y + 1 \iff 3x - 3y + 1 = 0.$$

2.8 Equazione della circonferenza

DEFINIZIONE 11.

Si definisce **circonferenza** di centro C e raggio r il luogo dei punti del piano che distano r da C .

Siano dunque $C = (x_0, y_0)$ il centro ed $r > 0$ il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$. Per definizione deve essere:

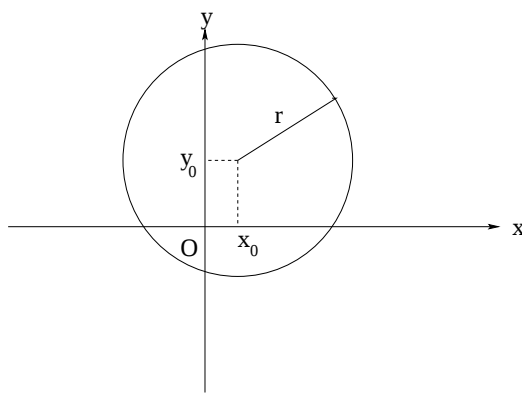
$$\mathcal{C} = \{P : d(P, C) = r\}. \quad (2.15)$$

Se $P = (x, y) \in \mathcal{C}$, utilizzando la formula della distanza (2.13), si ottiene

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r, \quad (2.16)$$

da cui si deduce che i punti di $\mathcal{C}$ devono verificare l'equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (2.17)$$



Svolgendo i calcoli, l'equazione (2.17) può essere riscritta nella forma

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

ovvero

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

se poniamo

$$a = -2x_0, \quad b = -2y_0, \quad c = x_0^2 + y_0^2 - r^2.$$

Viceversa è facile vedere che ⁽⁷⁾

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

rappresenta l'**equazione di una circonferenza** se e solo se

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0. \quad (2.18)$$

Basta infatti riscrivere l'equazione nella forma equivalente

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c;$$

questa è l'equazione della *circonferenza* di centro

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

⁷Si osservi che i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali.

e raggio

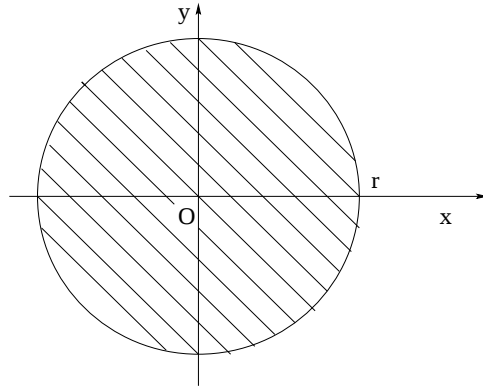
$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

purché sia verificata la disequaglianza (2.18).

Dalla definizione di circonferenza possiamo dedurre che l'insieme

$$\mathbf{C}_i = \{P : d(P, C) < r\} \quad (2.19)$$

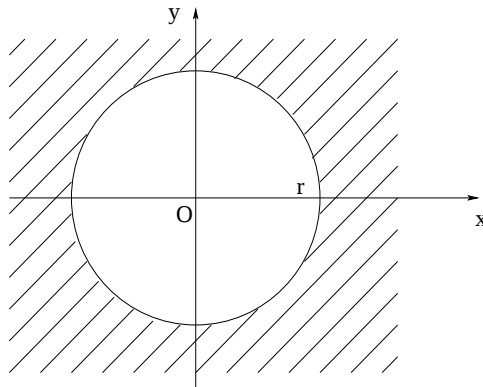
è la parte di piano delimitata dalla circonferenza $\mathcal{C}$ (vedi figura)



mentre l'insieme

$$\mathbf{C}_e = \{P : d(P, C) > r\} \quad (2.20)$$

è la parte di piano esterna alla circonferenza $\mathcal{C}$. (vedi figura).



Utilizzando la formula della distanza (2.13), gli insiemi $\mathbf{C}_i$ e $\mathbf{C}_e$ possono essere descritti mediante disequazioni nel modo seguente:

$$\mathbf{C}_i = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{C}_e = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2\}. \quad (2.22)$$

Un punto $P \in \mathcal{C}_i$ si dice *interno* alla circonferenza $\mathcal{C}_i$, un punto $P \in \mathcal{C}_e$ si dice *esterno* ad essa.

ESEMPIO 47.

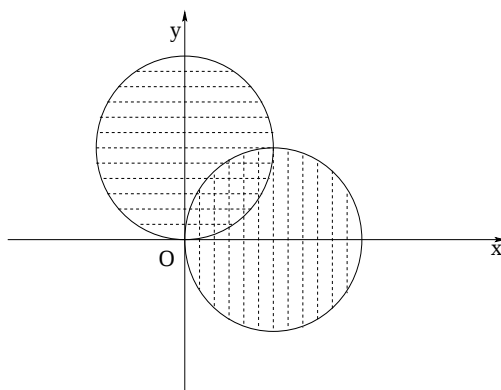
Siano

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 < 1\} \\ \mathbf{C}_2 &= \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 < 1\}. \end{aligned}$$

l'insieme

$$\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$$

è rappresentato nella seguente figura



ESEMPIO 48.

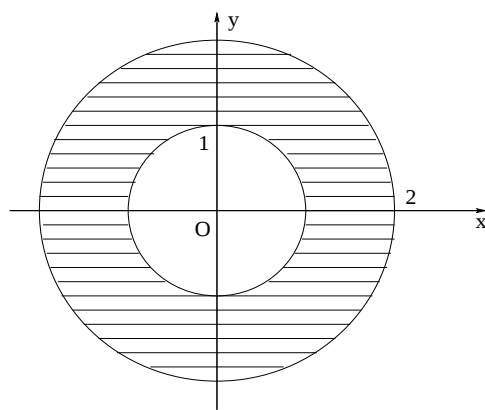
Siano

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\} \\ \mathbf{C}_2 &= \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}, \end{aligned}$$

l'insieme

$$\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$$

è la corona circolare rappresentata in figura



Posizioni di una retta rispetto ad una circonferenza:

- una retta è **secante** una circonferenza se la interseca in due punti distinti
- una retta è **tangente** ad una circonferenza se la interseca in un solo punto
- una retta è **esterna** ad una circonferenza se non la interseca in alcun punto.

Dal punto di vista algebrico, distinguiamo i vari casi confrontando il *raggio* r della circonferenza con la *distanza* d della retta dal centro:

- una retta è **secante** una circonferenza se $d < r$
- una retta è **tangente** ad una circonferenza se $d = r$
- una retta è **esterna** ad una circonferenza se $d > r$.

Consideriamo il sistema, composto dall'equazione della retta e quella della circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio r ,

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione al posto di y (oppure di x) l'espressione ricavata dalla prima, si ottiene un'equazione di secondo grado. Per questa equazione si possono presentare i seguenti casi:

- $\Delta > 0$: il sistema ha due soluzioni distinte e quindi la retta è **secante** la circonferenza;
- $\Delta = 0$: il sistema ha un'unica soluzione e quindi la retta è **tangente** alla circonferenza;
- $\Delta < 0$: il sistema non ha soluzioni e quindi la retta è **esterna** alla circonferenza.

Rette tangenti ad una circonferenza C e passanti per un punto P dato.

- se P è **esterno** alla circonferenza esistono due rette tangenti passanti per il punto
- se P è **sulla circonferenza** esiste una ed una sola retta tangente passante per il punto
- se P è **interno** alla circonferenza non esiste alcuna retta tangente passante per il punto.

Per trovare l'equazione della retta tangente dobbiamo imporre che la generica retta passante per $P = (x_0, y_0)$ abbia distanza r dal centro della circonferenza. In alternativa possiamo considerare il sistema composto dall'equazione di una retta generica passante per P e dall'equazione della circonferenza ed imporre, nell'equazione di secondo grado che si ottiene risolvendolo, che sia $\Delta = 0$.

ESEMPIO 49.

Stabilire la posizione della retta di equazione: $x - 2y - 1 = 0$ rispetto alla circonferenza: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$.

(I metodo)

Mediante le formule viste in precedenza determiniamo il centro C ed il raggio r della circonferenza: $C = (-2, 3)$, $r = \sqrt{17}$ e calcoliamo la distanza del punto C dalla retta data: $d = \frac{9}{\sqrt{5}}$. Essendo $d < r$ si ha che la retta è *secante* la circonferenza.

(II metodo)

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 6y - 4 = 0 \end{cases} \implies 5y^2 + 6y + 1 = 0.$$

In quest'ultima equazione risulta $\Delta > 0$. Sono dunque due le soluzioni e quindi due i punti di intersezione tra retta e circonferenza. Questo secondo metodo permetti di calcolarli: $y_1 = -1$, $y_2 = -\frac{1}{5}$, da cui $A_1 = (-1, -1)$ e $A_2 = (\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$.

ESEMPIO 50.

Data la circonferenza $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$, determinare l'equazione delle rette tangenti passanti per il punto $O = (0, 0)$.

Mediante le formule viste in precedenza calcoliamo le coordinate del centro C ed il raggio r della circonferenza: otteniamo $C = (-3, 1)$, $r = 2$. Osserviamo che essendo $d(O, C) = \sqrt{10} > r$, il punto O è esterno alla circonferenza: ci sono dunque due rette tangenti passanti per il punto.

(I metodo)

Detta $y = mx$ una generica retta s passante per O , imponiamo la condizione che sia tangente: $d(s, C) = r$, ovvero

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \iff |3m + 1| = 2\sqrt{m^2 + 1} \Rightarrow (3m + 1)^2 = m^2 + 1 \Rightarrow 5m^2 + 6m - 3 = 0.$$

Risolvendo, otteniamo i coefficienti angolari delle due rette tangenti: $m_{1,2} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$.

(II metodo)

Consideriamo il sistema composto dalla generica retta r di equazione $y = mx$ passante per O e l'equazione della circonferenza:

$$\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + m^2x^2 + 6x - 2mx + 6 = 0 \iff (1 + m^2)x^2 - 2(m - 3)x + 6 = 0.$$

Poiché

$$\frac{\Delta}{4} = (m - 3)^2 - 6(1 + m^2) = -5m^2 - 6m + 3,$$

imponendo la condizione $\Delta = 0$, otteniamo l'equazione $-5m^2 - 6m + 3 = 0$ e quindi (come già ottenuto con il I metodo): $m_{1,2} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$.

2.9 Equazione dell'ellisse

DEFINIZIONE 12.

Si definisce ellisse il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

Se F_1, F_2 sono i fuochi e P è un qualunque punto dell'ellisse, allora per definizione è verificata l'eguaglianza

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{costante}. \quad (2.23)$$

Nel piano cartesiano l'ellisse può essere rappresentata da un'equazione in x, y utilizzando l'equazione (2.23). Per semplicità consideriamo un'ellisse i cui assi coincidono con gli assi cartesiani; in particolare i fuochi siano posti sull'asse x . Poniamo quindi $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$, $c > 0$ ⁽⁸⁾ e sia $2a$ la costante della definizione (2.23). Se $P = (x, y)$, sostituendo in (2.23) e semplificando, si ottiene: ⁽⁹⁾

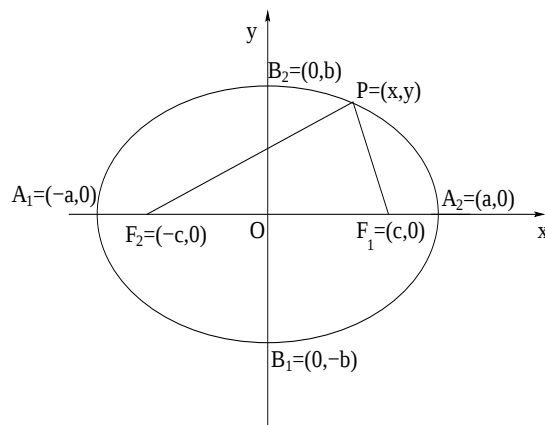
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (2.24)$$

Nella figura sotto, considerando il triangolo F_1PF_2 , si osserva che, per un noto teorema di geometria elementare, ⁽¹⁰⁾ risulta $d(F_1, F_2) < d(F_1, P) + d(F_2, P)$ ovvero $c < a$ e quindi anche $c^2 < a^2$.

⁸Si noti che se $c = 0$ si ottiene una circonferenza.

⁹Tralasciamo di riportare i calcoli che comunque sono facilmente ricostruibili.

¹⁰In un triangolo un lato è minore della somma degli altri due.



Possiamo allora porre $b^2 = a^2 - c^2$, ottenendo l'**equazione dell'ellisse** nella forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.25)$$

In particolare, le intersezioni dell'ellisse con gli assi coordinati sono dati dai punti

$$A_1 = (-a, 0), \quad A_2 = (a, 0), \quad B_1 = (0, -b), \quad B_2 = (0, b)$$

(basta porre alternativamente in (35) $y = 0$, $x = 0$). Questi punti sono detti **vertici dell'ellisse**, mentre i segmenti A_1A_2 (di lunghezza $2a$) e B_1B_2 (di lunghezza $2b$) prendono il nome di **assi dell'ellisse**; in particolare, essendo $a > b$ il primo, è detto *asse maggiore*, l'altro *asse minore*.

Riassumendo, l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{con} \quad a > b > 0,$$

rappresenta l'**equazione dell'ellisse** di fuochi

$$F_1 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) = (-c, 0), \quad F_2 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0) = (c, 0),$$

dove a è la lunghezza del *semiasse maggiore* (orizzontale) e b quella del *semiasse minore* (verticale).

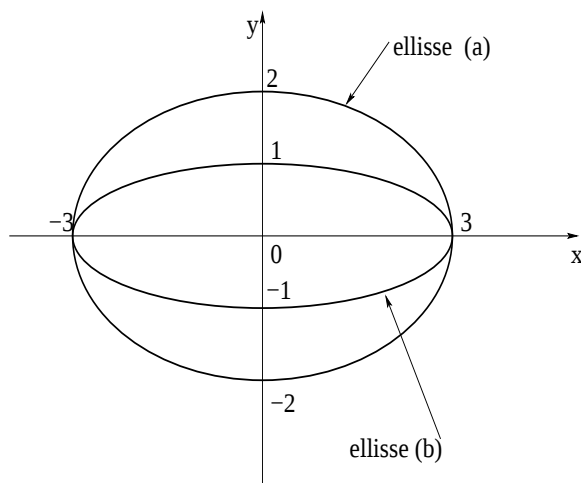
Al rapporto

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

si dà il nome di **eccentricità** dell'ellisse.

L'eccentricità è un numero compreso tra 0 e 1 : vale 0 se $c = 0$, cioè se i fuochi coincidono e l'ellisse degenera in una circonferenza, vale 1 se $c = a$, cioè se i vertici coincidono con i fuochi e l'ellisse degenera nel segmento F_1, F_2 .

Quanto più il rapporto $\frac{b}{a}$ si avvicina a 0, cioè quanto più a è maggiore di b , tanto più l'eccentricità si avvicina a 1. Pertanto l'eccentricità si può assumere come la misura dello " schiacciamento " dell'ellisse sull'asse maggiore.



Ellisse (a): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Ellisse (b): $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, $e = \frac{\sqrt{8}}{3}$

Le orbite dei pianeti del sistema solare, come scoperto da Keplero, ⁽¹¹⁾ sono ellissi di eccentricità molto piccola, sono cioè orbite molto vicine a circonferenze.

L'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

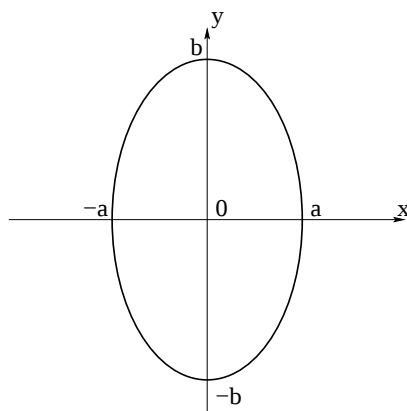
con $b > a > 0$ rappresenta ancora *un'ellisse*, ma con fuochi sull'asse delle y (sostanzialmente si tratta di scambiare x con y nell'equazione già nota):

- $F_1 = (0, -\sqrt{b^2 - a^2})$, $F_2 = (0, \sqrt{b^2 - a^2})$;
- lunghezza del semiasse maggiore (verticale): b ;
- lunghezza del semiasse minore (orizzontale): a .

Per ellissi con fuochi sull'asse y si ripetono le stesse considerazioni sull'eccentricità:

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}};$$

anche in questo caso, il suo avvicinarsi ad 1 indica uno schiacciamento lungo l'asse maggiore che stavolta è quello verticale.



¹¹Johann Kepler (1571-1630), matematico ed astronomo tedesco, oltre a scoprire le leggi del moto dei pianeti dette numerosi contributi allo sviluppo della matematica.

Date un'ellisse ed una retta rispettivamente di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, la posizione reciproca si deduce studiando il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0. \end{cases}$$

Come è stato già visto nel caso della circonferenza, il discriminante dell'equazione risolvente fornisce la risposta:

- per $\Delta > 0$ la retta è **secante**
- per $\Delta = 0$ la retta è **tangente**
- per $\Delta < 0$ la retta è **esterna**.

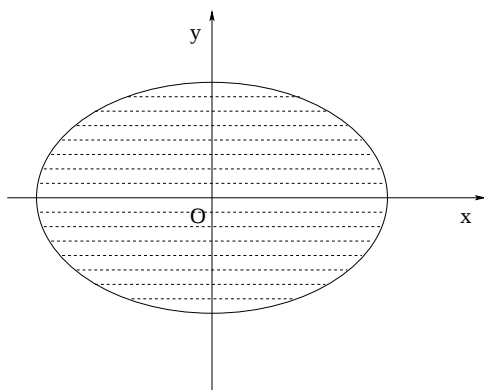
Ne consegue che, per determinare l'equazione della tangente ad un'ellisse in un suo punto oppure le equazioni delle tangenti ad un'ellisse condotte da un punto esterno ad essa, occorre annullare il discriminante dell'equazione risolvente il sistema composto dall'equazione della retta generica passante per il punto dato e l'equazione dell'ellisse. Si può dimostrare (tralasciamo i calcoli) che la retta tangente all'ellisse in un suo punto $P = (x_0, y_0)$ ha equazione

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$

Osserviamo che, se $d(P, F_1) + d(P, F_2) < 2a$, il punto P è posto all'interno della regione del piano delimitata dall'ellisse, mentre se $d(P, F_1) + d(P, F_2) > 2a$ il punto è all'esterno. Quindi la disequazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \quad (2.26)$$

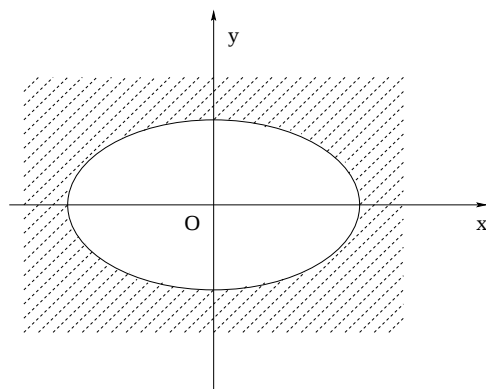
rappresenta la *regione interna all'ellisse* (vedi figura),



mentre la disequazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1 \quad (2.27)$$

rappresenta la *regione esterna all'ellisse* (vedi figura alla pagina successiva).



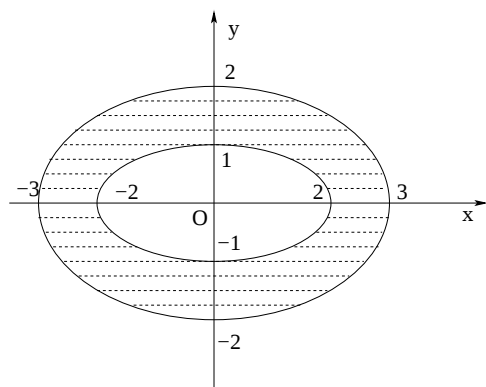
ESEMPIO 51.

Dati

$$E_1 = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + y^2 > 1\} \quad (2.28)$$

$$E_2 = \{(x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1\}, \quad (2.29)$$

rappresentare sul piano cartesiano $E_1 \cap E_2$.



2.10 Equazione dell'iperbole

DEFINIZIONE 13.

Si definisce iperbole il luogo dei punti del piano per cui è costante il valore assoluto della differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

Se F_1, F_2 sono i fuochi e P è un qualunque punto dell'iperbole, allora per definizione è verificata l'eguaglianza

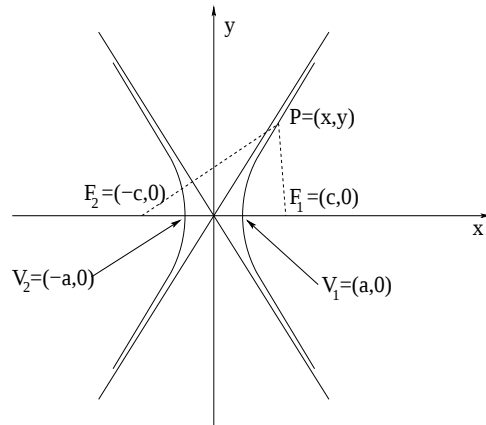
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = \text{costante}. \quad (2.30)$$

Anche l'iperbole può essere rappresentata da un'equazione in x, y , utilizzando l'equazione (2.30). Per semplicità consideriamo un'iperbole i cui fuochi siano sull'asse x nei punti $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$, ($c > 0$) e sia $2a$ la costante della definizione. Se $P = (x, y)$, sostituendo in (2.30) e semplificando, si ottiene (non riportiamo i calcoli intermedi):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \quad (2.31)$$

Nella figura sotto, considerando il triangolo F_1PF_2 , si osserva che, per un noto teorema di geometria elementare,⁽¹²⁾ risulta $d(F_1, F_2) > |d(F_1, P) - d(F_2, P)|$ ovvero $c > a$, e quindi anche $c^2 > a^2$. Possiamo allora porre $b^2 = c^2 - a^2$, ottenendo l'**equazione dell'iperbole** nella sua forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.32)$$



In funzione di a , b , i **fuochi** hanno coordinate

$$F_1 = (\sqrt{a^2 + b^2}, 0), \quad F_2 = (-\sqrt{a^2 + b^2}, 0).$$

L'iperbole interseca l'asse x in due punti detti **vertici dell'iperbole**:

$$V_1 = (a, 0), \quad V_2 = (-a, 0).$$

L'iperbole non interseca invece l'asse y . L'asse x dei fuochi è detto *asse traverso o reale*, l'asse verticale è detto *asse non traverso o immaginario*.

Il sistema

$$\begin{cases} y = mx \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

ha come equazione risolvente

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} \right) = 1.$$

Questa ammette soluzioni solo se

$$\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} > 0$$

cioè

$$-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}.$$

Questo risultato prova che la curva è interamente contenuta nella coppia di angoli delimitati dalle rette di equazione

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Ad esse è dato il nome di **asintoti dell'iperbole**.

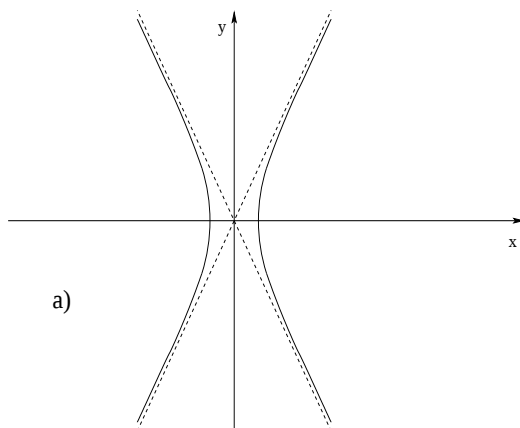
¹²In un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due.

Anche per l'iperbole si definisce l'*eccentricità* e :

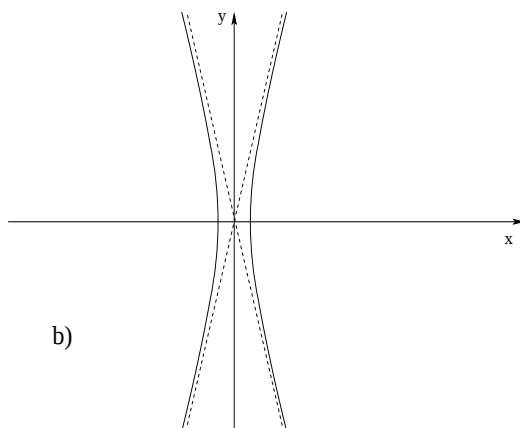
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

In questo caso, però risulta sempre: $e > 1$.

Al crescere di e , cioè al crescere del rapporto $\frac{b}{a}$, la coppia di angoli che racchiude l'iperbole aumenta la sua apertura:



$$a) \quad \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1, \quad e = \sqrt{3}$$



$$b) \quad \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{16} = 1, \quad e = 3$$

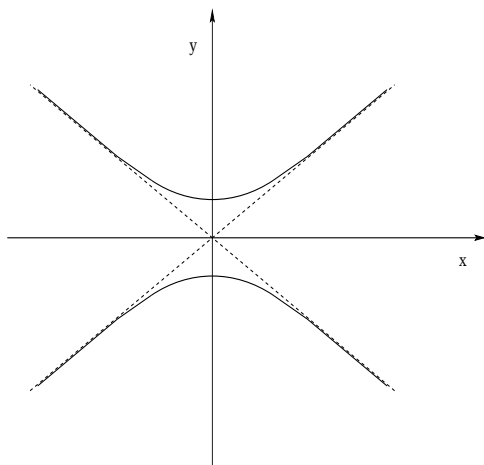
Se scegliamo il riferimento cartesiano in modo che l'asse dei fuochi sia l'asse y , l'equazione dell'iperbole assume la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

In questo caso

- i vertici sono nei punti $(0, \pm b)$,
- i fuochi nei punti $(0, \pm\sqrt{a^2 + b^2})$
- gli asintoti sono le rette $y = \pm \frac{b}{a} x$.

La regione angolare che contiene l'iperbole è ancora delimitata dai due asintoti, ma stavolta è quella “tagliata” dall'asse y .



Un'iperbole si dice **equilatera** se $a = b$: la sua equazione ha dunque la forma

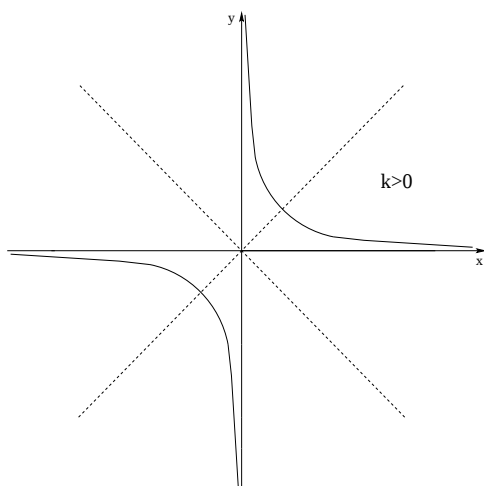
- $x^2 - y^2 = a^2$ se i fuochi sono sull'asse x ,
- $x^2 - y^2 = -a^2$ se i fuochi sono sull'asse y .

Gli asintoti sono le bisettrici dei quadranti, cioè le rette di equazione $y = \pm x$. In questo caso particolare, essendo gli asintoti tra loro perpendicolari (cosa che per le altre iperboli non accade), possiamo anche scegliere il sistema di riferimento in modo da far coincidere gli assi cartesiani con gli asintoti. Si parla in questo caso di iperboli equilatera riferita agli asintoti. La sua equazione si ottiene da quella dell'iperbole $x^2 - y^2 = \pm a^2$ applicando una rotazione di 45° attorno all'origine, in senso orario o antiorario. Si può dimostrare che l'equazione a cui si perviene in entrambi i casi è

$$xy = k,$$

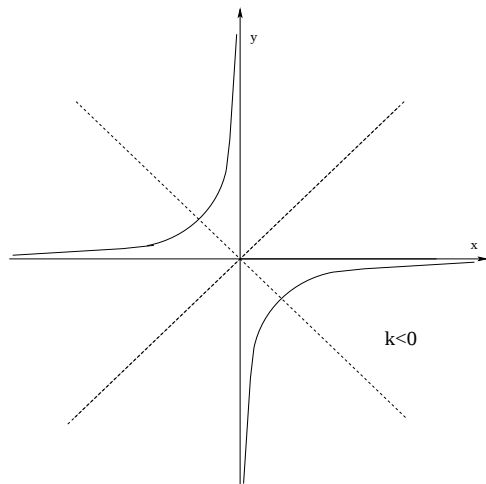
con $k \neq 0$ e $|k| = \frac{a^2}{2}$.

Se $k > 0$, l'iperbole è situata nel primo e terzo quadrante .



I vertici appartengono alla bisettrice di questi quadranti ed hanno coordinate $(-\sqrt{k}, -\sqrt{k})$, $(\sqrt{k}, \sqrt{k})$; i fuochi sono nei punti $(-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$, $(\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$.

Se $k < 0$ l'iperbole è situata nel secondo e quarto quadrante.



I vertici appartengono alla bisettrice di questi quadranti ed hanno coordinate $(-\sqrt{-k}, \sqrt{-k})$, $(\sqrt{-k}, -\sqrt{-k})$; i fuochi sono nei punti $(-\sqrt{-2k}, \sqrt{-2k})$, $(\sqrt{-2k}, -\sqrt{-2k})$. La semidistanza focale è sempre $2\sqrt{|k|}$.

Per quanto riguarda la *posizione reciproca di una retta ed un'iperbole*, si può ripetere quanto già detto in precedenza: si scrive il sistema delle loro equazioni e si considera l'equazione risolvibile, traendo le consuete conclusioni a seconda del *segno del suo discriminante*.

Concludiamo lo studio dell'iperbole accennando alle cosiddette **curve omografiche** di equazione

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

- Per $c = 0$ ⁽¹³⁾ si trova l'equazione di una retta:

$$y = \frac{a}{d} x + \frac{b}{d}.$$

- Per $c \neq 0$, il numeratore ed il denominatore sono proporzionali se $ad - bc = 0$ (infatti l'eguaglianza $ad = bc$ implica che sia $a = kc$ e $b = kd$); in questo caso l'equazione rappresenta la retta orizzontale $y = k$ privata del suo punto di ascissa $-\frac{d}{c}$.
- Per $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$, l'equazione rappresenta un'iperbole equilatera riferita agli asintoti, traslata in modo che essi siano paralleli agli assi, ma in generale non coincidenti con essi. Con semplici manipolazioni algebriche l'equazione si riconduce alla forma

$$y - y_0 = \frac{k}{x - x_0}.$$

che rappresenta appunto un'iperbole equilatera riferita agli asintoti con centro (punto di intersezione degli asintoti) $C = (x_0, y_0)$.

ESEMPIO 52.

Rappresentare sul piano cartesiano la curva di equazione

$$y = \frac{2x - 1}{1 - x}.$$

¹³In questo caso è necessariamente $d \neq 0$, altrimenti l'equazione perde di significato.

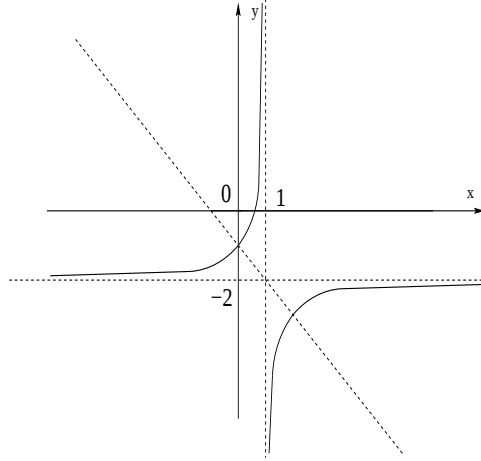
Osserviamo che è

$$y = \frac{2x-1}{1-x} = -2 \frac{\frac{1}{2}-x}{1-x} = -2 \frac{1-x-\frac{1}{2}}{1-x} = -2 + \frac{1}{1-x}.$$

L'iperbole di equazione

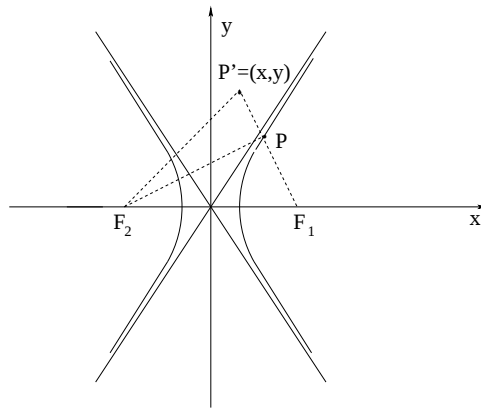
$$y+2 = \frac{1}{1-x}$$

così ottenuta si deduce dall'iperbole equilatera $y = -\frac{1}{x}$ con una traslazione come in figura.



Nella figura seguente consideriamo il triangolo F_2PP' ; poiché $P'F_2 < PP' + F_2P$, si ha:

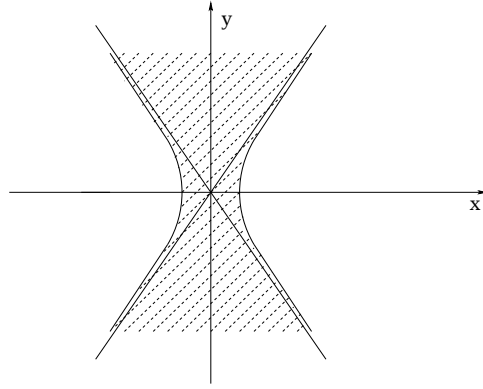
$$|P'F_2 - P'F_1| = (^{14}) P'F_2 - P'F_1 < PP' + F_2P - P'F_1 = PP' + F_2P - (PP' + F_1P) = F_2P - F_1P = 2a.$$



Come conseguenza della precedente osservazione possiamo affermare che P' appartiene alla *parte di piano* delimitata dai due rami dell'iperbole e contenente l'origine (vedi figura successiva) se e solo se $|d(F_1, P') - d(F_2, P')| < 2a$ ovvero se

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1.$$

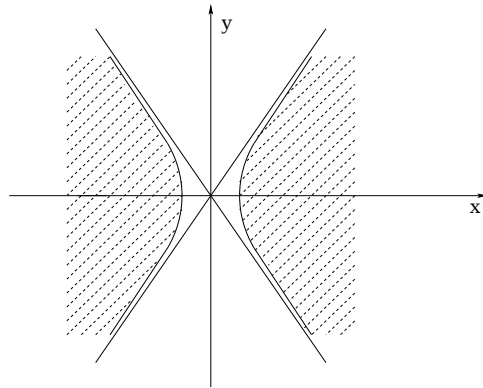
¹⁴Si osservi che la retta delle ordinate è l'asse del segmento F_2F_1 , di conseguenza i punti P' che appartengono al semipiano delle $x > 0$ verificano la relazione $P'F_2 > P'F_1$, mentre quelli che appartengono al semipiano delle $x < 0$ verificano la relazione $P'F_2 < P'F_1$.



Con considerazioni simili a quelle sopra si conclude che P'' appartiene alla parte di piano esterna a quella delimitata dai due rami dell'iperbole se e solo se $|d(F_1, P'') - d(F_2, P'')| > 2a$ ovvero se

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1,$$

caso che si rappresenta nella figura seguente:



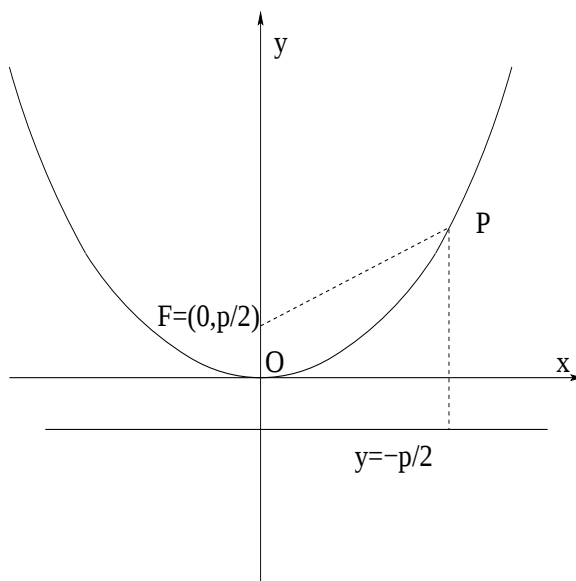
2.11 Equazione della parabola

DEFINIZIONE 14.

Si definisce parabola il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, detto fuoco, e da una retta fissa, detta direttrice.

Se F è il fuoco, P un qualunque punto della parabola ed $\mathcal{R}$ la direttrice, allora la definizione richiede che sia verificata l'eguaglianza

$$d(P, F) = d(P, \mathcal{R}). \quad (2.33)$$



Preso il riferimento cartesiano in modo che risulti $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ ed $\mathcal{R}$ sia la retta di equazione $y = -\frac{p}{2}$ (vedi figura), sostituendo in (2.33) otteniamo l'**equazione della parabola** (tralasciamo di riportare i relativi calcoli):

$$y = \frac{1}{2p} x^2. \quad (2.34)$$

Ponendo $a = \frac{1}{2p}$, l'equazione assume la forma

$$y = a x^2,$$

che si riferisce alla parabola con **fuoco** in

$$F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$$

e **direttrice**

$$y = -\frac{1}{4a}.$$

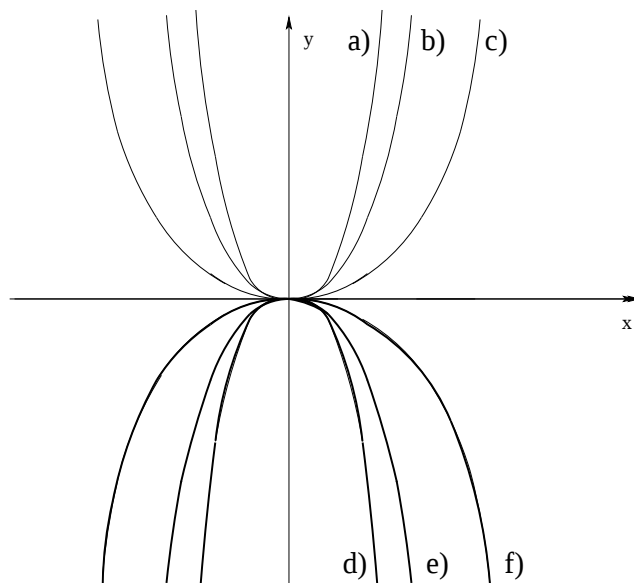
Nel riferimento scelto risulta $a > 0$ e la parabola ha, come in figura, la concavità rivolta verso l'alto.

Per $a < 0$ l'equazione rappresenta ancora una parabola, simmetrica della precedente rispetto all'asse x , cioè con la concavità rivolta verso il basso. Le espressioni del fuoco e della direttrice in funzione di a rimangono invariate.

L'origine rappresenta un punto particolare di questa parabola: innanzitutto è l'unico punto della curva che sta sul suo asse di simmetria ($x = 0$); inoltre è il punto della curva con *ordinata minima* se $a > 0$ e *ordinata massima* se $a < 0$.

Oltre a determinare con il suo segno la concavità della parabola, il valore di a descrive “l'apertura” della curva: al crescere di $|a|$ l'apertura diminuisce, cioè la parabola si schiaccia sull'asse y . In figura sono rappresentate le parabole seguenti:

a) $y = 2x^2$, b) $y = x^2$, c) $y = \frac{1}{2}x^2$ d) $y = -2x^2$, e) $y = -x^2$, f) $y = -\frac{1}{2}x^2$



Studiamo come cambia l'equazione della parabola per traslazione, variando dunque la posizione del fuoco e della direttrice (comunque mantenuta ancora orizzontale). Indicando con (x_0, y_0) le coordinate del punto in cui trasliamo il vertice della parabola $y = ax^2$, l'equazione della parabola traslata assume la forma

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2.$$

Svolgendo i calcoli, otteniamo l'equazione

$$y = ax^2 - 2ax_0x + (y_0 + ax_0^2),$$

che possiamo riscrivere come

$$y = ax^2 + bx + c$$

(si osservi come nella traslazione si conserva il coefficiente a , di cui abbiamo visto il significato geometrico).

Viceversa una qualunque equazione della forma precedente rappresenta una parabola con direttrice orizzontale ovvero con asse di simmetria verticale: è infatti possibile trasformare questa equazione in una della forma $y = ax^2$, che abbiamo dimostrato riferirsi ad una parabola. Operiamo con i seguenti passaggi algebrici:

$$\begin{aligned} y - c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) \\ y - c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} \\ y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2. \end{aligned}$$

Otteniamo un'equazione della forma

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

con

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

che è appunto l'equazione della parabola $y = ax^2$ traslata.

In conclusione, l'equazione

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{con } a \neq 0.$$

rapresenta **una parabola con asse verticale**

$$x = -\frac{b}{2a}$$

e **vertice**

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

(dove $\Delta = b^2 - 4ac$). Il **fuoco** è il traslato del punto $\left(0, \frac{1}{4a} \right)$ e dunque

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a} \right);$$

la **direttrice** è la traslata della retta $y = -\frac{1}{4a}$, cioè

$$y = -\frac{1 + \Delta}{4a}.$$

La parabola è ancora concava verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$.

Si osservi come nel caso $b = c = 0$ (cioè $x_0 = y_0 = 0$) ritroviamo l'equazione di partenza.

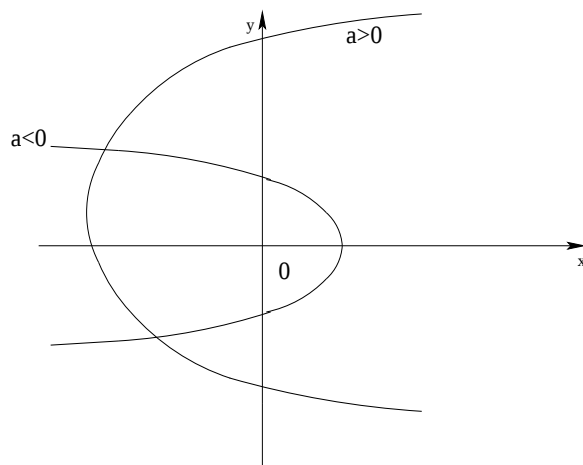
Per una parabola con asse di simmetria orizzontale l'equazione è analoga alla precedente (si scambiano x e y):

$$x = ay^2 + by + c.$$

In questo caso

- l'asse ha equazione $y = -\frac{b}{2a}$
- il vertice è in $V = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right)$
- il fuoco è in $F = \left(\frac{1 - \Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right)$
- la direttrice ha equazione $x = -\frac{1 + \Delta}{4a}$.

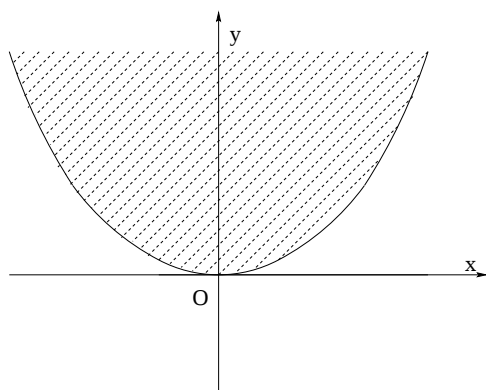
In particolare, se $a > 0$ la parabola volge la concavità nella direzione positiva delle x , se $a < 0$ al contrario (vedi figura).



Per quanto riguarda la posizione reciproca di una parabola ed una retta, valgono le considerazioni già viste a proposito del discriminante dell'equazione risolvente il sistema composto dall'equazione della retta e da quella della parabola.

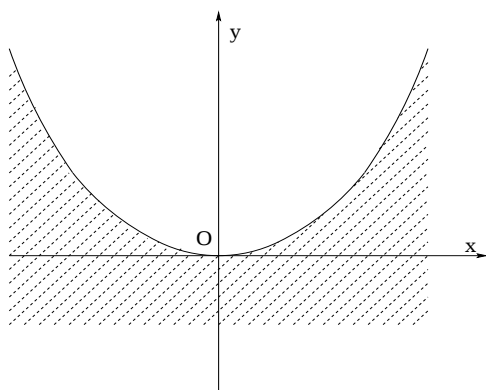
Si verifica facilmente (vedi figura) che la parte di piano posta al di sopra della parabola è individuata dalla disequazione:

$$y > \frac{1}{2p} x^2. \quad (2.35)$$



Mentre la parte di piano posta al di sotto della parabola è individuata dalla disequazione (vedi figura)

$$y < \frac{1}{2p} x^2. \quad (2.36)$$



2.12 Appendice I: punti e assi di simmetria

Nel paragrafo precedente abbiamo parlato di asse di simmetria di una parabola, lasciando volutamente all'intuizione il significato dell'espressione che nel presente paragrafo vogliamo brevemente precisare.

DEFINIZIONE 15.

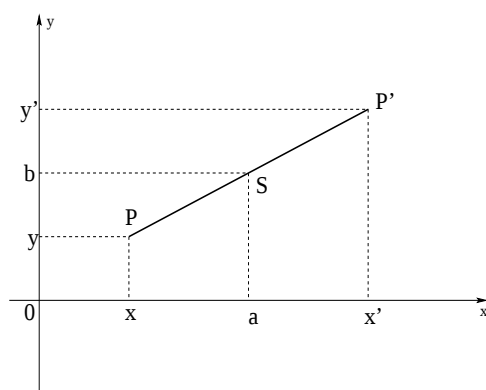
Due punti $P = (x, y)$, $P' = (x', y')$ sono **tra loro simmetrici rispetto ad un punto** $S = (a, b)$, se S è il **punto medio** del segmento PP' ; deve dunque essere:

$$\frac{x + x'}{2} = a, \quad \frac{y + y'}{2} = b$$

ovvero

$$x' = 2a - x, \quad y' = 2b - y.$$

Quest'ultime si dicono equazioni della simmetria rispetto al punto S .

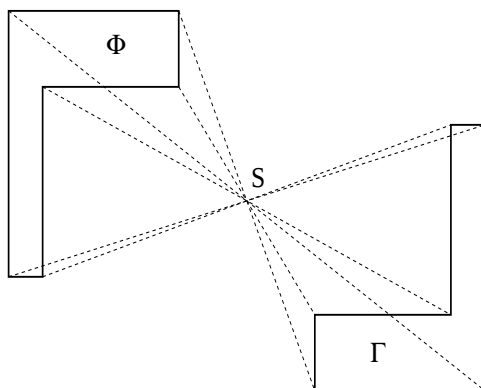


Ad esempio la simmetria rispetto all'origine ha equazioni:

$$x' = -x, \quad y' = -y.$$

DEFINIZIONE 16.

Dati i sottoinsiemi Φ e Γ del piano, diremo che sono **uno simmetrico dell'altro rispetto al punto** S se $\forall P \in \Phi \exists P' \in \Gamma$ che sia simmetrico di P rispetto al punto S , e viceversa.



Nel caso in cui gli insiemi siano determinati mediante equazioni (o disequazioni) la relazione di simmetria tra le figure si traduce in una relazione di equivalenza tra relazioni analitiche. Ad esempio i sottoinsiemi del piano cartesiano:

$$\Phi = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$$

e

$$\Gamma = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$$

sono *simmetrici rispetto al punto S* se per ogni $P = (x, y) \in \Phi$ (quindi tale che $f(x, y) = 0$), esiste un punto $P' = (x', y')$ tale che

- $g(x', y') = 0$ (cioè $(x', y') \in \Gamma$)
- P' è simmetrico di P rispetto a S

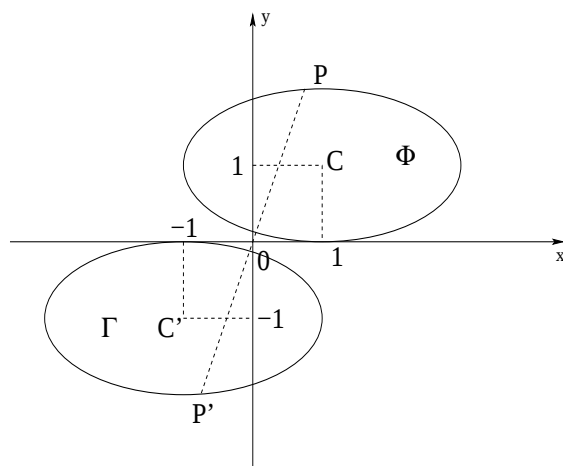
e viceversa.

Ad esempio, sia

$$\Phi = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 1 = 0\}$$

(riscrivendo l'equazione nella forma $(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = 4$, ovvero $\frac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$, si riconosce che la curva è un'ellisse); per *trovare l'equazione della sua simmetrica rispetto all'origine* sostituiamo x con $-x$, y con $-y$; in questo modo troviamo

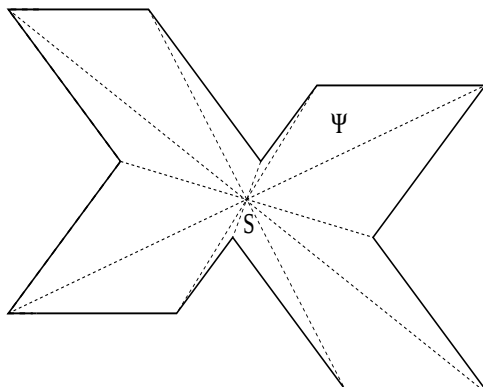
$$\Gamma = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 + 2x + 8y + 1 = 0\}.$$



DEFINIZIONE 17.

Dato un sottoinsieme Ψ del piano diremo che esso è **simmetrico rispetto al punto S** se $\forall P \in \Psi \exists P' \in \Psi$ simmetrico di P rispetto al punto S . In questo caso S si dice **centro di simmetria della figura**.

Il disco $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ è simmetrico rispetto all'origine. Infatti per ogni $P = (x, y) \in D$ il punto $P' = (x', y')$ con $x' = -x$ e $y' = -y$ appartiene a D ed è simmetrico di P rispetto all'origine.



ESEMPIO 53.*Gli insiemi*

- $\{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ (circonferenza di centro l'origine e raggio r)
- $\left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ (ellisse)
- $\left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1\right\}$ (iperbole)

sono simmetrici rispetto all'origine.

DEFINIZIONE 18.

Due punti $P = (x, y)$ e $P' = (x', y')$ sono simmetrici rispetto ad una retta r , se r è l'asse del segmento PP' .¹⁵

Ad esempio: se la retta è verticale, di equazione $x = a$, deve essere

$$x' = 2a - x, \quad y' = y,$$

se la retta è orizzontale di equazione $y = b$,

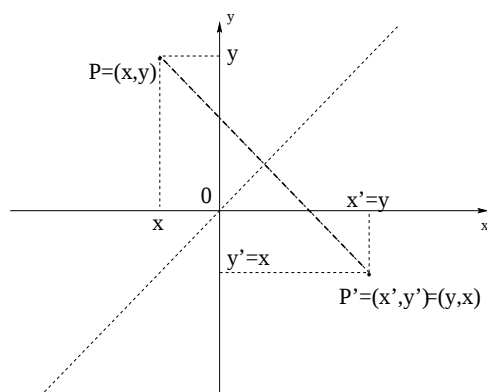
$$x' = x, \quad y' = 2b - y,$$

se la retta ha equazione $y = mx$ si verifica che

$$x' = \frac{x(1 - m^2) + 2my}{1 + m^2}, \quad y' = \frac{2mx + (m^2 - 1)y}{1 + m^2}.$$

In particolare la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ($m=1$) (vedi figura) ha equazione

$$x' = y, \quad y' = x.$$



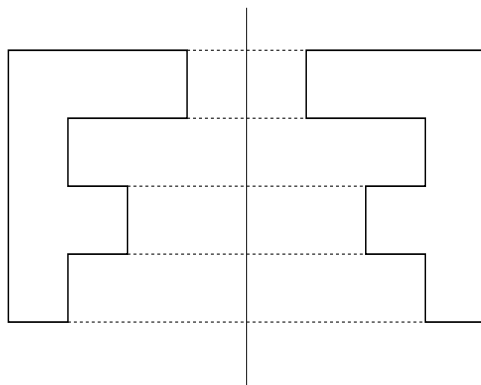
Quella rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante ($m = -1$) ha equazione

$$x' = -y, \quad y' = -x.$$

¹⁵L'asse di un segmento è la perpendicolare condotta ad esso nel suo punto medio.

DEFINIZIONE 19.

Dati i sottoinsiemi Φ e Γ , del piano diremo che sono **uno simmetrico dell'altro rispetto alla retta r** se $\forall P \in \Phi \exists P' \in \Gamma$ simmetrico di P rispetto alla retta r , e viceversa.



Nel caso in cui gli insiemi siano determinati mediante equazioni (o disequazioni) la relazione di simmetria tra le figure si traduce in una relazione di equivalenza tra relazioni analitiche. Ad esempio i sottoinsiemi del piano cartesiano:

$$\Phi = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$$

e

$$\Gamma = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$$

sono *simmetrici rispetto alla retta r* se per ogni $P = (x, y) \in \Phi$ (quindi tale che $f(x, y) = 0$) esiste un punto $P' = (x', y')$ tale che

- $g(x', y') = 0$
- P' è simmetrico di P rispetto a r ,

e viceversa.

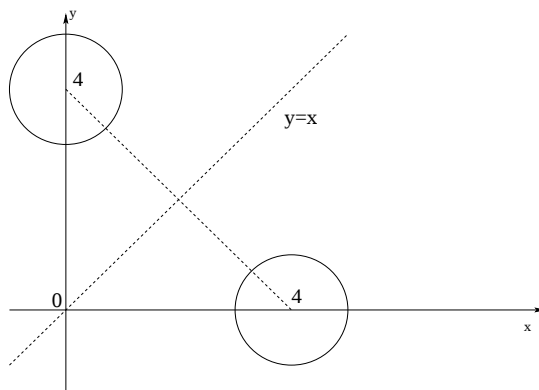
ESEMPIO 54.

Le circonferenze

$$(x - 4)^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + (y - 4)^2 = 1$$

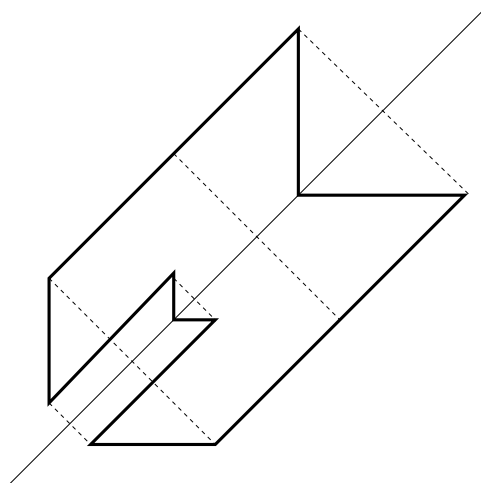
sono simmetriche rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

Infatti basta sostituire le relazioni viste sopra: $x = y'$ e $y = x'$.



DEFINIZIONE 20.

Dato un sottoinsieme Ψ del piano diremo che è **simmetrico rispetto alla retta r** se $\forall P \in \Psi \exists P' \in \Psi$ simmetrico di P rispetto alla retta r . In questo caso r si dice **asse di simmetria della figura**.



ESEMPIO 55.

L'asse di simmetria della figura definita da

$$\Psi = \{(x, y) : xy + 1 = 0\}$$

(iperbole equilatera) è la retta $y = -x$.

Infatti per ogni punto $P \in \Psi$ il punto $P' = (-y, -x)$ (che è il simmetrico di P rispetto alla retta $y = -x$) appartiene a Ψ perché

$$(-y)(-x) + 1 = xy + 1 = 0.$$

Si dimostra che se una curva ha come *assi di simmetria* due rette incidenti in un punto C , allora ammette C come *centro di simmetria*.

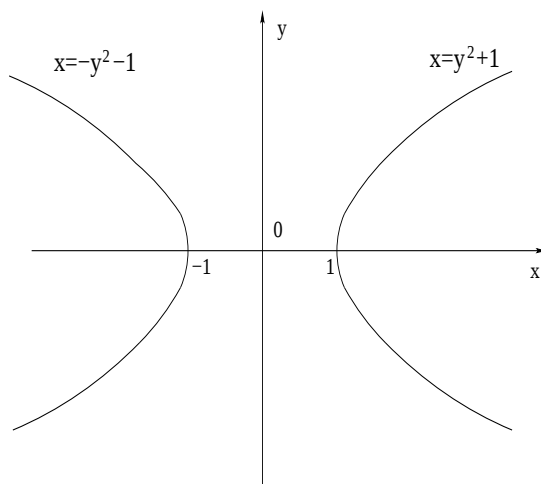
ESEMPIO 56.

Per trovare la simmetrica della parabola di equazione

$$x = y^2 + 1$$

rispetto all'asse y , sostituiamo x con $-x$, lasciando invariata y : l'equazione che si ottiene è

$$x = -y^2 - 1.$$



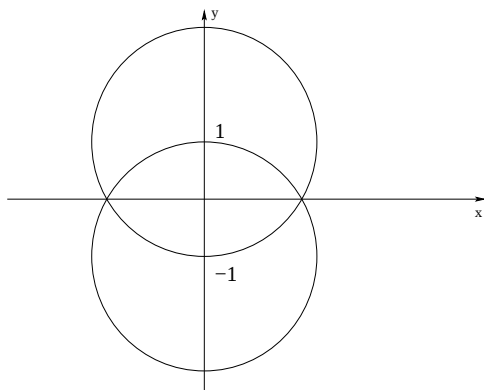
ESEMPIO 57.

Per trovare la simmetrica della circonferenza di equazione

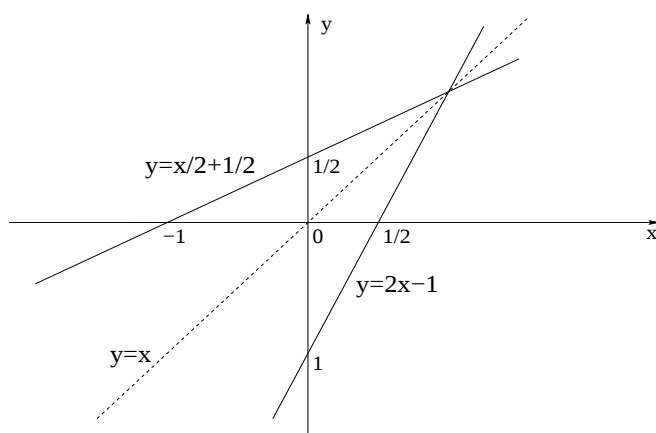
$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$$

rispetto all'asse x , sostituiamo y con $-y$ lasciando invariata x : in questo modo si ottiene l'equazione

$$x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0.$$

**ESEMPIO 58.**

Per trovare la simmetrica della retta $y = 2x - 1$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, scambiamo tra loro x e y , ottenendo $x = 2y - 1$ ovvero $y = \frac{x+1}{2}$.

**ESEMPIO 59.**

La parabola

$$y = 2x^2 - 4x + 3$$

è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = 1$.

Infatti le equazioni della simmetria sono

$$x' = 2 - x, \quad y' = y;$$

sostituendo x con $2 - x$, si ottiene

$$y = 2(2 - x)^2 - 4(2 - x) + 3 = 2x^2 - 4x + 3.$$

Poichè l'equazione è rimasta invariata, la curva ha la simmetria richiesta.

In generale, *ogni parabola* di equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

è *simmetrica* rispetto alla retta verticale

$$x = -\frac{b}{2a}$$

(passante per il suo vertice).

ESEMPIO 60.

La curva di equazione

$$4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 6 = 0$$

ha il punto $C = (2, 3)$ come centro di simmetria.

Infatti possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$4(x - 2)^2 - (y - 3)^2 = 1,$$

ovvero

$$\frac{(x - 2)^2}{\frac{1}{4}} - (y - 3)^2 = 1$$

e si riconosce l'equazione di una iperbole centrata nel punto C .

Per verificare algebricamente l'affermazione, tenendo conto che le equazioni della simmetria rispetto al punto C sono

$$x' = 4 - x, \quad y' = -6 - y,$$

sostituiamo x con $4 - x$, y con $-6 - y$ nell'equazione, ottenendo in questo modo:

$$4(4 - x)^2 - (-6 - y)^2 - 16(4 - x) - 6(-6 - y) + 6 = 0.$$

Sviluppando i calcoli, si ricava l'equazione di partenza: questo prova che la curva data ha il punto C come centro di simmetria.

ESEMPIO 61.

Data la curva di equazione

$$xy - 2x + 3y + 1 = 0$$

dimostare che ammette un centro di simmetria.

Detto $C = (a, b)$ l'eventuale centro, deve essere

$$(2a - x)(2b - y) - 2(2a - x) + 3(2b - y) + 1 = 0$$

cioè

$$4ab - 2bx - 2ay + xy - 4a + 2x + 6b - 3y + 1 = 0.$$

Sostituendo in questa equazione al posto di xy la quantità che si ricava per essa dall'equazione data, si ottiene

$$2(2 - b)x - 2(3 + a)y + 2(2ab - 2a + 3b) = 0.$$

È facile vedere che se scegliamo

$$a = -3, \quad b = 2,$$

l'equazione si riduce ad una identità.

Questo prova che $C = (-3, 2)$ è centro di simmetria.

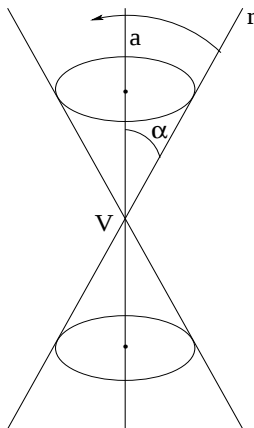
2.13 Appendice II: le sezioni coniche

Consideriamo due rette a ed r , incidenti ma non perpendicolari in un punto V ; facciamo poi ruotare r attorno ad a , lasciando invariato l'angolo α tra le due rette. La superficie descritta da r in questa rotazione si dice **superficie conica** e il solido da essa delimitato **cono circolare retto**. Di questo cono,

- la retta a si dice **asse**
- la retta r **generatrice**
- l'angolo α **apertura**
- il punto V **vertice**.

Sezionando la superficie conica con un piano Γ *non passante per il vertice*, si ottiene una curva (detta conica) che è *un'ellisse, una circonferenza, una parabola o un'iperbole*, a seconda dell'angolo che la retta a forma con il piano, vale a dire l'angolo che a forma con la sua proiezione su Γ . Indichiamo con β quest'angolo. Si ha che:

- se $\beta > \alpha$, cioè se l'inclinazione del piano è maggiore dell'apertura del cono, la curva è **un'ellisse**, che si riduce ad una circonferenza nel caso particolare che $\beta = 90^\circ$, cioè quando il piano è perpendicolare all'asse del cono.
- se $\beta = \alpha$, cioè il piano ha la stessa inclinazione di una generatrice, la curva è una **parabola**.
- se $\beta < \alpha$, cioè il piano ha un'inclinazione minore dell'apertura, la curva è **un'iperbole**.



Se il piano passa per il vertice del cono, qualunque sia la sua inclinazione, si ha una *conica degenera*, che si riduce

- ad un punto se $\beta > \alpha$ (ellisse degenera)
- ad una retta (una generatrice) se $\beta = \alpha$ (parabola degenera)
- ad una coppia di rette (generatrici) se $\beta < \alpha$ (iperbole degenera).

Nei paragrafi precedenti abbiamo dedotto le equazioni di una conica in un sistema di riferimento scelto in modo opportuno, in modo da arrivare alla forma più semplice dell'equazione: in ogni caso siamo arrivati ad un'equazione di secondo grado nelle incognite x, y . Questo risultato si può estendere al caso generale: fissato un sistema di riferimento cartesiano qualunque, una conica ha sempre un'equazione della forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

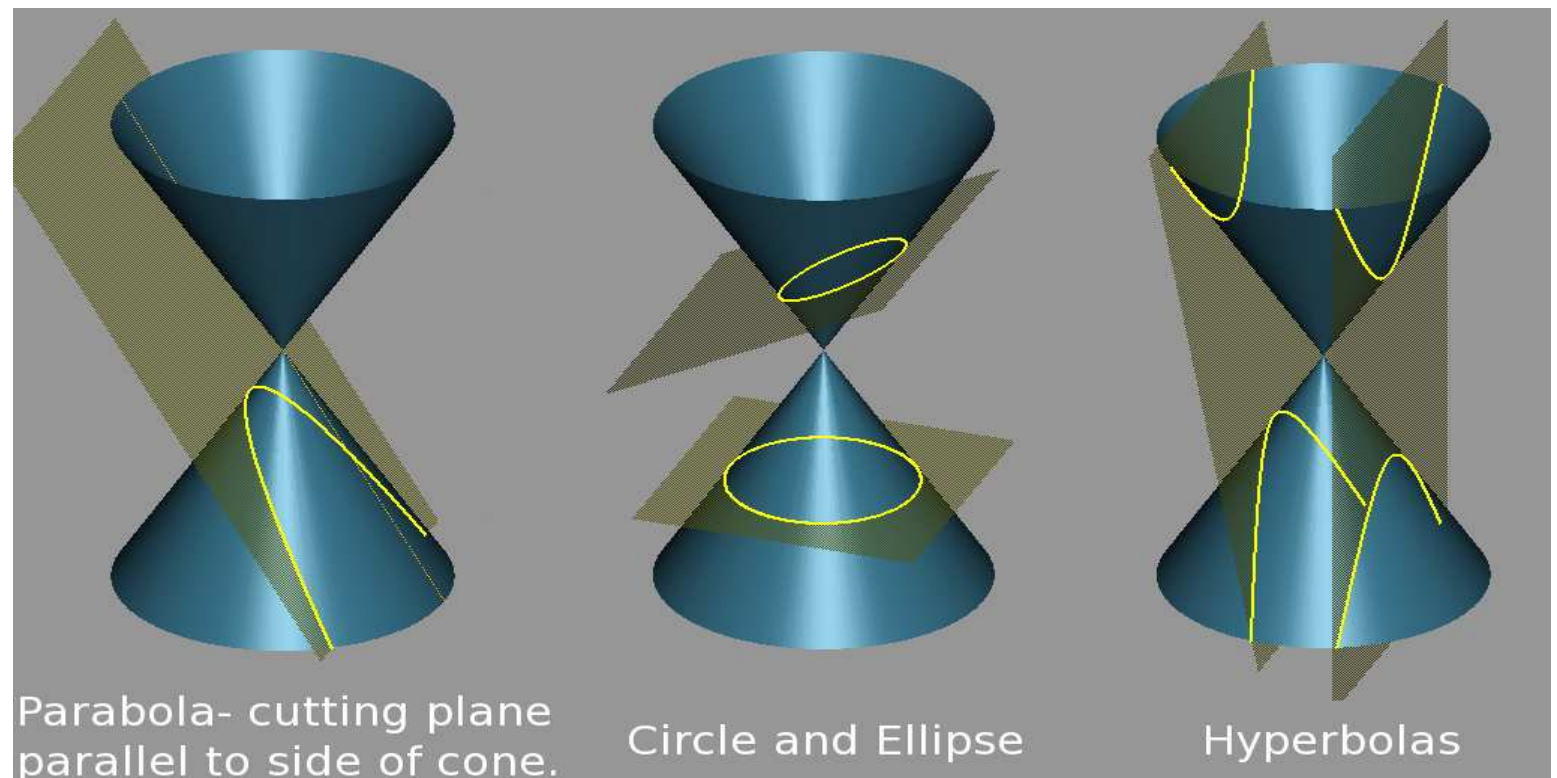
con a, b, c non contemporaneamente nulli.

Viceversa, ogni equazione di secondo grado nelle incognite x, y rappresenta sempre una conica (eventualmente degenera). In particolare si dimostra che la conica è

- un'ellisse (eventualmente degenera) se $b^2 - 4ac < 0$
- una parabola (eventualmente degenera) se $b^2 - 4ac = 0$
- un'iperbole (eventualmente degenera) se $b^2 - 4ac > 0$.

La dimostrazione e l'applicazione di questi risultati esulano dallo scopo del presente libro.

Ottenimento delle sezioni coniche.



Capitolo 3

FUNZIONI

3.1 Generalità sulle funzioni

Quando si affronta lo studio di un argomento in cui si quantificano dei fenomeni o degli oggetti, ci troviamo di fronte ad opportune grandezze: alcune conservano sempre lo stesso valore e sono perciò dette *costanti*, altre possono assumere un numero finito o infinito di valori e sono dette *variabili*. Ad esempio è costante la velocità della luce nel vuoto, mentre è variabile la popolazione della Terra. Comunemente le costanti si indicano con le prime lettere dell'alfabeto: $a, b, c, \dots$, le variabili con le ultime $x, y, z, \dots$.

Nello studio di un fenomeno siamo portati a stabilire una relazione tra le variabili che vi compaiono. In particolare può accadere che una prima grandezza (che in generale indicheremo con y) dipenda da una seconda (indicata con x) nel senso che il valore di y è univocamente determinato non appena è assegnato quello di x . In questo caso diremo che tra la variabile dipendente y e la variabile indipendente x esiste un legame di tipo funzionale ovvero che y è funzione di x ; con notazione standard scriveremo $y = f(x)$.¹

Ad esempio, l'area del cerchio è funzione del raggio, nel senso che il valore dell'area è noto non appena si conosce quello del raggio, utilizzando la relazione $y = \pi x^2$. Analogamente, la popolazione della Terra varia con il variare degli anni secondo una relazione funzionale che però, a differenza dell'esempio precedente, non si esprime secondo una ben precisa formula analitica.

In generale alla variabile indipendente x non possiamo assegnare valori arbitrari; ad esempio, nel caso dell'area del cerchio, x (raggio) può solo assumere valori positivi, mentre nel caso della popolazione della Terra, x (anni) può solo assumere particolari valori naturali.

Analogamente anche i valori assunti dalla *variabile* y variano in un insieme opportuno.

DEFINIZIONE 21. ⁽²⁾

La variabile y si dice *funzione della variabile* x *definita nell'insieme* A , se esiste una legge che faccia corrispondere ad ogni valore di $x \in A$ uno ed un solo valore di y appartenente ad un opportuno insieme B .

Per indicare che y è una funzione della variabile x , si usa comunemente una notazione della forma $y = f(x)$.

Per indicare una funzione, useremo le notazioni

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{oppure} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

La definizione di funzione si può riassumere in simboli nella forma

$$\forall x \in A \exists_1 y \in B : y = f(x).$$

DEFINIZIONE 22.

L'insieme A dei valori che possono essere assegnati alla variabile indipendente x perchè esista il corrispondente (unico) valore di y , si dice **dominio** della funzione (lo indicheremo anche con $\text{Dom } f$); l'insieme B in cui la variabile y assume in corrispondenza i propri valori si dice **codominio**.

¹La notazione $y = f(x)$ è dovuta ad Eulero.

²Questa definizione è attribuita al matematico tedesco Peter G. L. Dirichlet(1805-1859).

La legge che definisce una funzione può essere di natura qualsiasi: **l'unica condizione che deve soddisfare è che ad ogni valore di x nel dominio corrisponda uno ed un solo valore di y nel codominio**. Quando il passaggio dalla variabile x alla variabile y avviene tramite un complesso di operazioni matematiche ben definite (somme, prodotti, radici, ecc.) si dice che la funzione è data mediante un'espressione analitica, ovvero che è esprimibile in forma analitica. Per questo tipo di funzioni è quindi necessario che sia $A \subset \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$:⁽³⁾ parleremo a questo proposito di funzioni reali di una variabile reale e saranno queste le funzioni di cui ci occuperemo nel libro. Si osservi però che anche nel caso numerico la definizione di funzione non richiede affatto l'esistenza di un'espressione analitica, si pensi ad esempio alla variazione della popolazione terrestre al variare degli anni. In generale, le funzioni che si incontrano nello studio dei fenomeni naturali si presentano definite sperimentalmente, nel senso che il valore di y può essere dedotto da quello assegnato ad x solo attraverso una misura diretta. Si parla a questo proposito di funzioni empiriche. In questo capitolo considereremo solo funzioni definite su sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$. Nel caso in cui la funzione sia definita analiticamente, si dice **campo di esistenza** l'insieme sul quale ha senso effettuare le operazioni che definiscono la funzione, cioè l'insieme più ampio sul quale ha senso definire la funzione.

OSSERVAZIONE 7.

Il dominio di una funzione è necessariamente un sottoinsieme del campo di esistenza; quando non è esplicitamente indicato, si sottointende che il dominio coincida con il campo di esistenza. Ogni altra scelta deve essere dichiarata.

Ad esempio per la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, si sottointende che il campo di esistenza sia $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; se interessa studiarla in un sottoinsieme di tale campo (ad esempio per le $x > 0$), il dominio scelto deve essere indicato esplicitamente.

ESEMPIO 62.

Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni.

1. $f_1(x) = 4x^5 - 7x^2 + x - 9$

2. $f_2(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

3. $f_3(x) = \sqrt{x - 2}$

4. $f_4(x) = \sqrt{-x^2 - 1}$

Soluzioni.

1. Il campo di esistenza è dato da $\mathbb{R}$. Infatti l'espressione analitica che definisce f_1 è costituita solo da somme, prodotti e sottrazioni che sono definite per qualunque valore della variabile x .
2. Il campo di esistenza di f_2 è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, perchè nell'espressione che definisce f_2 compare un rapporto che ha senso solo se il denominatore è diverso da 0.
3. Il campo di esistenza di f_3 è $\{x : x \geq 2\}$, perchè la radice quadrata ha senso solo se il radicando è non negativo (maggiore o uguale a zero); deve essere quindi $x - 2 \geq 0$ ovvero $x \geq 2$.
4. Il campo di esistenza di f_4 è $\emptyset$, ovvero la funzione non è definita per alcun valore di x . Infatti il termine sotto la radice quadrata è sempre negativo: $\forall x \in \mathbb{R} : -x^2 - 1 < 0$.

Si osservi che la definizione *analitica* di una funzione non è necessariamente la stessa in tutto il campo di esistenza: si possono cioè avere quelle che si chiamano *funzioni definite a tratti*, di cui daremo di seguito alcuni esempi.

³Nel senso che A deve essere contenuto in insiemi in cui tali operazioni siano definite.

ESEMPIO 63.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x - 1 & \text{se } x > 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \\ x - 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 64.

La funzione segno di x

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 65.

La funzione parte intera di x ⁽⁴⁾

$$[x] = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ n & \text{se } n < x < n + 1, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ESEMPIO 66.

Funzione caratteristica di un insieme $I \subset \mathbb{R}$

$$f_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I \\ 0 & \text{se } x \notin I \end{cases}$$

DEFINIZIONE 23.

L'insieme dei valori assunti dalla funzione al variare di x in A si dice **immagine** della funzione (indicheremo questo insieme con $f(A)$ oppure $\operatorname{Im} f$):

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \quad \text{oppure} \quad f(A) = \{y = f(x), x \in A\}.$$

In taluni casi è utile indicare esplicitamente l'immagine di una funzione in luogo del codominio e quindi scrivere $f : A \rightarrow f(A)$. Mentre il cambiamento del dominio modifica essenzialmente la funzione (ad esempio $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, è una funzione diversa da $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$), la sostituzione del codominio con l'immagine non modifica la funzione.

OSSERVAZIONE 8.

Come conseguenza di questa definizione, determinare l'immagine di una funzione significa determinare per quali valori del parametro y l'equazione $f(x) = y$ ha soluzione $x \in A$.

ESEMPIO 67.

Determinare l'immagine della funzione $f(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Dobbiamo determinare per quali valori del parametro y l'equazione $y = x^2 - 1$ ha soluzioni in $\mathbb{R}$. Riscritta l'equazione nella forma $x^2 = y + 1$, troviamo subito che ammette le soluzioni $x = \pm\sqrt{y + 1}$ purché sia $y + 1 \geq 0$, cioè $y \geq -1$. In conclusione l'immagine della funzione è l'insieme $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\} = [-1, +\infty)$.

⁴La funzione parte intera di x si può anche definire come il più grande intero che precede x . Oppure, esprimendo ogni $x \in \mathbb{R}$ come $x = n + r$ con $n \in \mathbb{Z}$ e $r \in [0, 1)$, si può scrivere $[x] = n$. Per esempio $[2] = 2$, $[0,333] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-2,38591] = -3$.

ESEMPIO 68.

Determinare l'immagine della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

L'equazione $\frac{1}{x} = y$ ammette la soluzione $x = \frac{1}{y}$ purché sia $y \neq 0$ e quindi l'immagine della funzione è l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ESEMPIO 69.

Determinare l'immagine della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

L'equazione $\frac{1}{x} = y$, ammette la soluzione $x = \frac{1}{y}$, purché questa appartenga al dominio della funzione; deve dunque essere $\frac{1}{y} > 0$ (cioè $y > 0$) e dunque l'immagine della funzione è l'insieme $(0, +\infty)$.

Ovviamente per la maggior parte delle funzioni il problema di individuare $f(A)$ non risulta così banale e richiede degli strumenti più raffinati che sono forniti dall'Analisi Matematica.

3.2 Grafico di una funzione

DEFINIZIONE 24.

Grafico di una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è il sottoinsieme Γ del piano cartesiano definito da

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}.$$

Poiché il grafico di una funzione è un sottoinsieme del piano cartesiano, una sua rappresentazione può dare un'idea dell'andamento della funzione. A questo punto si pongono due domande:

1. Tutte le funzioni hanno un grafico che può essere "disegnato" su di un piano cartesiano?
2. Quali strumenti ci permettono di "disegnare" il grafico su di un piano?

La risposta alla prima domanda è **no**. Non tutte le funzioni hanno un grafico che può essere *disegnato* sul piano cartesiano, come si vede dal seguente esempio.

ESEMPIO 70.

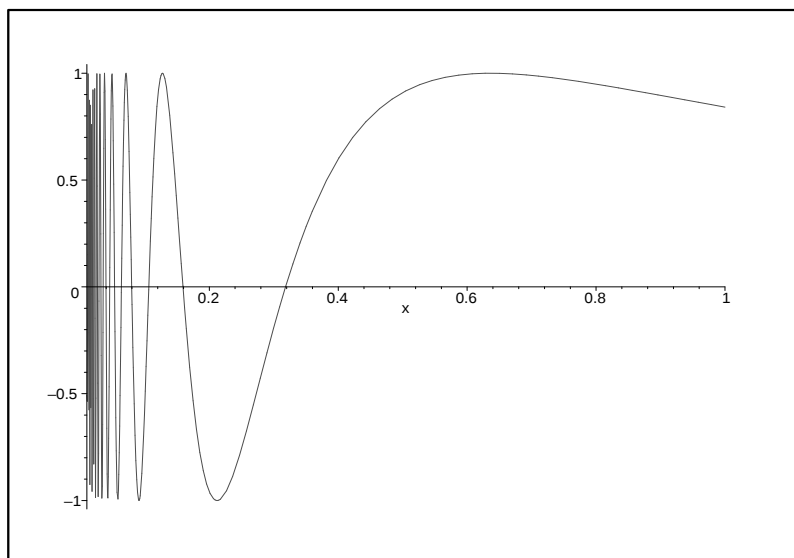
La funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è un numero razionale} \\ 1 & \text{se } x \text{ è un numero irrazionale} \end{cases}$$

Per disegnare il grafico di questa funzione dovremmo riuscire a disegnare gli infiniti punti che cadono sulla retta $y = 0$ in corrispondenza dei numeri razionali e sulla retta $y = 1$ in corrispondenza degli irrazionali; occorrerebbe, cioè, saper separare graficamente i numeri razionali da quelli irrazionali, cosa evidentemente impossibile.

Per quanto riguarda la seconda domanda, possiamo affermare che ci sono molti metodi che ci permettono di dare una rappresentazione del grafico di una funzione su di un piano. Il più efficace consiste nel servirsi di un computer (o una buona calcolatrice scientifica). Ad esempio molti dei grafici riportati su questo libro sono ottenuti mediante l'uso del programma MAPLE su di un normale PC.

Ovviamente intraprendendo questo strada, bisogna tener presente che non sempre il computer riesce a rappresentare la funzione richiesta in modo chiaro. In ogni caso avendo a priori un'idea almeno approssimata di come debba essere il grafico, si possono dare delle istruzioni opportune per avere una figura "leggibile" (la figura sotto mostra il grafico della funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $0,01 < x < 1$).



Sono necessari dunque degli strumenti matematici che ci permettano di avere un'idea dell'andamento della funzione prima di utilizzare il computer.

In ordine crescente di difficoltà e di efficacia, possiamo elencare:

- la costruzione per punti: si tratta di determinare i punti del grafico della funzione da riportare nel piano cartesiano ed unirli successivamente con un segmento. Ovviamente maggiore è il numero di punti calcolato migliore risulterà la precisione del grafico ottenuto.
- la lettura e l'interpretazione dell'espressione analitica di f : molte funzioni sono definite da un'espressione analitica composta da funzioni notevoli legate tra loro da operazioni elementari. Analizzando come queste operazioni trasformano il grafico delle funzioni notevoli che compongono l'espressione si deduce il grafico della funzione data.
- il calcolo di limiti e derivate (ovvero l'Analisi Matematica).

L'ultimo punto è ovviamente quello più importante ed esauriente. Si tenga anche presente che le tecniche dell'Analisi Matematica sono la base anche dei programmi che permettono ad un computer di tracciare il grafico di una funzione. Per quanto riguarda la lettura e l'interpretazione analitica di una funzione vedremo più avanti di che cosa si tratta. Per adesso diamo un esempio della costruzione del grafico di una funzione per punti.

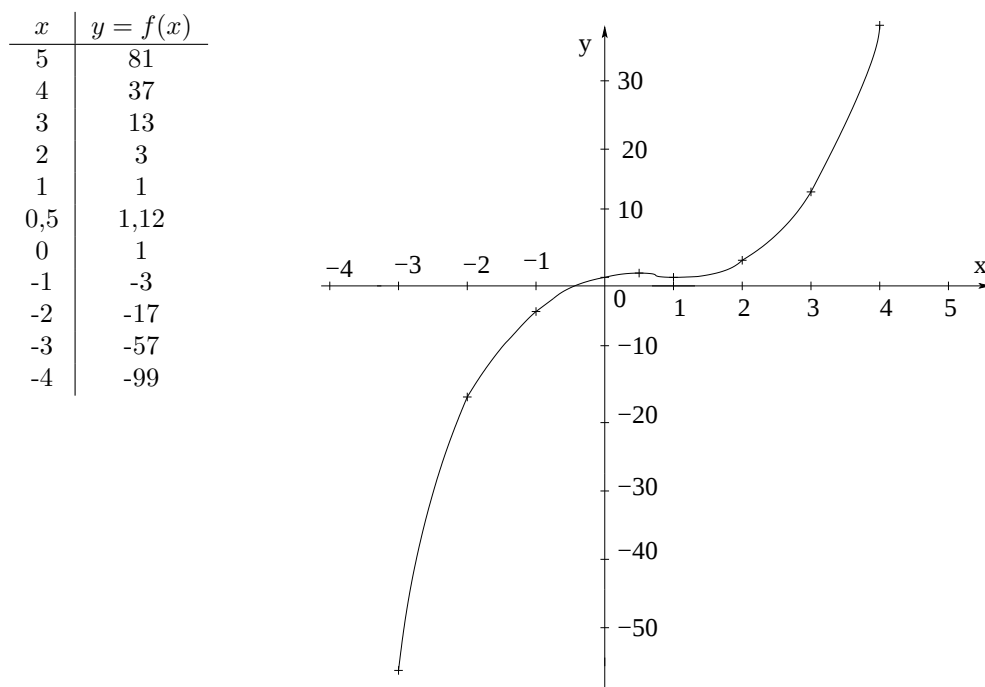
ESEMPIO 71.

Tracciare il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

Si procede assegnando alla variabile x un certo numero di valori e calcolando il corrispondente valore assunto da $f(x)$. Ad esempio nell'espressione analitica di f , assegnando il valore $x = 0$, si ha $f(0) = 1$. Di conseguenza $(0, 1)$ è un punto del piano cartesiano appartenente al grafico che stiamo cercando di disegnare. È chiaro che, fissato un intervallo sul quale si vuole rappresentare la curva, maggiore è il numero di punti che si considerano, maggiore risulta la precisione del grafico che rappresenta f .

Si procede compilando una tabella e riportando poi i valori nel piano cartesiano (vedi figura).

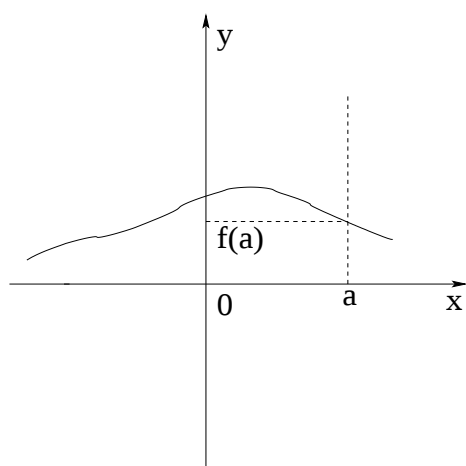
Come ultimo passo si uniscono questi punti con un *arco di curva abbastanza “regolare”*, come in figura. Per convincerci che questi archi non hanno un comportamento “selvaggio” potremmo disegnare un numero maggiore di punti, più vicini tra loro. In realtà, solo i metodi del calcolo differenziale possono dare una spiegazione esauriente.



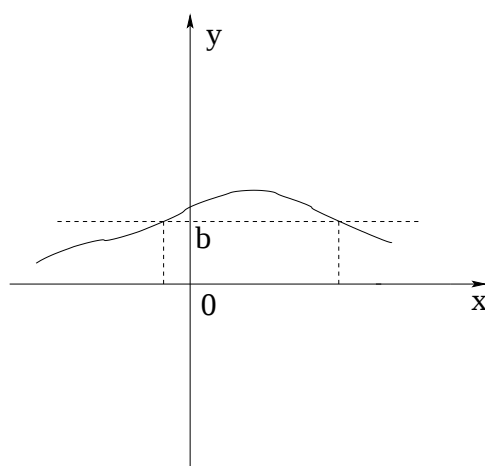
Il grafico di una funzione permette di dedurne le principali proprietà.

Ad esempio, considerando una retta verticale di equazione $x = a$: questa interseca il grafico (e per definizione di funzione lo interseca in un solo punto) se e solo se $a \in \text{Dom } f$. In definitiva il *dominio della funzione* si ottiene proiettando ortogonalmente il grafico sull’asse delle x .

Analogamente, una retta orizzontale di equazione $y = b$ interseca il grafico (e i punti di intersezione possono essere più di uno, addirittura anche infiniti) se e solo se $b \in f(A)$; l’*immagine della funzione* è dunque la proiezione ortogonale del grafico sull’asse delle y .



Intersezione con una retta verticale $x = a$.



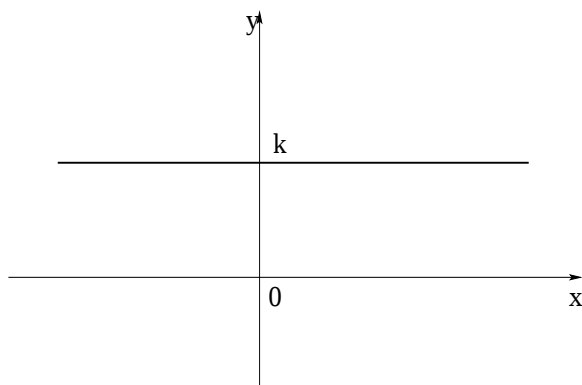
Intersezione con una retta orizzontale $y = b$.

Riportiamo nelle pagine seguenti esempi di grafici di importanti funzioni elementari; altri si troveranno nei capitoli successivi.

ESEMPIO 72.

La funzione costante: $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

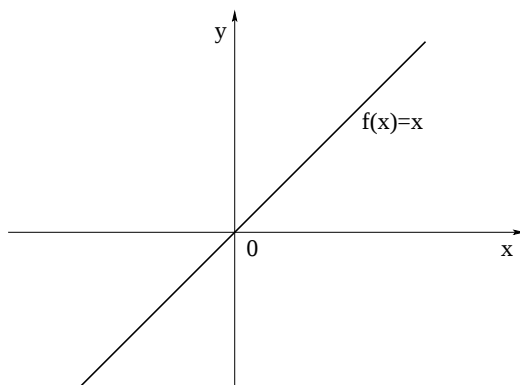
Osserviamo che $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ e $\text{Im } f = \{k\}$.



ESEMPIO 73.

La funzione identità: $f(x) = x$.

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$ e $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

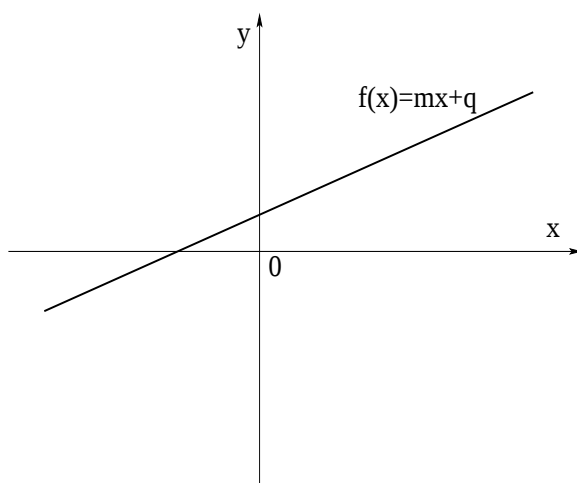


ESEMPIO 74.

La funzione affine $f(x) = mx + q$, con $m \neq 0$.

(Se $q = 0$ si parla di funzione lineare esprimente una proporzionalità diretta tra x e y .)

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$ e $\text{Im } f = \mathbb{R}$.



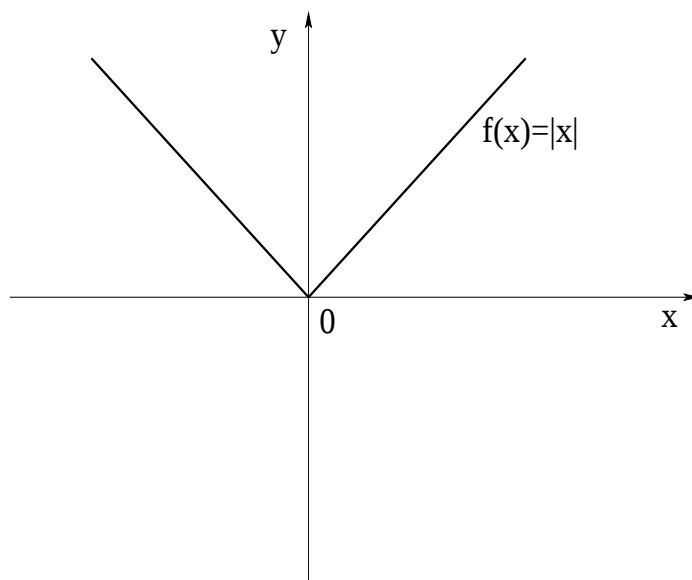
ESEMPIO 75.

La funzione modulo (o valore assoluto): $f(x) = |x|$.

Ricordiamo che questa funzione è definita a tratti nel modo seguente:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$ e $\text{Im } f = \{y : y \geq 0\}$.

**ESEMPIO 76.**

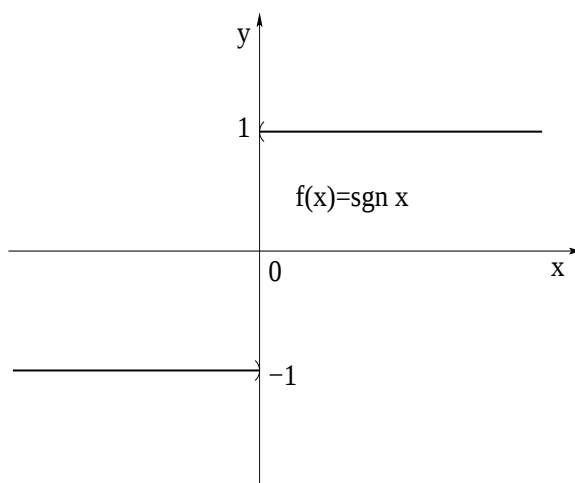
La funzione segno: $f(x) = \text{sgn } x$.

Abbiamo visto sopra come è definita questa funzione costante a tratti (vedi Esempio (64)).

Una definizione equivalente è

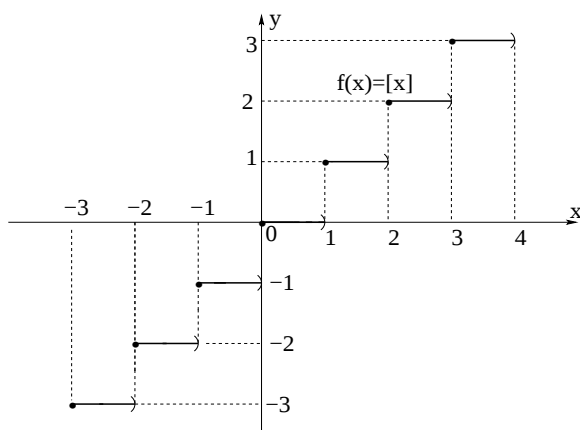
$$\text{sgn } x = \frac{|x|}{x}, \quad \text{se } x \neq 0$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\text{Im } f = \{1, -1\}$.

**ESEMPIO 77.**

La funzione (costante a tratti) parte intera di x (vedi Esempio (65)): $f(x) = [x]$.

$Dom f = \mathbb{R}$ e $Im f = \mathbb{Z}$.

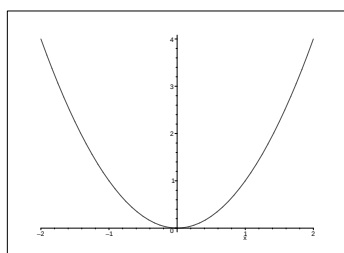


ESEMPIO 78.

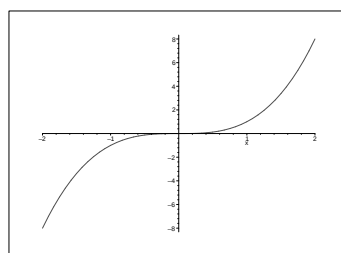
La funzione potenza $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$Dom f = \mathbb{R}$, $Im f = \{y : y \geq 0\}$, se n è pari, $Im f = \mathbb{R}$ se n è dispari.

n pari



n dispari

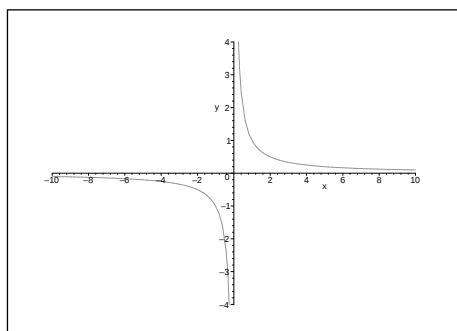


ESEMPIO 79.

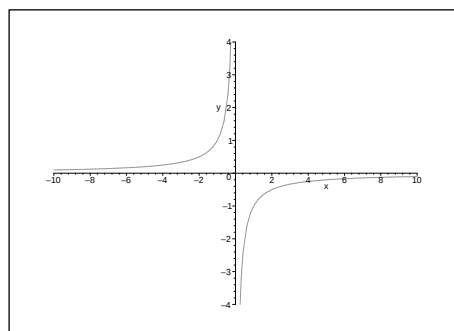
La funzione $f(x) = \frac{a}{x}$, che esprime proporzionalità inversa tra x e y .

$Dom f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $Im f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$a > 0$



$a < 0$



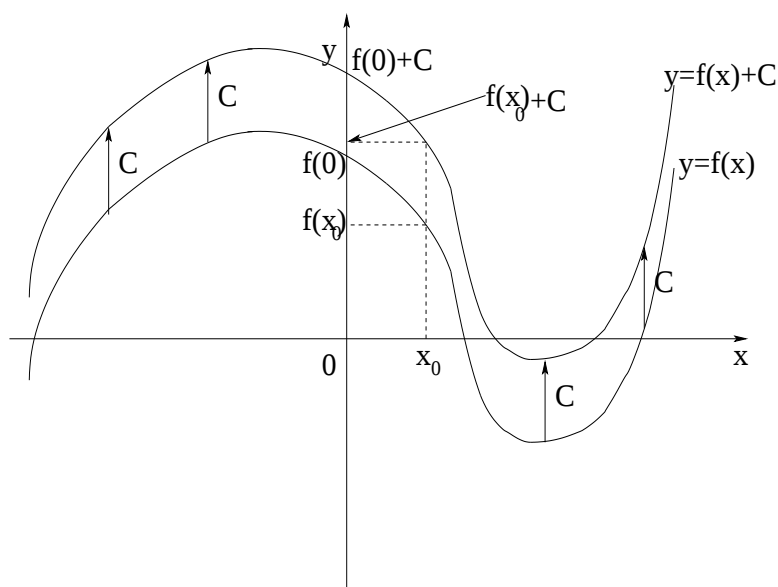
3.3 Trasformazioni di grafici

In questo paragrafo vediamo come il grafico di alcune funzioni possa essere ottenuto da quello di funzioni elementari mediante una opportuna trasformazione geometrica.

ESEMPIO 80.

Conoscendo il grafico di $y = f(x)$ tracciare il grafico di $y = f(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

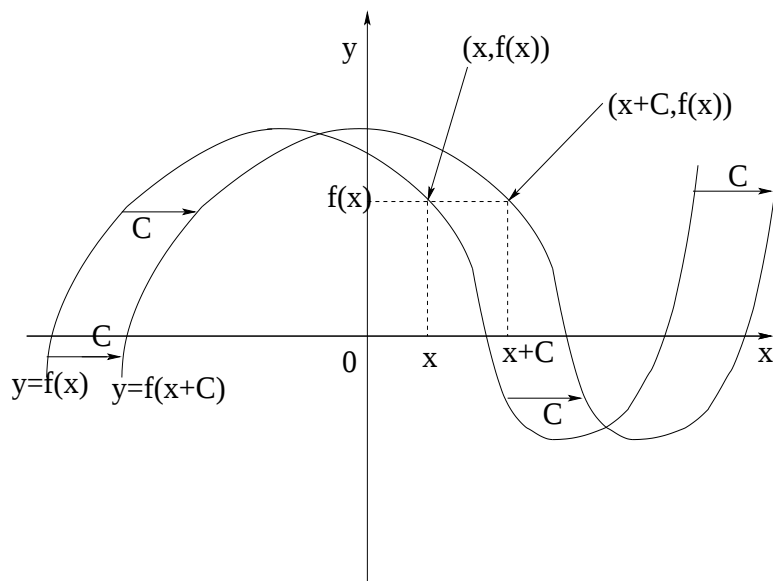
Si tratta di una traslazione fatta rispetto alla variabile y , quindi in una direzione "verticale", verso il basso se $C < 0$, verso l'alto se $C > 0$. Quest'ultimo caso è rappresentato nella figura sotto.



ESEMPIO 81.

Conoscendo il grafico di $y = f(x)$ tracciare il grafico di $y = f(x + C)$, $C \in \mathbb{R}$

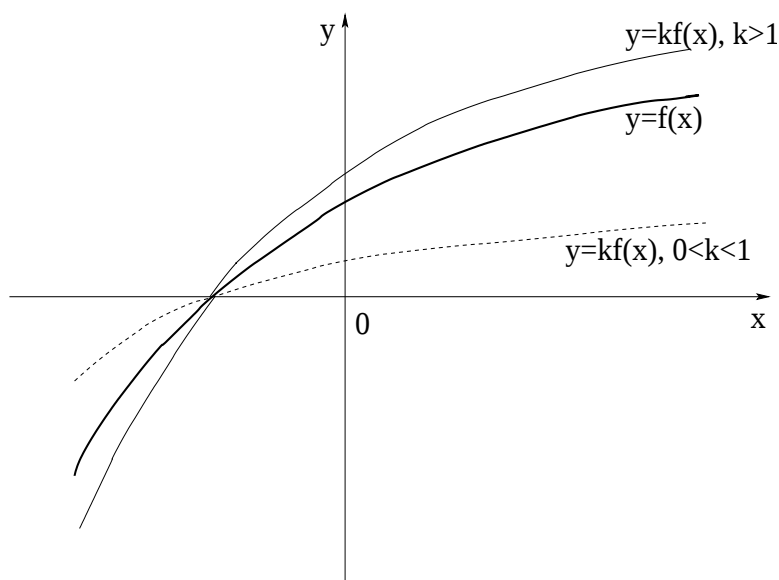
Questa volta la traslazione è effettuata rispetto alla variabile x quindi nella direzione orizzontale. Il grafico è traslato verso sinistra se $C > 0$, verso destra se $C < 0$. Quest'ultimo caso è rappresentato in figura.



ESEMPIO 82.

Conoscendo il grafico di $y = f(x)$ tracciare il grafico di $y = kf(x)$, $k \in \mathbb{R}$

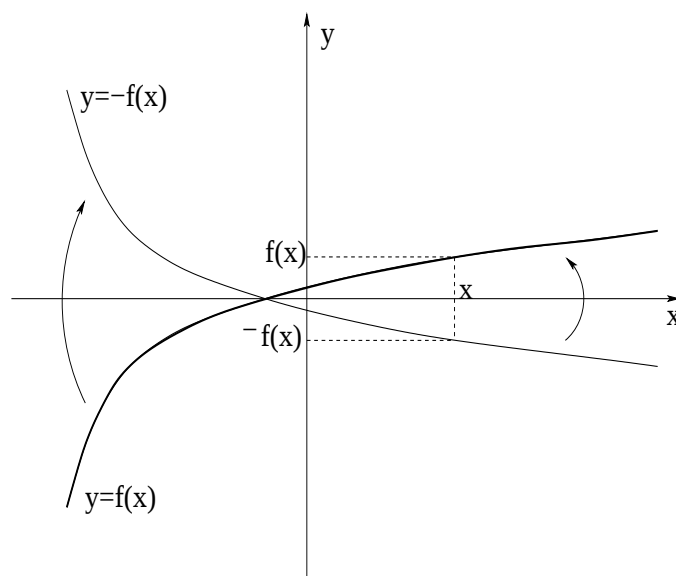
Moltiplicando per k l'ordinata del punto $(x, f(x))$ si ottiene un punto posto sulla stessa retta verticale al di sopra di esso se $k > 1$, al di sotto ma nello stesso quadrante se $0 < k < 1$, nel quadrante con ordinata di segno opposto se $k < 0$. Si osservi che il punto dove il grafico di f interseca l'asse x è comune ai grafici di $y = kf(x)$ qualunque sia il valore di k .



Se $k = -1$ il grafico di $y = -f(x)$ si ottiene dal grafico di $y = f(x)$ mediante una simmetria rispetto all'asse x , ovvero prendendo per ogni punto del grafico di f quello con la stessa ascissa e con l'ordinata di segno opposto, come si vede dall'esempio seguente.

ESEMPIO 83.

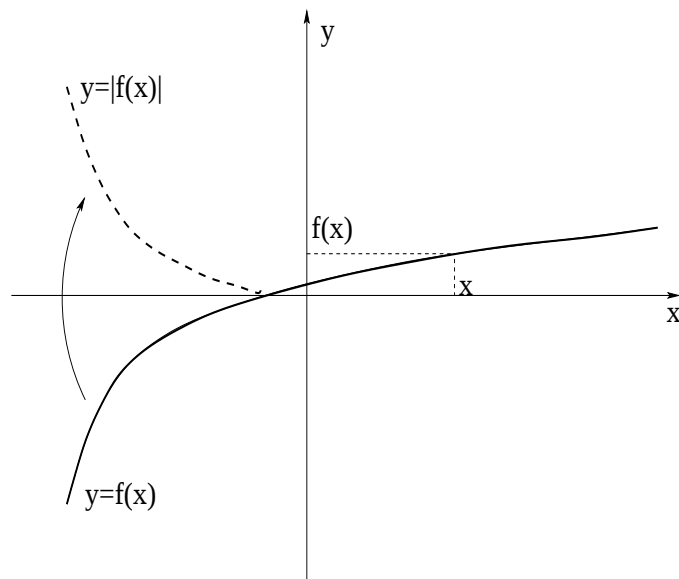
Conoscendo il grafico di $y = f(x)$ tracciare il grafico di $y = -f(x)$.



Le considerazioni fatte sopra ci permettono di risolvere anche il seguente problema:

ESEMPIO 84.

Conoscendo il grafico di $y = f(x)$ tracciare il grafico di $y = |f(x)|$.



Infatti, basta tener presente che

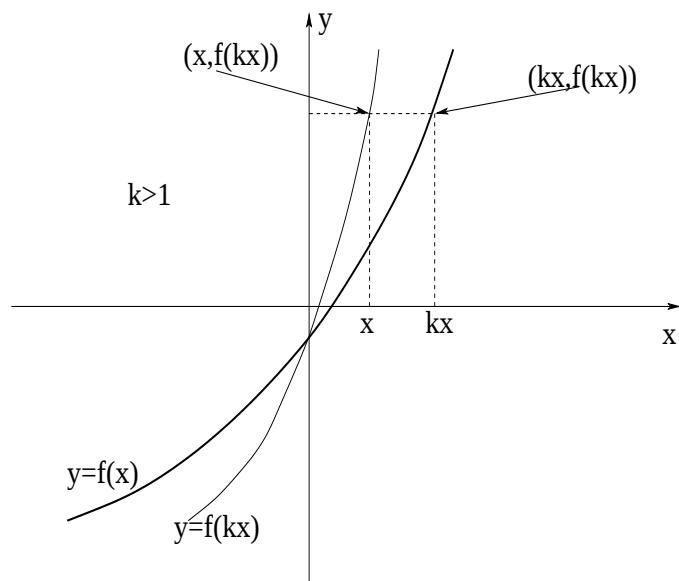
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

quindi il grafico di $y = |f(x)|$ coincide con quello di $y = f(x)$ dove $f(x) \geq 0$, con quello di $y = -f(x)$ dove $f(x) < 0$.

ESEMPIO 85.

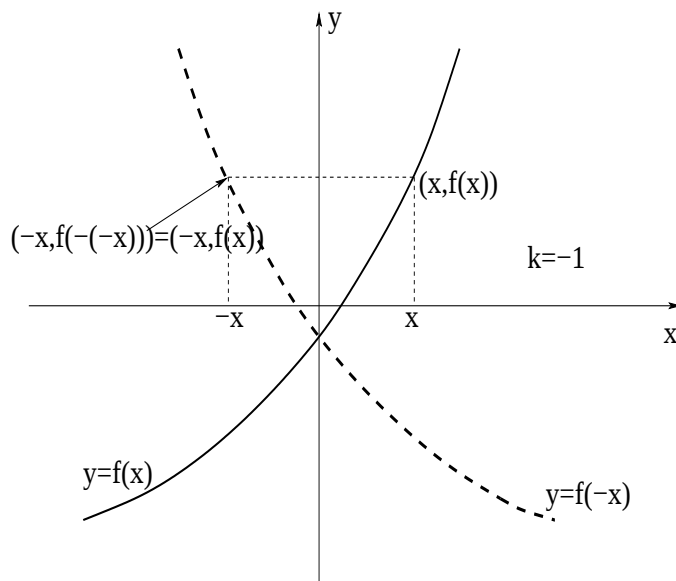
Conoscendo il grafico di $y = f(x)$ tracciare il grafico di $y = f(kx)$, $k \in \mathbb{R}$.

Il punto del piano di coordinate $(kx, f(kx))$ appartiene al grafico di $y = f(x)$ ed ha la stessa ordinata del punto $(x, f(kx))$ che appartiene invece al grafico di $y = f(kx)$. Questa osservazione ci permette di risolvere il problema proposto. Qui sotto riportiamo il grafico di $y = f(kx)$ per $k > 1$.



Osserviamo che il grafico di $y = f(kx)$ viene "schiacciato" sull'asse y se $k > 1$, si "allarga" se $0 < k < 1$.

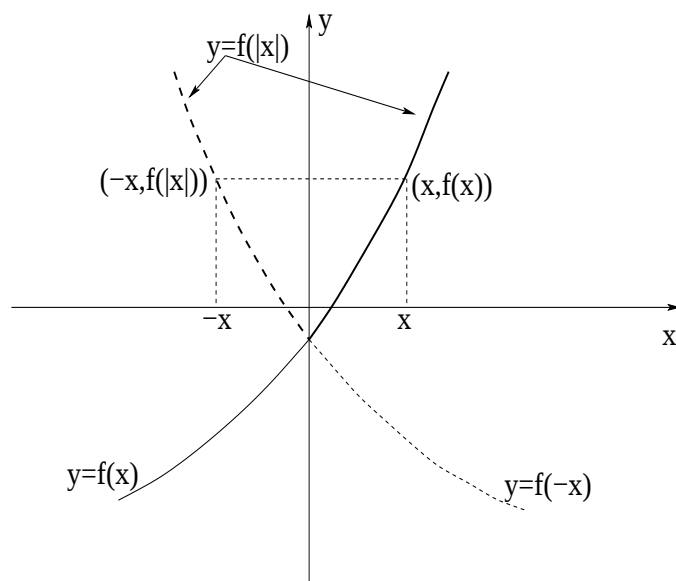
La figura qui sotto rappresenta il caso $k = -1$. Si osservi che in questo caso otteniamo una simmetria rispetto all'asse y . Da questo si deducono poi facilmente i grafici corrispondenti agli altri valori di k negativo.



L'esempio precedente ci permette di risolvere anche il seguente problema.

ESEMPIO 86.

Conoscendo il grafico di $y = f(x)$ tracciare il grafico di $y = f(|x|)$.



Infatti, basta tener presente che:

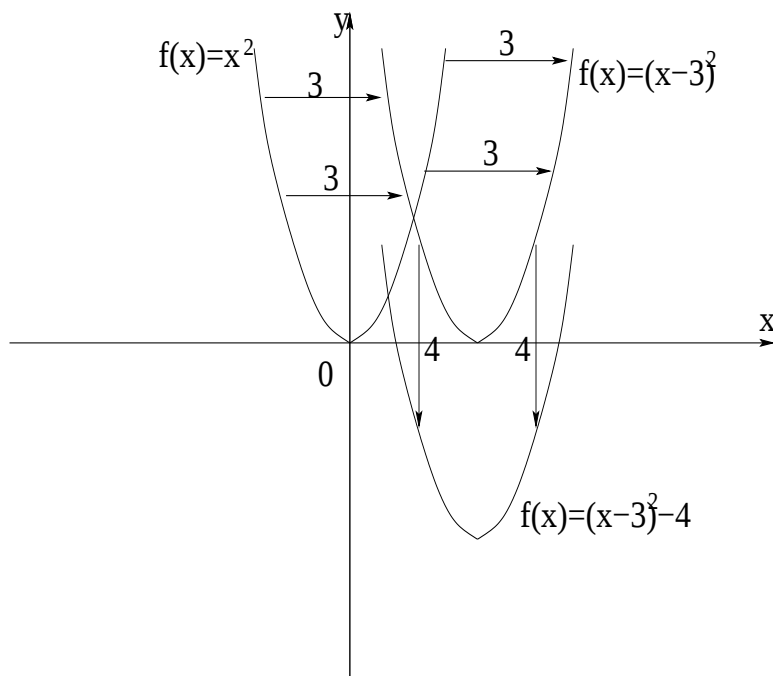
$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e quindi il grafico di $y = f(|x|)$ coincide con quello di $y = f(x)$ dove $x \geq 0$, con quello di $y = f(-x)$ dove $x < 0$. Si osservi che il grafico di $y = f(x)$ si cancella dove $x < 0$, mentre il grafico di $y = f(-x)$ si cancella dove $x > 0$.

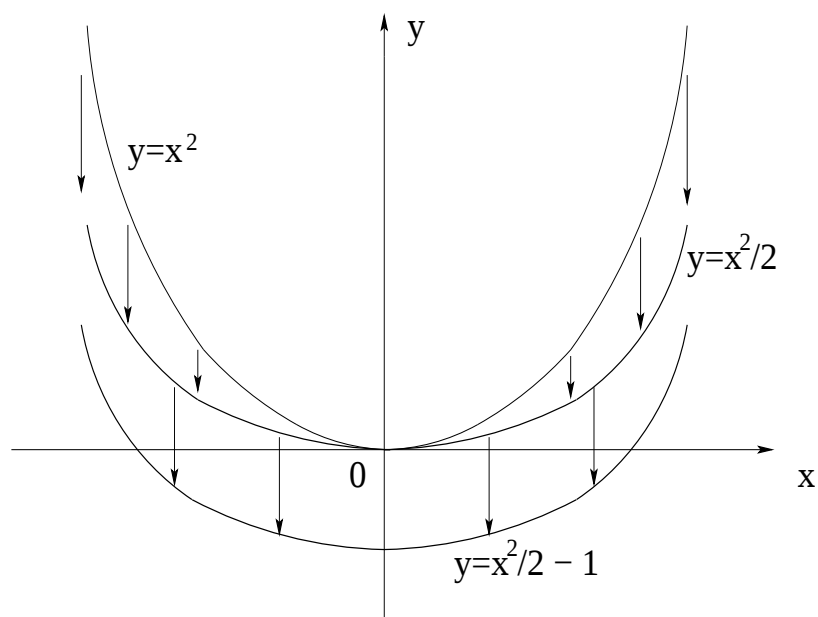
ESERCIZIO 1.

Tracciare il grafico della funzione $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

Basta considerare il grafico di $y = x^2$ (parabola avente come asse l'asse delle y), effettuare una traslazione di 3 unità nella direzione parallela all'asse x verso destra, ottenendo il grafico di $y = (x - 3)^2$ e infine una traslazione nella direzione parallela all'asse y di 4 unità verso il basso, ottenendo il grafico desiderato.

**ESERCIZIO 2.**

Tracciare il grafico di $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1$



3.4 Operazioni con le funzioni.

Per le funzioni è possibile definire operazioni analoghe a quelle definite per i numeri.

DEFINIZIONE 25.

Siano $A \subset \mathbb{R}$ ed $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiamo funzione somma $f + g$ quella che ad ogni $x \in A$ associa il numero $f(x) + g(x)$. In simboli:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in A.$$

Analogamente definiamo la funzione prodotto $f \cdot g$:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in A,$$

che ha come caso particolare il prodotto cf di una funzione per una costante $c \in \mathbb{R}$:

$$(cf)(x) = c \cdot f(x), \quad \forall x \in A.$$

Infine la funzione rapporto $\frac{f}{g}$ è definita da:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in A \setminus \{x : g(x) = 0\}.$$

OSSERVAZIONE 9.

La definizione di queste operazioni richiede che esista un dominio comune alle due funzioni, cioè che sia $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g \neq \emptyset$.

Ad esempio, se consideriamo le funzioni:

$$f(x) = \sqrt{x-2}, \quad g(x) = \sqrt{1-x}$$

non è possibile eseguire le operazioni definite sopra.

Non ha senso ad esempio scrivere $(f + g)(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x}$. Infatti, $\text{Dom } f = \{x : x \geq 2\}$, $\text{Dom } g = \{x : x \leq 1\}$ e dunque $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \emptyset$.

Esiste un altro procedimento, detto **composizione o prodotto di composizione**, con cui si possono combinare tra loro funzioni ottenendone una nuova.

DEFINIZIONE 26.

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$; la **funzione composta** $f \circ g$ è definita da

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Il senso della definizione è questo: per calcolare $f \circ g$, prima si applica ad x la funzione g trovando $g(x)$, poi la funzione f a $g(x)$ trovando $f(g(x))$.

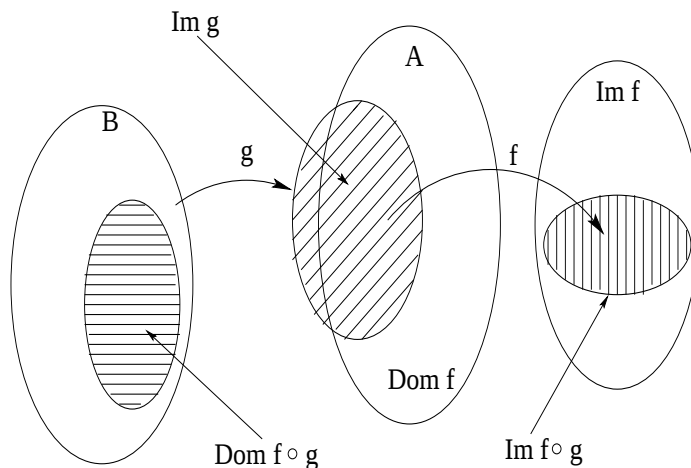
Perché la definizione abbia senso, non basta scegliere $x \in B$: questo infatti permette solo di calcolare $g(x)$, ma per poter calcolare $f(g(x))$ occorre anche che sia $g(x) \in A$.

Il *dominio della funzione composta* è dunque dato da:

$$\text{Dom } f \circ g = \{x \in B : g(x) \in A\}.$$

Si avrà dunque

$$\text{Dom } f \circ g \neq \emptyset \iff \text{Dom } f \cap \text{Im } g \neq \emptyset.$$



Nel caso in cui $Im\,g \subset Dom\,f$, la funzione $f \circ g$ è definita su B .
Naturalmente è possibile definire anche la funzione $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

in

$$Dom\,g \circ f = \{x \in A : f(x) \in B\}.$$

Anche in questo caso

$$Dom\,g \circ f \neq \emptyset \iff Dom\,g \cap Im\,f \neq \emptyset.$$

Non vale la proprietà commutativa, cioè in generale risulta

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Vediamo nel dettaglio alcuni esempi

ESEMPIO 87.

Siano $g(x) = x^2 - 5$ e $f(x) = 3x^6$, con $A = B = \mathbb{R}$. Si ha:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 5) = 3(x^2 - 5)^6, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Infatti, essendo $Dom\,f = \mathbb{R}$, è sicuramente $Im\,g \subset Dom\,f$ e dunque la composizione ha senso $\forall x \in B$, cioè per ogni valore di x .

Invece:

$$(g \circ f)(x) = g(3x^6) = 9x^{12} - 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poiché $Dom\,g = \mathbb{R}$ e dunque $Im\,f \subset Dom\,g$, la funzione è definita in $A = \mathbb{R}$.

ESEMPIO 88.

Siano $g(x) = |x| + 1$ e $f(x) = \frac{1}{x}$. In questo caso $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B = \mathbb{R}$ e si ha

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x| + 1) = \frac{1}{|x| + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

infatti il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Im\,g = \{x : x \geq 1\}$ e dunque $Im\,g \subset Dom\,f$.

Per $f \circ g$ si ha invece

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{|x|} + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

infatti $Dom\,g = \mathbb{R}$ e dunque $Im\,f \subset Dom\,g$.

ESEMPIO 89.

Siano $g(x) = x^4 - 1$ e $f(x) = \frac{1}{x}$, con $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $B = \mathbb{R}$;

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^4 - 1) = \frac{1}{x^4 - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x : x = \pm 1\}.$$

Infatti il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ma $Im\,g = \{x : x \geq -1\}$ che comprende quindi anche il punto 0 che non appartiene al dominio di f . Vanno allora esclusi i punti di $Dom\,g$ che hanno come immagine 0, ovvero i punti tali che $g(x) = x^4 - 1 = 0$, ovvero $x = \pm 1$.

Per l'altra composizione si ha

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4} + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

In questo caso, essendo $Dom\,g = \mathbb{R}$, la composizione risulta definita per ogni valore di $x \in Dom\,f$ ovvero $\forall x \neq 0$.

ESEMPIO 90.

Siano $g(x) = 1 - |x|$ e $f(x) = \sqrt{x - 5}$, con $A = [5, +\infty)$, $B = \mathbb{R}$;

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - |x|) = \sqrt{(1 - |x|) - 5} = \sqrt{-|x| - 4}.$$

Formalmente la composizione tra le funzioni è stata effettuata, peccato però che non abbia senso. Infatti il termine sotto radice quadrata è sempre negativo e quindi **la radice non è definita**. In particolare si osservi che $Dom\,g = \{x : x \geq 5\}$ mentre $Im\,f = \{x : x \leq 1\}$ e quindi $Dom\,g \cap Im\,f = \emptyset$.

Si ha invece

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x - 5}) = 1 - \sqrt{x - 5}, \quad \forall x \in [5, +\infty).$$

In questo caso la funzione è definita in A , perché $Dom\,g = \mathbb{R}$.

3.5 Funzioni iniettive, monotone, invertibili.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 27.

Diremo che la funzione f è **iniettiva su A** se

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad (3.1)$$

ovvero ⁽⁵⁾

$$\exists x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \quad (3.2)$$

Questo significa che una funzione è *iniettiva* se a *valori distinti* della variabile x sull'insieme A associa valori distinti della variabile y (è importante specificare l'insieme in cui x assume i suoi valori, come vedremo negli esempi che seguono).

Il concetto di *funzione iniettiva* è uno dei primi concetti matematici che vengono usati, seppure inconsapevolmente, dall'uomo. Basti pensare a ciò che avviene quando il bambino impara a contare: porta ciascun dito alle labbra e ad esso associa un numero; ad esempio al pollice "uno", all'indice "due" e così via. La funzione che associa ad ogni dito della mano un numero intero è una *funzione iniettiva*. In generale, *contare gli elementi di un insieme finito* significa stabilire una corrispondenza iniettiva tra i suoi elementi ed i numeri di un insieme della forma $\{1, 2, \dots, n\}$.

⁵Perché $(p \Rightarrow q) \iff (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (vedi Cap I).

ESEMPIO 91.

La funzione $f(x) = x^3$ è iniettiva su $\mathbb{R}$.

Per provare che la funzione data verifica la definizione (3.2) supponiamo che esistano due valori reali x_1, x_2 tali che $f(x_1) = f(x_2)$ ovvero $x_1^3 = x_2^3$. Portando a primo membro il termine x_2^3 ed utilizzando la formula di scomposizione della differenza tra cubi (vedi Cap. IV), si ottiene:

$$x_1^3 - x_2^3 = 0 \iff (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0.$$

Poiché $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \neq 0$ se almeno uno dei due valori x_1, x_2 è diverso da zero,⁽⁶⁾ allora necessariamente $x_1 - x_2 = 0$ ovvero $x_1 = x_2$.

ESEMPIO 92.

La funzione $f(x) = x^2$ non è iniettiva su $\mathbb{R}$, mentre è iniettiva sull'insieme $\{x : x \geq 0\}$ (oppure sull'insieme $\{x : x \leq 0\}$).

Per dimostrare che una funzione non è *iniettiva* dobbiamo dimostrare che verifica la negazione della definizione. Ad esempio la negazione di (3.1) è

f **non è iniettiva** su A se $\exists x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \text{ e } f(x_1) = f(x_2)$.

Quindi nel caso della funzione data:

$$x_1^2 = x_2^2 \iff x_1^2 - x_2^2 = 0 \iff (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0. \quad (3.3)$$

Poiché $x_1 \neq x_2$, i due valori devono necessariamente essere l'uno l'opposto dell'altro: $x_1 = -x_2$. Se consideriamo come insieme $A = \{x : x \geq 0\}$ (oppure $\{x : x \leq 0\}$) otteniamo che su di esso la funzione risulta iniettiva (infatti in A la condizione $x_1 + x_2 = 0$ si ottiene solo se $x_1 = x_2 = 0$).

Se invece $A = \mathbb{R}$ questa condizione è verificata (ad esempio scegliendo $x_1 = -1, x_2 = 1$) e dunque in questo insieme la funzione non è iniettiva.

OSSERVAZIONE 10.

Ovviamente nella maggior parte dei casi non è possibile studiare l'iniettività con metodi elementari, come è stato fatto negli esempi precedenti. L'Analisi Matematica fornisce strumenti più raffinati che permettono di affrontare questo problema in maniera esauriente.

DEFINIZIONE 28.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva e indichiamo con B la sua immagine. Si dice **funzione inversa** di f la funzione $f^{-1} : B \rightarrow A$ che ad ogni $y \in B$ associa l'unico elemento $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Una funzione che ammette la funzione inversa si dice **invertibile**.

Per la definizione data le funzioni invertibili sono tutte e sole quelle iniettive.

Le ipotesi danno significato alla definizione di *funzione inversa*. Infatti:

- essendo $y \in B$, l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione $x \in A$,
- essendo f iniettiva, l'equazione $f(x) = y$ non può avere più di una soluzione.

⁶Infatti consideriamo l'equazione di secondo grado in $x : x^2 + x + 1 = 0$; essa non ammette radici reali in quanto $\Delta = -3 < 0$, vedi cap V.

Se fosse $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0$, con x_1, x_2 non contemporaneamente nulli, ad esempio (per fissare le idee) $x_2 \neq 0$, dividendo per x_2^2 e ponendo $t = \frac{x_1}{x_2}$, si otterrebbe $t^2 + t + 1 = 0$. Questo è impossibile perché, per quanto osservato, sopra questa equazione non ha soluzioni.

In definitiva

$$\forall y \in B \quad \exists_1 x \in A : f(x) = y \quad \text{da cui} \quad x = f^{-1}(y).$$

ESEMPIO 93.

La funzione $f(x) = x - 7$, $x \in \mathbb{R}$ è invertibile.

L'iniettività della funzione è immediata

$$x_1 - 7 = x_2 - 7 \iff x_1 = x_2.$$

Per calcolare l'inversa consideriamo l'equazione

$$y = x - 7$$

e risolviamola in x , ottenendo $x = y + 7$. La funzione

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = y + 7$$

è l'inversa della funzione data.

ESEMPIO 94.

Dimostrare l'invertibilità della funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3}$$

e calcolarne l'inversa.

f è iniettiva, infatti $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$f(x_1) = f(x_2) \iff \frac{x_1-1}{x_1+3} = \frac{x_2-1}{x_2+3} \iff (x_1-1)(x_2+3) = (x_2-1)(x_1+3) \iff x_1 = x_2.$$

Per calcolare l'inversa consideriamo l'equazione

$$y = \frac{x-1}{x+3}$$

e risolviamola in x , ottenendo

$$x = \frac{3y+1}{1-y}, \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

La funzione

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{-3\}, \quad f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{1-y}$$

è l'inversa della funzione data.

OSSERVAZIONE 11.

Stabilire che una funzione è invertibile può non essere semplice: si deve ricorrere quasi sempre agli strumenti dell'Analisi Matematica. Quello che invece è impossibile fare nella maggior parte dei casi è scrivere l'espressione esplicita dell'inversa come abbiamo fatto nell'Esempio 93 e nell'Esempio 94.

ESEMPIO 95.

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^5 + x$ è invertibile, ma non possiamo scrivere in maniera esplicita l'inversa.

Proviamo che la funzione è *iniettiva* su $\mathbb{R}$. Infatti, se $x_1^5 + x_1 = x_2^5 + x_2$ allora $x_1(x_1^4 + 1) = x_2(x_2^4 + 1)$. Di conseguenza i punti x_1, x_2 o sono entrambi nulli o devono avere segno concorde (supponiamo, ad esempio $x_1, x_2 > 0$), perché i termini dentro la parentesi tonda sono sempre positivi.

$$\begin{aligned}
 x_1(x_1^4 + 1) = x_2(x_2^4 + 1) &\iff x_1(x_1^4 + 1) - x_2(x_2^4 + 1) = 0 \iff \\
 &\iff x_1(x_1^4 + 1) - x_2(x_1^4 + 1) + x_2(x_1^4 + 1) - x_2(x_2^4 + 1) = 0 \iff \\
 &\iff x_1(x_1^4 + 1) - x_2(x_1^4 + 1) + x_2(x_1^4 - x_2^4) = 0 \iff \\
 &\iff x_1(x_1^4 + 1) - x_2(x_1^4 + 1) + x_2[(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)] = 0 \iff \\
 &\iff (x_1 - x_2)[(x_1^4 + 1) + x_2(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)] = 0 \implies \\
 &\implies x_1 = x_2 \quad (\text{perché il termine dentro la parentesi quadrata è positivo})
 \end{aligned}$$

Esiste dunque la funzione inversa $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (con gli strumenti dell'Analisi Matematica si può anche precisare che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$). Per poter scrivere in modo esplicito f^{-1} si dovrebbe poter scrivere esplicitamente le soluzioni dell'equazione $x^5 + x = y$. Ciò non è possibile in quanto si tratta di un'equazione di grado superiore al quarto e, come osserveremo nel capitolo successivo, queste equazioni non hanno formule risolutive generali.

OSSERVAZIONE 12.

Il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla retta bisettrice del primo e terzo quadrante degli assi cartesiani (vedi figura nella pagina seguente).

Infatti per definizione di grafico di funzione:

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y, x) : x = f^{-1}(y)\}.$$

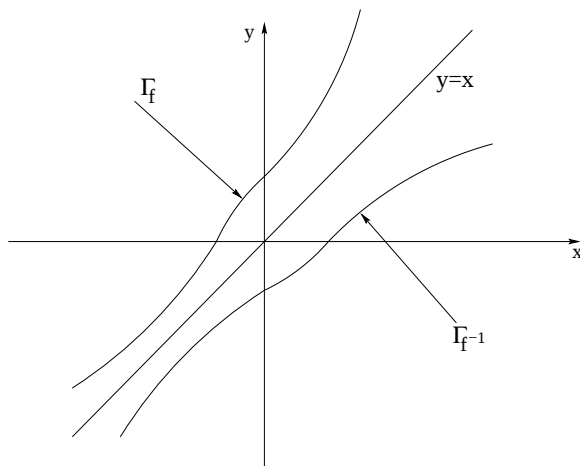
Quindi

$$(a, b) \in \Gamma_f \iff b = f(a) \iff a = f^{-1}(b) \iff (b, a) \in \Gamma_{f^{-1}}.$$

In definitiva

$$(a, b) \in \Gamma_f \iff (b, a) \in \Gamma_{f^{-1}}.$$

Per quanto dimostrato nel Capitolo II i punti (a, b) e (b, a) sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



PROPOSIZIONE 1.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ invertibile, con $\text{Im } f = B$. Allora dalla definizione di f^{-1} segue:

$$\begin{aligned}
 (f^{-1} \circ f)(x) &= x, \quad \forall x \in A \\
 (f \circ f^{-1})(y) &= y, \quad \forall y \in B.
 \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 29.

Diremo che la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è **crescente** se

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

DEFINIZIONE 30.

Diremo che la funzione $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ è **crescente in senso debole** se

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

DEFINIZIONE 31.

Diremo che la funzione $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ è **decreciente** se

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

DEFINIZIONE 32.

Diremo che la funzione $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ è **decreciente in senso debole** se

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

DEFINIZIONE 33.

Diremo che la funzione $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ è **monotona** se è crescente o decrescente; mentre diremo che è **monotona in senso debole** se è crescente in senso debole o decrescente in senso debole.

ESEMPIO 96.

La funzione $f(x) = x^3$ è crescente.

Da $x_1^3 < x_2^3$ segue $x_1^3 < x_2^3$. Infatti⁽⁷⁾

$$x_1^3 < x_2^3 \iff 0 < x_2^3 - x_1^3.$$

D'altra parte

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) > 0 \iff x_2 - x_1 > 0.$$

ESEMPIO 97.

La funzione $f(x) = [x]$ (parte intera di x) è crescente in senso debole.

Siano $x_1 = n_1 + r_1$, $x_2 = n_2 + r_2$, con $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $r_1, r_2 \in [0, 1)$. Da $x_1 < x_2$ segue che $n_1 < n_2$ oppure $n_1 = n_2$ e $r_1 < r_2$:

se $n_1 < n_2$ essendo $n_1 = [x_1]$ e $n_2 = [x_2]$ segue $[x_1] < [x_2]$,

se $n_1 = n_2$ allora $[x_1] = [x_2]$.

In ogni caso $[x_1] \leq [x_2]$.

Come banale conseguenza delle relative definizioni otteniamo il risultato:

⁷Nello svolgimento si tiene conto del fatto che la disequazione $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > 0$ è verificata $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (vedi nota Esempio 91).

PROPOSIZIONE 2.

Le funzioni monotone sono iniettive.

Il viceversa è banalmente falso, basta considerare il seguente esempio:

ESEMPIO 98.

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ definita da $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è iniettiva ma non monotona su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

L'iniettività è ovvia; per quanto riguarda la monotonia, presi x_1, x_2 tali che $0 < x_1 < x_2$, si ha $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$; d'altra parte se $x_1 < 0 < x_2$ risulta $\frac{1}{x_1} < 0 < \frac{1}{x_2}$.

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è *decreciente* in $\{x : x > 0\}$, e in $\{x : x < 0\}$, ma non nell'unione dei due insiemi.

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme *simmetrico* rispetto all'origine, ovvero tale che $x \in A \iff -x \in A$ (Ad esempio $A = (-2, 2)$).

DEFINIZIONE 34.

Diremo che $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una

funzione pari se $\forall x \in A, f(x) = f(-x)$,

funzione dispari se $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$.

ESEMPIO 99.

La funzione $f(x) = x^2$ è pari.

La funzione $f(x) = x^3$ è dispari.

Infatti $(-x)^2 = x^2$, mentre $(-x)^3 = (-1 \cdot x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3$.

OSSERVAZIONE 13.

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.

ESERCIZIO 3.

Sia $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che sia contemporaneamente pari e dispari; allora

$$\forall x \in A, \varphi(x) = 0.$$

Infatti devono essere verificate le seguenti uguaglianze per ogni $x \in A$: $\varphi(x) = \varphi(-x)$ e $\varphi(-x) = -\varphi(x)$; da questa segue $\varphi(x) = -\varphi(x)$ e quindi $\varphi(x) = 0 \ \forall x \in A$.⁸

ESERCIZIO 4.

Siano f_p, g_p e f_d, g_d rispettivamente funzioni pari e funzioni dispari. Dimostrare che $f_p \pm g_p$ è una funzione pari e $f_d \pm g_d$ una funzione dispari.

Basta osservare che $f_d(-x) \pm g_d(-x) = -f_d(x) \pm [-g_d(x)] = -[f_d(x) \pm g_d(x)]$. Analogo procedimento per il caso *pari*.

ESERCIZIO 5.

Siano $\psi_p, \psi_d : A \rightarrow \mathbb{R}$ rispettivamente una funzione pari e una funzione dispari tali che $\forall x \in A, \psi_p(x) + \psi_d(x) = 0$. Allora $\forall x \in A, \psi_p(x) = 0$ e $\psi_d(x) = 0$.

⁸Segue dal fatto che $y = -y \iff y = 0$.

Infatti $\forall x \in A$:

da $\psi_p(x) + \psi_d(x) = 0$ segue $\psi_p(x) = -\psi_d(x) = \psi_d(-x)$

mentre

da $\psi_p(-x) + \psi_d(-x) = 0$ segue $\psi_p(-x) = -\psi_d(-x) = \psi_d(x)$.

Da queste relazioni e dalla parità di ψ_p ($\psi_p(x) = \psi_p(-x)$) otteniamo $\psi_d(x) = \psi_d(-x)$, ovvero ψ_d è *pari*. Ma una funzione che sia contemporaneamente *pari* e *dispari* è identicamente nulla (vedi Esercizio 3).

ESERCIZIO 6.

Ogni funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si può decomporre in un unico modo come somma di una funzione pari e di una funzione dispari.

Basta scrivere

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f_p(x) + f_d(x)$$

$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ è pari perché

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = f_p(-x)$$

mentre $f_d(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ è dispari perché

$$f_d(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -f_d(-x).$$

La decomposizione è unica perché se esistessero g_p, g_d rispettivamente *funzione pari* e *funzione dispari* tali che $f(x) = g_p + g_d$, allora $f_p - g_p + f_d - g_d = 0$. La funzione $f_p - g_p$ è pari, mentre la funzione $f_d - g_d$ è dispari (vedi Esercizio 4).

La somma di una funzione *pari* e di una *dispari* è zero solo se sono nulle le due funzioni (vedi Esercizio 5), quindi $f_p = g_p$ e $f_d = g_d$.

DEFINIZIONE 35.

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non costante. Diremo che f è **periodica** di periodo $T > 0$ se

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

ESERCIZIO 7.

Dimostrare che la funzione $f(x) = [x] - x$ è periodica di periodo $T = 1$.

Dobbiamo dimostrare che $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + 1)$.

Poniamo $\forall x \in \mathbb{R}, x = n + r$, con $n \in \mathbb{Z}, r \in [0, 1)$. Quindi $[x] = [n + r] = n$, mentre $[x + 1] = [n + r + 1] = n + 1$.

In definitiva possiamo scrivere:

$$f(x) = [x] - x = [n + r] - (n + r) = -r,$$

$$f(x + 1) = [x + 1] - (x + 1) = n + 1 - (n + r + 1) = -r.$$

PROPOSIZIONE 3.

Se f è una funzione periodica di periodo T allora

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(x + nT) = f(x).$$

Dimostrazione.

Iniziamo col provarlo per $n \in \mathbb{N}$ procedendo per induzione. Per $n = 1$, segue dalla definizione. Proviamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ da $f(x + nT) = f(x)$ segue $f(x + (n + 1)T) = f(x)$. Infatti

$$\begin{aligned} f(x + (n + 1)T) &= f(x + nT + T) = \\ &= f((x + T) + nT) = (\text{per l'ipotesi induttiva}) \\ &= f(x + T) = f(x). \end{aligned}$$

Per dimostrarlo nel caso $n \in \mathbb{Z}$, basta osservare che $\forall m \in \mathbb{N}$ (tenuto conto di quanto dimostrato sopra) segue

$$f(x) = f(x - mT + mT) = f((x - mT) + mT) = f(x - mT).$$

Posto $-m = n$, si ha l'asserto. Infine, il caso $m = 0$ è banale.

Per una funzione periodica esistono infiniti valori di $T > 0$ per i quali è verificata la definizione; si conviene definire *periodo della funzione* il più piccolo di questi valori. Indicato con T_0 questo valore, ogni altro periodo è della forma nT_0 , con $n \in \mathbb{N}$.

Non sempre questo periodo minimo esiste.

Si consideri ad esempio la funzione (di Dirichlet)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La funzione è periodica e come valore di T si può scegliere un qualunque numero razionale positivo (se $x \in \mathbb{Q}$ anche $x + T \in \mathbb{Q}$; se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, anche $x + T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Non è possibile trovare per T il valore minimo (si ricorda che deve essere $T > 0$ e dunque la scelta $T = 0$ non è lecita; del resto per $T = 0$ la definizione di funzione periodica diventerebbe del tutto inutile, nel senso che sarebbe verificata da ogni funzione: $f(x + 0) = f(x)!$).

Capitolo 4

POLINOMI

4.1 Polinomi: generalità

Si definisce **polinomio** di *grado* n ogni funzione $P_n(x)$ della forma

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono numeri reali ⁽¹⁾ assegnati (detti *coefficienti del polinomio*) con $a_n \neq 0$. Utilizzando il simbolo di sommatoria, possiamo anche riscrivere:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

(dove conveniamo che sia $x^0 = 1$).

Ogni singolo termine $a_k x^k$ si dice monomio di grado k ; eventuali monomi con coefficiente nullo non sono normalmente scritti. Anche l'indice che compare in P_n può essere normalmente trascurato, quando non è essenziale precisare il grado del polinomio. I polinomi sono dunque funzioni definite in $\mathbb{R}$ e per essi valgono le definizioni generali già introdotte, con alcune utili osservazioni.

Due polinomi

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \\ Q_m(x) &= b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

sono **uguali** se

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = Q_m(x).$$

Questo accade *se e solo se* (**principio di identità dei polinomi**)

$$\begin{cases} n &= m \\ a_k &= b_k \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n. \end{cases}$$

Un polinomio

$$P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

si dice *nullo* se $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$. Questo accade se e solo se

$$a_k = 0 \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n$$

¹Nelle considerazioni che faremo nel seguito prenderemo in considerazione **solamente** polinomi **con coefficienti reali**.

OSSERVAZIONE 14. Per il polinomio nullo non è definito il grado.

ESEMPIO 100.

I polinomi

$$P(x) = x^3 + x - 1, \quad Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

sono uguali se e solo se

$$a = c = 0, \quad b = d = 1, \quad e = -1.$$

Il polinomio

$$R(x) = ax^3 + x$$

non è nullo per nessun valore di a (perché il coefficiente di x è comunque diverso da 0). Si presti attenzione al fatto che questo **non** significa che il polinomio non si annulla per nessun valore di x (nel caso dell'esempio, si annulla per $x = 0$ qualunque sia il valore di a), ma solo che per nessun valore di a è identicamente nullo.

ESEMPIO 101.

Determinare i valori di a, b, c, d in modo che risultino uguali i seguenti polinomi

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 1)(ax + b) + (x - 2)(cx + d) \\ Q(x) &= x^3 + x + 4. \end{aligned}$$

Si procede utilizzando il *principio di identità dei polinomi* in due forme diverse.

I metodo. Si eseguono i prodotti, in modo da scrivere P come segue:

$$P(x) = ax^3 + (b + c)x^2 + (-a - 2c + d)x - b - 2d.$$

Uguagliando i termini di egual grado dei polinomi P e Q :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + c = 0 \\ -a - 2c + d = 1 \\ -b - 2d = 4 \end{cases}$$

da cui $a = 1$, $b = \frac{8}{3}$, $c = -\frac{8}{3}$, $d = -\frac{10}{3}$.

II metodo. Si assegnano alla variabile x dei valori opportuni sui quali si impone $P(x) = Q(x)$.

$$\begin{aligned} P(1) &= c + d, & Q(1) &= 6 \\ P(-1) &= 3c - 3d, & Q(-1) &= 2 \\ P(2) &= 6a + 3b, & Q(2) &= 14 \\ P(0) &= -b - 2d, & Q(0) &= 4. \end{aligned}$$

Ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} c + d = 6 \\ 3c - 3d = 2 \\ 6a + 3b = 14 \\ -b - 2d = 4. \end{cases}$$

Nuovamente: $a = 1$, $b = \frac{8}{3}$, $c = -\frac{8}{3}$, $d = -\frac{10}{3}$.

4.2 Operazioni con i polinomi

Studiamo adesso nel caso dei polinomi le operazioni già introdotte per le funzioni. Siano

$$\begin{aligned}P_n(x) &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \\Q_m(x) &= b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0\end{aligned}$$

due polinomi, con $n \geq m$.

Somma

Se $n = m$ il *polinomio somma* $P(x) + Q(x)$ ha come coefficienti

$$a_n + b_n, \cdots, a_1 + b_1, a_0 + b_0;$$

in particolare, è anch'esso di grado n se $a_n + b_n \neq 0$, è di grado inferiore altrimenti.

Se $n > m$ il polinomio somma è di grado n e i suoi coefficienti sono

$$a_n, \cdots, a_{m+1}, a_m + b_m, \cdots, a_1 + b_1, a_0 + b_0.$$

In generale, dunque, per il grado del polinomio somma, si ha:

$$\text{grado}(P + Q) \leq \max\{\text{grado}P, \text{grado}Q\}.$$

Per la differenza si procede in modo analogo.

ESEMPIO 102.

Se

$$\begin{aligned}P(x) &= x^3 + 2x - 1 \\Q(x) &= -x^3 + x^2 + 2\end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}P(x) + Q(x) &= x^2 + 2x + 1 \\P(x) - Q(x) &= 2x^3 - x^2 + 2x - 3.\end{aligned}$$

Prodotto

Il polinomio prodotto $P(x)Q(x)$ è di grado $m + n$ e i suoi coefficienti c_k ($k = 0, 1, \cdots, n + m$) sono definiti da:

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 = \sum_{r=0}^k a_r b_{k-r}.$$

Ad esempio

$$\begin{aligned}c_0 &= a_0 b_0 \\c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\&\cdots \quad \cdots\end{aligned}$$

In particolare, se $m = 0$ e dunque $Q(x) = b_0$ (polinomio costante), si ottiene

$$c_k = b_0 a_k,$$

cioè il prodotto di un polinomio per una costante si ottiene moltiplicando per questa costante ogni termine del polinomio.

In pratica, la moltiplicazione tra due polinomi può essere svolta moltiplicando uno dei due per i monomi che compongono l'altro e sommando i risultati così ottenuti.

Ad esempio

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + 2x - 1 \\ Q(x) &= x^2 - x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= (x^3 + 2x - 1)x^2 - (x^3 + 2x - 1)x + (x^3 + 2x - 1)5 = \\ &= (x^5 + 2x^3 - x^2) + (-x^4 - 2x^2 + x) + (5x^3 + 10x - 5) = \\ &= x^5 - x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 11x - 5. \end{aligned}$$

Per la moltiplicazione tra polinomi si può usare lo stesso algoritmo che si usa per la moltiplicazione tra numeri.

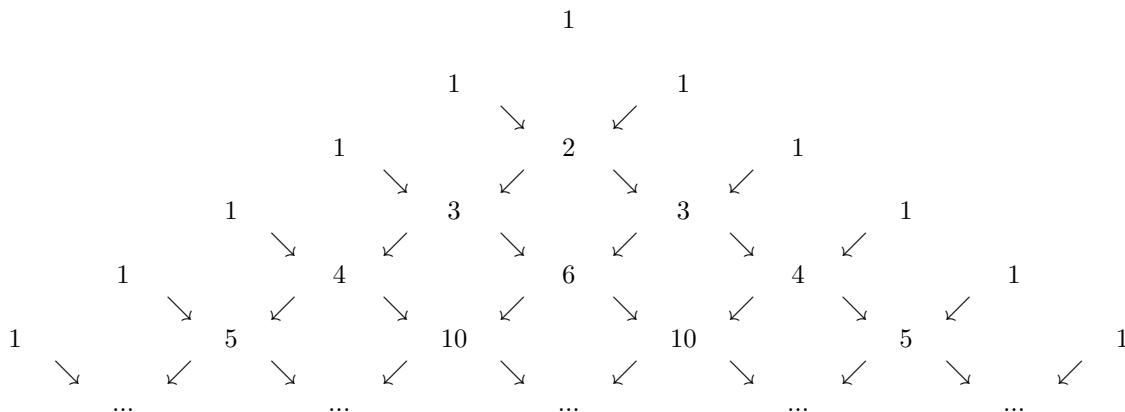
x^3	$+2x$	-1	$\times$	
x^2	$-x$	$+5$	$=$	
x^5	$+2x^3$	$-x^2$		prodotto di x^2 per $x^3 + 2x - 1$
$-x^4$	$-2x^2$	$+x$		prodotto di $-x$ per $x^3 + 2x - 1$
$+5x^3$	$+10x$	-5		prodotto di 5 per $x^3 + 2x - 1$
x^5	$-x^4$	$+7x^3$	$-3x^2$	$+11x$
				-5
				somma dei prodotti parziali = prodotto complessivo

Il prodotto di un polinomio $P(x)$ per se stesso n volte si dice **potenza n-esima** del polinomio e si indica $P^n(x)$; se $\text{grado } P(x) = r$, allora $\text{grado } P^n(x) = r^n$.

In particolare, la potenza n-esima del *binomio* $x + a$ è un polinomio di grado n della forma

$$\sum_{k=0}^n c_k a^k x^{n-k} = c_0 x^n + c_1 a x^{n-1} + c_2 a^2 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1} a^{n-1} x + c_n a^n. \quad (4.1)$$

I coefficienti dello sviluppo al variare di n partendo da $n = 0$ sono raccolti nella seguente tabella, detta triangolo di Tartaglia



nella quale ogni coefficiente è la somma dei due termini della riga precedente.

ESEMPIO 103.

$$(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

ESEMPIO 104.

$$(x-2)^4 = x^4 + 4x^3(-2) + 6x^2(-2)^2 + 4x(-2)^3 + (-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16.$$

ESEMPIO 105.

$$(2a+b)^4 = (2a)^4 + 4(2a)^3b + 6(2a)^2b^2 + 4(2a)b^3 + b^4.$$

ESEMPIO 106.

$$\begin{aligned}(ab-c)^5 &= (ab)^5 + 5(ab)^4(-c) + 10(ab)^3(-c)^2 + 10(ab)^2(-c)^3 + 5(ab)(-c)^4 + (-c)^5 = \\ &= a^5b^5 - 5a^4b^4c + 10a^3b^3c^2 - 10a^2b^2c^3 + 5abc^4 - c^5.\end{aligned}$$

ESEMPIO 107.

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}a^2b^3 - \sqrt{2}ab^2\right)^3 &= \\ &= \left(\frac{3}{2}a^2b^3\right)^3 + 3\left(\frac{3}{2}a^2b^3\right)^2(-\sqrt{2}ab^2) + 3\left(\frac{3}{2}a^2b^3\right)(-\sqrt{2}ab^2)^2 + (-\sqrt{2}ab^2)^3 = \\ &= \frac{27}{8}a^6b^9 - \frac{27}{4}\sqrt{2}a^5b^8 + 9a^4b^7 - 2\sqrt{2}a^3b^6.\end{aligned}$$

È utile ricordare le seguenti identità:

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$

Ricordiamo anche che il **quadrato di un polinomio è la somma dei quadrati di ciascun termine e dei doppi prodotti di ciascun termine per ognuno dei successivi**; ad esempio

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Composizione

La composizione non merita alcuna particolare osservazione, in quanto i polinomi sono definiti su tutto $\mathbb{R}$ e quindi è sempre possibile comporre due di essi. Ad esempio:

$$\begin{aligned}P(x) &= x^2 + x - 1, \\ Q(x) &= x + 1, \\ P(Q(x)) &= (x+1)^2 + (x+1) - 1 = x^2 + 3x + 1, \\ Q(P(x)) &= (x^2 + x - 1) + 1 = x^2 + x.\end{aligned}$$

Divisione

Le operazioni sui polinomi sinora incontrate danno come risultato una funzione dello stesso tipo; diverso è il caso del quoziente. La funzione

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

definita in tutto $\mathbb{R}$ esclusi gli eventuali punti in cui $Q(x)$ si annulla, è detta *funzione razionale*: in generale, $f(x)$ non è un polinomio. Questa affermazione è chiarita dal seguente risultato che si riferisce alla divisione tra due polinomi:

PROPOSIZIONE 4.

Siano $P(x)$, $Q(x)$ due polinomi di grado n e m rispettivamente, con $n \geq m$. Esistono due polinomi $S(x)$, $R(x)$ (univocamente determinati), tali che

$$\begin{aligned} \text{grado } R &< \text{grado } Q \\ P(x) &= S(x)Q(x) + R(x). \end{aligned}$$

Il polinomio $S(x)$ ha grado $n - m$ ed è detto **quoziente** della divisione di $P(x)$ per $Q(x)$; il polinomio $R(x)$ è il **resto**.

La funzione $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ è dunque un polinomio solo se è nullo il resto nella divisione (in questo caso $P(x)$ si dice **divisibile** per $Q(x)$ e $Q(x)$ si dice essere un **divisore** di $P(x)$).

Come esempio consideriamo i seguenti polinomi:

$$\begin{aligned} P(x) &= 4x^4 - 2x^3 + x - 2 \\ Q(x) &= 2x^2 - 3x - 1. \end{aligned}$$

Calcoliamo $\frac{P(x)}{Q(x)}$, utilizzando l'algoritmo ⁽²⁾ della divisione tra polinomi. Questo è analogo a quello della divisione tra due numeri, dove la richiesta sul resto è che sia minore del numero per il quale si divide.

$4x^4$	$-2x^3$	$+0x^2$	$+x$	-2	$2x^2$	$-3x$	-1
$-4x^4$	$+6x^3$	$+2x^2$			$2x^2$	$+2x$	$+4$
0	$4x^3$	$+2x^2$	$+x$				
	$-4x^3$	$+6x^2$	$+2x$				
	0	$8x^2$	$+3x$	-2			
		$-8x^2$	$+12x$	$+4$			
		0	$15x$	$+2$			

Abbiamo così ottenuto $S(x) = 2x^2 + 2x + 4$, $R(x) = 15x + 2$.

In sintesi, per utilizzare l'algoritmo della divisione si procede come segue:

²Algoritmo=sistema o schema di regole e di procedure di calcolo ben definite che portano alla soluzione di un problema in un numero finito di passi (operazioni). Deriva dal soprannome del matematico arabo del IX secolo Mohamed ibn-Musa detto al-Khuwarizmi e dal termine greco ἀριθμός (arithmós)= *numero*. Il titolo dell'opera più importante di al-Khuwarizmi fu *Al-iabr wa'l muqābalah* da cui deriva la parola *algebra*.

- ordinare i due polinomi secondo le potenze decrescenti della variabile
- dividere il primo termine di $P(x)$ per il primo termine di $Q(x)$ ($4x^4 : 2x^2$); il quoziente $2x^2$ ottenuto è il primo termine di $S(x)$
- moltiplicare questo quoziente per $Q(x)$ sottrarre questo prodotto a $P(x)$ (ovvero, sommarlo con il segno cambiato). Si ottiene così il resto parziale $4x^3 + 2x^2$
- aggiungere a questo un termine di $P(x)$: si ottiene $4x^3 + 2x^2 + x$
- ripetere il procedimento sopra per questo polinomio; si ottiene $2x$ con il resto parziale $8x^2 + 3x$
- ripetere l'operazione per il polinomio $8x^2 + 3x - 2$, si ottiene il quoziente 4 e resto parziale $15x + 2$
- il grado di questo resto è minore del grado di $Q(x)$, dunque il calcolo è terminato e l'ultimo resto parziale è quello effettivo della divisione.

Si osservi che se nell'uguaglianza

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

diamo ad x un valore ben preciso $x = a$, si ottiene

$$P(a) = S(a)Q(a) + R(a).$$

Quest'ultima uguaglianza **non** è la divisione del numero $P(a)$ per il numero $Q(a)$, dato che in generale non è detto che sia $R(a) < Q(a)$. Nell'esempio precedente, per $x = 2$ si ottiene:

$$48 = 16 \cdot 1 + 32$$

e questo non fornisce il quoziente ed il resto della divisione di 48 per 1.

Data la funzione razionale

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

con $\text{grado } P \geq \text{grado } Q$, dopo aver eseguito la divisione tra i due polinomi

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

sostituendo, si ottiene:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

con $\text{grado } R < \text{grado } Q$. In altre parole **una funzione razionale si può sempre scrivere come somma di un polinomio (eventualmente nullo) e di una funzione razionale in cui il grado del numeratore è minore del grado del denominatore.**

4.3 Un criterio di divisibilità tra polinomi: la regola di Ruffini

Consideriamo adesso un polinomio $P(x)$ di grado n e uno della forma $x - c$. Per stabilire se $P(x)$ è divisibile per $x - c$ è utile il seguente criterio (*regola di Ruffini*) ⁽³⁾

PROPOSIZIONE 5.

Il polinomio $P(x)$ è divisibile per $x - c$ se e solo se $P(c) = 0$.

³Paolo Ruffini, (Valentano (Vt) 1765, Modena 1822), dimostrò anche che non è possibile determinare le radici di un'equazione algebrica di grado superiore al quarto mediante una formula generale espressa in termini di operazioni algebriche da effettuare sui coefficienti. A questo stesso risultato arriverà vent'anni dopo il matematico norvegese Niels H. Abel (1802-1829), per cui ad esso viene dato il nome di teorema di Abel-Ruffini.

Dimostrazione

Nella divisione di $P(x)$ per $x - c$ si trova un quoziente $S(x)$ di grado $n - 1$ e un resto $R(x)$ con $\text{grado } R < 1$ (e dunque, necessariamente una costante r): $P(x) = S(x)(x - c) + r$. Per $x = c$ l'eguaglianza fornisce $P(c) = r$ e dunque il resto è nullo (cioè $P(x)$ è divisibile per $x - c$) se e solo se $P(c)$ è nullo.

Ad esempio, il polinomio $P(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4$ non è divisibile per $x - 2$ (perché $P(2) = 12$), mentre lo è per $x - 1$ (perché $P(1) = 0$).

Per determinare il quoziente della divisione di $P(x)$ per $x - c$ si può ricorrere all'algoritmo di Ruffini, che viene generalmente scritto sotto forma di tabella. Vediamo come si applica relativamente all'esempio precedente per la ricerca del quoziente e del resto nella divisione per $x - 2$. Riportiamo i calcoli nella tabella successiva.

	1	1	2	-4
2		2	6	16
	1	3	8	12

Nella prima riga abbiamo scritto i coefficienti di $P(x)$ ordinati secondo le potenze decrescenti di x , separando il termine noto con una barra verticale. Una seconda barra verticale è tracciata a sinistra dei coefficienti ed è preceduta dal numero c (nell'esempio sopra $c = 2$) disposto su una seconda riga, seguito da una barra orizzontale. La terza riga contiene i coefficienti del quoziente entro le due barre verticali e il resto a destra della seconda barra. Vediamo brevemente come si calcolano. Il primo coefficiente del quoziente è uguale al primo coefficiente di $P(x)$; il secondo si ottiene da questo moltiplicandolo per c (nell'esempio per 2) e sommandolo al secondo coefficiente di $P(x)$, e così via.

Come applicazione del *teorema di Ruffini* si può verificare che

- $x^n + a^n$ è divisibile per $x + a$ se n è *dispari*
- $x^n - a^n$ è divisibile per $x - a$
- $x^n - a^n$ è divisibile per $x + a$ se n è *pari*.

Per cui, ad esempio

$x^3 + 1$	è divisibile per	$x + 1$
$x^4 + 1$	non è divisibile per	$x + 1$
$x^3 - 1$	è divisibile per	$x - 1$
$x^3 - 1$	non è divisibile per	$x + 1$
$x^4 - 1$	è divisibile per	$x - 1$
$x^4 - 1$	è divisibile per	$x + 1$

L'algoritmo precedente permette di calcolare i quozienti di queste particolari divisioni. Per cui, ad esempio il quoziente della divisione di

$$x^n + a^n \quad \text{per} \quad x + a \quad \text{è} \quad x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-1}.$$

DEFINIZIONE 36.

Si chiama **radice** o **zero** di un polinomio ogni valore che lo annulla:

$$x = c \quad \text{radice di} \quad P(x) \quad \Longleftrightarrow \quad P(c) = 0.$$

Tenendo conto di questa definizione possiamo riscrivere la Proposizione 5 nella forma

PROPOSIZIONE 6.

Un polinomio è divisibile per $x - c$ se e solo se c è una sua radice.

Per un polinomio a coefficienti interi esiste un risultato che può facilitare la ricerca delle eventuali radici razionali. Si presti attenzione al fatto che queste radici razionali possono non esistere: questo non significa che il polinomio non ha alcuna *radice reale*, perchè potrebbe averne di irrazionali.

PROPOSIZIONE 7.

Se $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ è un polinomio a coefficienti interi, le sue eventuali radici razionali vanno ricercate tra i numeri $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p e q primi tra loro) dove p è un divisore di a_0 e q un divisore di a_n .

Dimostrazione.

Se $x = \frac{p}{q}$ è una radice, risulta:

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0,$$

ovvero, moltiplicando ambo i membri per q^n :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Riscrivendo questa identità nella forma

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n,$$

si deduce che p è un divisore di $a_0 q^n$; poichè p e q sono primi tra loro (e quindi p non può essere un divisore di q^n), necessariamente p è divisore di a_0 . Analogamente, riscrivendo l'identità nella forma

$$q(a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n,$$

si deduce che q divide $a_n p^n$ e dunque, non potendo essere divisore di p^n , lo è di a_n .

ESEMPIO 108.

Consideriamo il polinomio

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2.$$

Le sue eventuali radici razionali sono da ricercare tra i numeri $\pm 1, \pm 2$. Sostituendo questi valori nel polinomio si trova che $x = 2$ è l'unica radice razionale.

Dunque sappiamo che

$$P(x) = (x - 2) Q(x)$$

per un opportuno polinomio $Q(x)$. Per determinare $Q(x)$ si può procedere con la *regola di Ruffini*:

	1	-4	3	2
2		2	-4	-2
	1	-2	-1	0

Dunque:

$$P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 1).$$

4.4 Scomposizione di polinomi

È facile vedere che ogni polinomio $P(x)$ di grado n ammette divisori di grado 0 e di grado n .

Infatti, per $k \neq 0$ possiamo scrivere $P(x) = k \left(\frac{P(x)}{k} \right)$.

Questo prova che $P(x)$ è divisibile sia per k (polinomio di grado 0) che per $\frac{P(x)}{k}$ (polinomio di grado n).

DEFINIZIONE 37.

Un polinomio di grado $n \geq 1$ si dice **irriducibile** se non ammette divisori di grado k , con $0 < k < n$, cioè diversi da quelli già segnalati; in caso contrario, il polinomio si dice **riducibile**.

Scomporre un polinomio significa scriverlo come prodotto di fattori irriducibili, con una certa analogia con la scomposizione di un numero naturale nel prodotto di fattori primi.

Una teoria esauriente della scomposizione dei polinomi richiede l'allargamento del campo numerico dai numeri reali a quelli complessi; qui ci limiteremo a poche considerazioni, rimanendo nel campo reale.

- I polinomi di primo grado $P(x) = ax + b$ sono sempre irriducibili.

Il risultato è un'ovvia conseguenza della definizione.

- I polinomi di secondo grado

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

sono *riducibili* se e solo se

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Alla quantità Δ sopra definita si dà il nome di **discriminante** del polinomio. Per verificare l'affermazione precedente, riscriviamo $P(x)$ in modo opportuno:

$$\begin{aligned} P(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x \right) + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a^2} \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]. \end{aligned}$$

- Se $\Delta = 0$ il polinomio si riduce alla forma $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ e dunque è divisibile per $\left(x + \frac{b}{2a} \right)$.
- Se $\Delta > 0$ il termine dentro parentesi quadrata è differenza di due quadrati e quindi può essere scritto come prodotto di due polinomi di primo grado, ognuno dei quali è divisore di $P(x)$.
- Se $\Delta < 0$ il termine in parentesi è somma di due quadrati e non si annulla per nessun valore di x ; non avendo radici (reali), per quanto stabilito dal *teorema di Ruffini*, il polinomio è irriducibile (in campo reale).

Si può dimostrare che i polinomi irriducibili sin qui trovati sono gli unici possibili e dunque scomporre un polinomio significa scriverlo come prodotto di polinomi di primo grado e/o secondo grado con $\Delta < 0$.

Sia $P(x)$ un polinomio di grado n e sia α_1 una sua radice.

Per il *teorema di Ruffini* si ha allora

$$P(x) = (x - \alpha_1) Q_1(x),$$

dove $Q_1(x)$ è un polinomio di grado $n - 1$. A questo punto si hanno possibilità alternative:

α_1 non è radice di $Q_1(x)$

ed in tal caso si dice che α_1 è **radice semplice** di $P(x)$, oppure

α_1 è radice di $Q_1(x)$.

In questo secondo caso risulta

$$Q_1(x) = (x - \alpha_1) Q_2(x)$$

e dunque

$$P(x) = (x - \alpha_1)^2 \cdot Q_2(x),$$

con $Q_2(x)$ polinomio di grado $n - 2$. Le due alternative si ripresentano:

α_1 non è radice di $Q_2(x)$

e in tal caso si dice che

α_1 è radice doppia (o con molteplicità 2) di $P(x)$,

oppure

α_1 è radice di $Q_2(x)$

e dunque

$$Q_2(x) = (x - \alpha_1) Q_3(x),$$

da cui segue

$$P(x) = (x - \alpha_1)^3 Q_3(x).$$

È evidente che questo procedimento termina al più dopo n passi. In generale troveremo

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} Q_{m_1}(x)$$

con $Q_{m_1}(x)$ polinomio di grado $n - m_1$ e $Q_{m_1}(\alpha_1) \neq 0$. In questo caso diremo che

α_1 è radice con molteplicità m_1 .

Le altre eventuali radici reali di $P(x)$ sono quelle di $Q_{m_1}(x)$: per questo polinomio si possono ripetere le considerazioni svolte.

In generale la presenza di radici reali determina una scomposizione della forma

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r} Q(x)$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di grado $n - (m_1 + \cdots + m_r)$ privo di radici reali.

Il passaggio in *campo complesso* permette di provare che $Q(x)$ è prodotto di polinomi di secondo grado con $\Delta < 0$.

La scomposizione finale è dunque della forma

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_2)^{m_2} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{\mu_s}.$$

con $m_1 + \cdots + m_r + 2(\mu_1 + \cdots + \mu_s) = n$.

Se il polinomio ha solo radici reali, nella scomposizione compaiono solo fattori del primo ordine $x - \alpha_k$; se non ha radici reali compaiono solo fattori del secondo ordine $x^2 + p_h x + q_h$, con $\Delta < 0$.

La situazione generale si presenta quando le radici reali sono tali che la somma delle loro molteplicità è minore di n (e in questo caso non può essere $n - 1$, ma al massimo $n - 2$).

Da questo risultato si può dedurre una semplice conseguenza, che presentiamo in tre forme diverse, ma tra loro equivalenti:

- un polinomio di grado n ammette al massimo n radici reali distinte
- un polinomio di grado n che ammette più di n radici reali distinte è identicamente nullo
- due polinomi di grado n , che assumono lo stesso valore per $n + 1$ valori distinti di x , sono uguali.

Queste affermazioni si possono riscrivere facendo intervenire la molteplicità delle radici. Ad esempio, il primo risultato può essere riscritto nella forma:

- la somma delle molteplicità delle radici reali di un polinomio di grado n è al massimo n .

In analisi viene dimostrato che ogni polinomio di *grado dispari* ha almeno una radice reale (mentre è facile vedere che un polinomio di *grado pari* può avere o no radici reali; i polinomi $P(x) = (x - 1)^2$ e $P(x) = x^2 + 1$ esemplificano l'una e l'altra possibilità).

Nel capitolo seguente vedremo la formula risolutiva per trovare le radici dei polinomi di primo e di secondo grado. Aggiungiamo a puro scopo informativo che formule risolutive esistono anche per polinomi di terzo e quarto grado (che richiedono il passaggio al *campo complesso*), mentre per polinomi di grado maggiore al quarto, come già accennato in precedenza in una nota a piè di pagina, il *teorema di Abel-Ruffini* stabilisce l'impossibilità di trovare un'analoga formula. Questo significa che non esiste un metodo generale per trovare le radici dei polinomi di grado superiore al quarto e che questo è possibile solo in **certi casi particolari**. L'Analisi Matematica offre dei metodi per dimostrare l'esistenza di radici a priori (cioè senza effettuare il calcolo esplicito) mentre al Calcolo Numerico spetta il compito di approssimazione del valore con la precisione voluta (cioè con il numero richiesto di cifre significative esatte).

Concludiamo questo capitolo, presentando alcuni esempi di scomposizione di polinomi in fattori irriducibili.

ESEMPI

1. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2$

$$P(x) = x^2(x^2 - 3x + 5).$$

Il polinomio di secondo grado entro parentesi è irriducibile, perchè ha discriminante negativo, dunque questa è la scomposizione richiesta.

In particolare, $x = 0$ è l'unica radice reale ed ha molteplicità 2.

2. $P(x) = x^4 - x^2$

$$P(x) = x^2(x^2 - 1) = x^2(x - 1)(x + 1).$$

Il polinomio ha tre radici reali distinte $x = 0$ (doppia, ovvero con molteplicità 2) e $x = 1$, $x = -1$ (semplici, ovvero ciascuna con molteplicità 1). Si osservi che la somma delle molteplicità è uguale al grado del polinomio.

3. $P(x) = x^4 + x^2$

$$P(x) = x^2(x^2 + 1).$$

Il polinomio ha un'unica radice reale ($x = 0$, con molteplicità 2).

4. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 25x + 21$

Applicando la regola vista per i polinomi a coefficienti interi, si trova che le eventuali radici razionali devono essere ricercate tra i numeri $\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$.

Un esame diretto prova che $x = 1, x = 3, x = 7$ sono radici, necessariamente le uniche, essendo $P(x)$ un polinomio di grado 3. Dunque $P(x) = c(x-1)(x-3)(x-7)$. È facile vedere che $c = 1$, in quanto c deve coincidere con il coefficiente di x^3 .

5. $P(x) = x^4 + x^2 + 1$

Posto $t = x^2$, si ottiene il polinomio di secondo grado $Q(t) = t^2 + t + 1$, che ha $\Delta < 0$ e dunque è privo di radici reali. Evidentemente lo stesso vale per $P(x)$. Si ritrova questo risultato osservando che $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta $P(x) \geq 1$ (e dunque non esistono valori reali per cui $P(x) = 0$). Riscrivendo il polinomio nella forma

$$(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$$

cioè

$$(x^2 + 1)^2 - x^2,$$

si ottiene una differenza di quadrati che porta ad una scomposizione della forma

$$(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Poichè questi due polinomi di secondo grado hanno $\Delta < 0$, non sono ulteriormente scomponibili e dunque quella trovata è la scomposizione richiesta.

6. $P(x) = x^4 + 8a^2x^2 + 16a^4$

$$P(x) = (x^2 + 4a^2)^2$$

- Se $a = 0$ il polinomio si riduce a x^4 che è già nella forma richiesta ($x = 0$ radice con molteplicità 4).
- Se $a \neq 0$ il polinomio $x^2 + 4a^2$ ha $\Delta < 0$ e dunque anche in questo caso non è riducibile.

Capitolo 5

EQUAZIONI, DISEQUAZIONI, SISTEMI

5.1 Generalità sulle equazioni

Sia data una funzione $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 38.

Risolvere l'equazione $f(x) = 0$ (nell'incognita x) significa determinare (se esistono) quei numeri che sostituiti al posto di x nell'espressione di f verificano l'uguaglianza. Chiameremo questi numeri soluzioni o radici dell'equazione.

Ad esempio se $f(x) = x^2 - 1$ si ha che 1 e -1 sono soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$, in quanto $1^2 - 1 = 0$ e $(-1)^2 - 1 = 0$.

DEFINIZIONE 39.

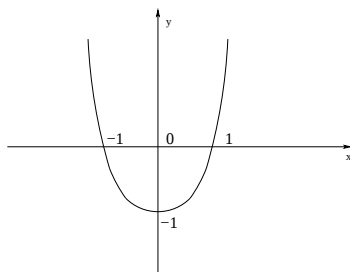
Determinare gli zeri di f significa trovare i valori della variabile $x \in A$ in corrispondenza dei quali si annulla la funzione, cioè **risolvere l'equazione** $f(x) = 0$ nell'incognita x .

All'equazione $f(x) = 0$ possiamo associare il sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

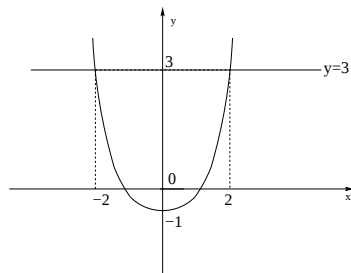
nel senso che $x = x_0$ è soluzione dell'equazione se e solo se $(x, y) = (x_0, 0)$ è soluzione del sistema. Questo ha un'immediata interpretazione geometrica come intersezione tra il grafico della funzione e l'asse delle x : le ascisse di questi punti forniscono tutti e soli gli zeri della funzione.

Ad esempio, l'equazione $x^2 - 1 = 0$ si interpreta come intersezione della parabola $y = x^2 - 1$ con l'asse delle x .



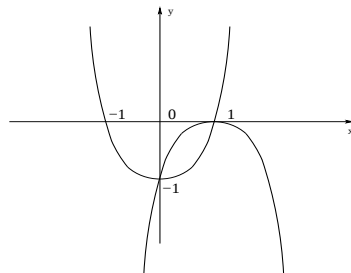
Più in generale possiamo cercare i valori di $x \in A$ per i quali la funzione assume un dato valore k risolvendo l'equazione $f(x) = k$. L'insieme delle soluzioni si dice costituire l'insieme di livello k per la funzione. L'interpretazione geometrica porta ad intersecare il grafico della funzione f con la retta orizzontale di equazione $y = k$.

Ad esempio, l'equazione $x^2 - 1 = 3$ si legge come intersezione della parabola $y = x^2 - 1$ con la retta di equazione $y = 3$.



Ancora piú in generale, date le funzioni f e g definite su uno stesso dominio A , possiamo studiare l'equazione $f(x) = g(x)$, corrispondente a cercare i punti in cui i grafici delle due funzioni si intersecano.

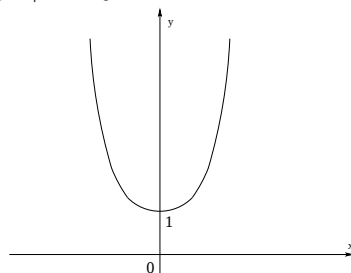
Ad esempio, l'equazione $x^2 - 1 = -x^2 + 2x - 1$ si riconduce all'intersezione della parabola $y = x^2 - 1$ con la parabola $y = -x^2 + 2x - 1$.



DEFINIZIONE 40.

Un'equazione si dice **impossibile** se è priva di soluzioni.

Dal punto di vista geometrico l'equazione $f(x) = 0$ è *impossibile* se il grafico della funzione f non interseca l'asse delle x ; ad esempio l'equazione $x^2 + 1 = 0$.



L'equazione $f(x) = k$, è impossibile se il grafico della funzione f non interseca la retta $y = k$. Analogamente l'equazione $f(x) = g(x)$ è impossibile se non c'è intersezione tra i grafici di f e di g .

DEFINIZIONE 41.

Si dice **identità** un'equazione verificata da ogni valore attribuito all'incognita.

Ad esempio: $2x + 3x = 5x$ oppure $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

Le equazioni considerate sono state tutte disposte secondo un grado di generalizzazione crescente che è solo apparente: in realtà si possono tutte ricondurre al primo tipo. Per quanto riguarda l'equazione $f(x) = k$ si ha:

$$f(x) = k \iff f(x) - k = 0,$$

ovvero cercare l'insieme di livello k della funzione $f(x)$ equivale a cercare gli zeri della funzione $f - k$. Ancora,

$$f(x) = g(x) \iff f(x) - g(x) = 0$$

cioè cercare i valori comuni alle due funzioni f e g equivale a cercare gli zeri della funzione $f - g$.

Queste osservazioni sono rese piú precise da quanto stiamo per aggiungere.

Date due equazioni $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$, diciamo che:

- **la prima implica la seconda** (ovvero, la seconda è conseguenza della prima) e scriviamo

$$f(x) = 0 \implies g(x) = 0,$$

se ogni soluzione della prima lo è anche della seconda, cioè se risulta

$$E_1 = \{x : f(x) = 0\} \subset E_2 = \{x : g(x) = 0\},$$

- **le due equazioni sono equivalenti** e scriviamo

$$f(x) = 0 \iff g(x) = 0,$$

se ogni soluzione dell'una lo è anche dell'altra e viceversa, cioè se i due insiemi di soluzioni coincidono:

$$E_1 = \{x : f(x) = 0\} = E_2 = \{x : g(x) = 0\}.$$

Ad esempio

$$x - 1 = 0 \implies (x - 1)(x + 1) = 0$$

perché $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{-1, 1\}$, ma

$$(x - 1)(x + 1) = 0 \not\Rightarrow x - 1 = 0;$$

invece

$$x - 1 = 0 \iff (x - 1)(x^2 + 1) = 0.$$

5.2 Risoluzione di un'equazione

Generalmente per risolvere un'equazione, si riscrive in una forma equivalente servendosi di un'equazione algebrica più semplice.

Questo si ottiene in due modi:

- *aggiungendo o sottraendo* ad ambo i membri dell'equazione una stessa funzione
- *moltiplicando o dividendo* ambo i membri per una stessa funzione *diversa da zero*. ⁽¹⁾

È importante che queste funzioni siano definite sul dominio in cui si studia l'equazione.

In particolare si ottiene un'equazione equivalente, "trasportando" un suo termine dal membro in cui si trova all'altro e cambiandolo di segno. Un'applicazione di questo risultato giustifica la possibilità di ricondurre ogni equazione alla forma $f(x) = 0$. Un'altra ovvia conseguenza è che eventuali termini comuni ai due membri possono essere *cancellati* (cioè "semplificati").

Consideriamo l'equazione: $2x - 1 = x + 2$

$$2x - 1 = x + 2 \iff 2x = x + 3$$

abbiamo aggiunto 1 ad ambo i membri, ovvero abbiamo *trasportato* il termine -1 al secondo membro, cambiandolo di segno.

$$2x = x + 3 \iff x = 3$$

abbiamo aggiunto $-x$ ad ambo i membri, ovvero abbiamo *trasportato* il termine x al primo membro, cambiandolo di segno.

¹È importante assicurarsi quando si **moltiplica o si divide** per un termine che esso **sia diverso da 0**, per non correre il rischio di trovarsi di fronte a risultati assurdi, come avviene nell'esempio che segue. Consideriamo l'identità: $x^2 - x^2 = x^2 - x^2$; al primo membro mettiamo una x in evidenza, mentre al secondo scomponiamo la differenza dei quadrati $x(x - x) = (x - x)(x + x)$ dividiamo per $(x - x)$ primo e secondo membro, ottenendo: $x = x + x$; dividiamo per x ambo i membri ottenendo infine $1 = 2$. L'errore commesso è stato quello di dividere per $x - x$ ovvero per 0.

ESEMPIO 109.

Risolvere l'equazione $x(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1)$.

$$x(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) \iff x = 2;$$

in questo caso abbiamo diviso ambo i membri per $x^2 + 1 \neq 0$.

ESEMPIO 110.

Risolvere l'equazione $x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$.

Si ha:

$$x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \iff x = 1;$$

questa equivalenza vale anche se la prima equazione è definita per $x \neq 0$, mentre la seconda è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO 111.

Risolvere l'equazione $x^2 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

È sbagliato scrivere

$$x^2 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} \iff x^2 = 1.$$

Infatti, la prima equazione è definita per $x \neq 1$, mentre la seconda è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Le due equazioni non sono equivalenti perché la prima ha come unica soluzione $x = -1$, mentre la seconda ha per soluzioni $x = \pm 1$. La scrittura giusta è

$$x^2 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \iff x = -1.$$

Gli esempi precedenti permettono di comprendere la seguente osservazione. In generale, le equazioni

$$f(x) = g(x), \quad \text{e} \quad f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$$

non sono equivalenti se il dominio di $h(x)$ è diverso da quello comune ad $f(x)$ e $g(x)$: il passaggio da un'equazione all'altra può *far perdere delle soluzioni o introdurre delle nuove*. Per controllare l'equivalenza, occorre esaminare il comportamento delle equazioni stesse nei punti in cui il dominio di h differisce da quello dell'equazione di partenza.

ESEMPIO 112.

Le equazioni

$$x^2 - 1 = 0, \quad (x^2 - 1) \frac{1}{x-1} = 0$$

non sono equivalenti.

Infatti la prima equazione ha per soluzioni $x = \pm 1$, la seconda $x = -1$. Nel passaggio dalla prima alla seconda equazione abbiamo moltiplicato per una funzione il cui dominio non è $\mathbb{R}$, ma $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Poiché $x = 1$ è soluzione della prima equazione, questa si perde nel passaggio.

ESEMPIO 113.

Le equazioni

$$x^2 - 1 = 0, \quad (x^2 - 1)(x - 2) = 0$$

non sono equivalenti

Questo discende dal fatto che la prima equazione ha per soluzione $x = \pm 1$; nel passaggio alla seconda si aggiunge la soluzione $x = 2$, dovuta al fattore $x - 2$.

Quanto osservato in questi esempi può essere sintetizzato dicendo che in generale le equazioni

$$f(x) = g(x), \quad \text{e} \quad f(x)h(x) = g(x)h(x)$$

non sono equivalenti se il dominio di h è diverso da quello di comune ad f e g , oppure se in qualche punto di questo dominio la funzione h si annulla.⁽²⁾ Il passaggio da un'equazione all'altra può introdurre nuove soluzioni o farne perdere alcune.

5.3 Generalità sulle disequazioni

DEFINIZIONE 42.

Data una funzione $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, determinarne il segno significa trovare i valori della variabile $x \in A$ in corrispondenza dei quali assume valori positivi o negativi, cioè significa risolvere la disequazione

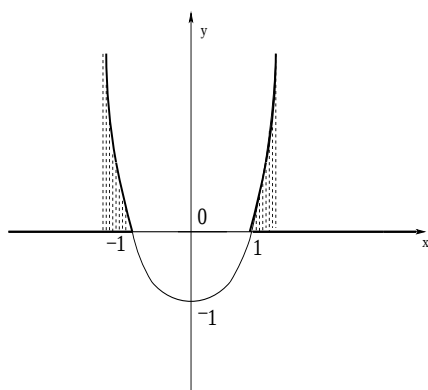
$$f(x) > 0 \quad \text{oppure} \quad f(x) < 0$$

nell'incognita x .

Dal punto di vista geometrico risolvere la disequazione $f(x) > 0$ significa cercare i punti del grafico della funzione che stanno al di sopra dell'asse delle x (cioè nel semipiano $y > 0$): le ascisse di tali punti sono le soluzioni della disequazione.

ESEMPIO 114.

Interpretazione geometrica della disequazione $x^2 - 1 > 0$: proiezione sull'asse x della parte di parabola situata nel semipiano $y > 0$.

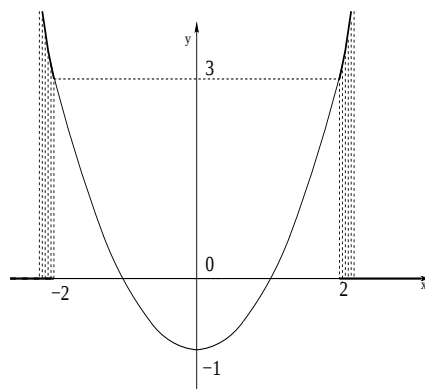


Più in generale possiamo cercare i valori $x \in A$ per i quali la funzione $f(x)$ si mantiene maggiore o minore di un dato valore k , resolvendo la disequazione $f(x) > k$ o $f(x) < k$. L'interpretazione geometrica porta a confrontare il grafico della funzione con la retta orizzontale $y = k$.

ESEMPIO 115.

Interpretazione geometrica, della disequazione $x^2 - 1 > 3$: proiezione sull'asse x della parte di parabola situata nel semipiano al di sopra della retta $y = 3$.

²Questa osservazione mette in evidenza ancora una volta quanto abbiamo già sottolineato in precedenza, ovvero, che quando si moltiplicano o si dividono ambo i membri di un'equazione per una stessa funzione si deve fare attenzione ai punti dove tale funzione si annulla.



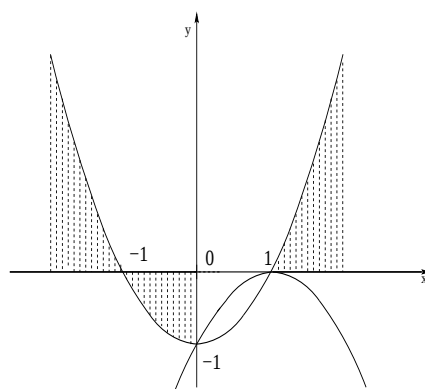
Ancora più in generale, date due funzioni definite su uno stesso dominio A , possiamo studiare la disequazione

$$f(x) > g(x),$$

corrispondente a cercare i punti in cui il grafico della funzione f sta al di sopra di quello della funzione g .

ESEMPIO 116.

Interpretazione geometrica della disequazione $x^2 - 1 > -x^2 + 2x - 1$: proiezione sull'asse x della parte di parabola $y = x^2 - 1$ situata al di sopra della parabola $y = -x^2 + 2x - 1$.



Accanto a queste disequazioni "strette" o "forti" si possono formulare analoghe disequazioni "deboli" : $f(x) \geq 0$ o $f(x) \leq 0$, $f(x) \geq k$ o $f(x) \leq k$, $f(x) \geq g(x)$ o $f(x) \leq g(x)$.

Come è stato già osservato per le equazioni, anche per le disequazioni la maggiore generalizzazione è solo apparente e possiamo ricondurre le varie disequazioni alla prima forma enunciata:

$$\begin{aligned} f(x) < k &\iff f(x) - k < 0 \\ f(x) > g(x) &\iff f(x) - g(x) > 0 \end{aligned}$$

Il discorso è analogo per le *disequazioni deboli*.

Dal punto di vista teorico non è restrittivo limitarci a considerare le disequazioni nella sola forma $f(x) > 0$ (o $f(x) \geq 0$) perché la disequazione $f(x) < 0$ si può riscrivere come $-f(x) > 0$ (ovvero la disequazione $f(x) \leq 0$ si può riscrivere come $-f(x) \geq 0$).

Come già per le equazioni, scriveremo:

$$\bullet \quad f(x) > 0 \implies g(x) > 0$$

e diremo che la prima disequazione implica la seconda (ovvero che la seconda è conseguenza della prima) se, indicati con E_1 , E_2 i rispettivi insiemi di soluzioni risulta $E_1 \subset E_2$

- $f(x) > 0 \iff g(x) > 0$

e diremo che le due disequazioni sono equivalenti, se $E_1 = E_2$.

Anche per le disequazioni siamo generalmente portati a cercare una forma equivalente che faccia uso di un'espressione più semplice. I procedimenti da seguire sono quelli già visti per le equazioni, ma con una importante differenza.

Si passa da una disequazione ad un'altra ad essa equivalente e nella stessa forma :

- aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri della disequazione una stessa funzione
- moltiplicando o dividendo ambo i membri della disequazione per una stessa funzione **strettamente positiva**.

È importante che queste funzioni siano definite nel dominio in cui si studia la disequazione. In particolare si ottiene una *disequazione equivalente* trasportando un termine da un membro all'altro e *cambiandolo di segno*.

- Se si moltiplica o si divide per una funzione **di segno sempre negativo** per ottenere una disequazione equivalente occorre **CAMBIARE IL VERSO della disequazione** (cioè scambiare il segno $<$ o $\leq$ con $>$ o $\geq$, e viceversa.)
- Se la funzione per cui si moltiplica o si divide, pur avendo segno costante presenta degli zeri, la disequazione ottenuta non è equivalente a quella data.

ESEMPIO 117.

Risolvere la disequazione:

$$2x - 1 > x + 2$$

Applicando le regole viste sopra, si ottiene

$$2x - 1 > x + 2 \iff 2x > x + 3 \iff x > 3$$

ESEMPIO 118.

Risolvere la disequazione:

$$x(x^2 + 1) > 2(x^2 + 1)$$

Applicando le regole viste sopra, si ottiene

$$x(x^2 + 1) > 2(x^2 + 1) \iff x > 2$$

ESEMPIO 119.

Risolvere la disequazione:

$$x + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{x}$$

Applicando le regole viste sopra, si ottiene

$$x + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{x} \iff x > 1$$

ESEMPIO 120.

Risolvere la disequazione:

$$x + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x}$$

In questo caso

$$x + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x} \quad \not\Longleftrightarrow \quad x \geq 0,$$

perché la prima disequazione non ha il valore $x = 0$ tra le sue soluzioni. Vale invece

$$x + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x > 0.$$

(Il valore $x = 0$ non appartiene al dominio della funzione $g(x) = \frac{1}{x}$).

Gli esempi precedenti ci permettono di affermare che in generale le disequazioni

$$f(x) > g(x), \quad f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$$

non sono equivalenti se il dominio di $h(x)$ è diverso da quello comune ad $f(x)$ e $g(x)$: nel passaggio da una espressione ad un'altra si possono perdere o guadagnare soluzioni. Per controllare l'equivalenza, occorre esaminare il comportamento della disequazione nei punti in cui il dominio di h differisce da quello di f e g .

ESEMPIO 121.

$$x > 0 \quad \not\Longleftrightarrow \quad x(x-1) > 0$$

Infatti la funzione $g(x) = x - 1$ non è sempre di segno positivo.

L'insieme delle soluzioni della nuova disequazione non è più $(0, +\infty)$ ma $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ come si trova subito imponendo che i due fattori x , $x - 1$ abbiano lo stesso segno.

ESEMPIO 122.

$$x > 1 \quad \not\Longleftrightarrow \quad x(x-1) > x-1$$

per lo stesso motivo sopra detto.

Per la seconda disequazione si ha:

$$x(x-1) > x-1 \iff x^2 - x > x-1 \iff x^2 - 2x + 1 > 0 \iff (x-1)^2 > 0$$

e dunque il suo insieme di soluzioni è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, diverso da quello delle disequazioni di partenza.

Da questi esempi possiamo dedurre che in generale le disequazioni

$$f(x) > g(x), \quad f(x)h(x) > g(x)h(x)$$

non sono equivalenti se la funzione h non ha segno costante positivo.

Tutte le considerazioni fatte si ripetono se invece del segno $>$ la disequazione presenta uno qualunque degli altri segni.

Si presti attenzione al fatto che

$$f(x) > g(x) \not\Rightarrow f^2(x) > g^2(x).$$

Ad esempio

$$x > -1 \not\Rightarrow x^2 > 1$$

mentre

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1.$$

Lo stesso vale per l'implicazione contraria

$$f^2(x) > g^2(x) \not\Rightarrow f(x) > g(x).$$

Ad esempio

$$\begin{aligned} x^2 > 1 &\not\Rightarrow x > 1 \\ x^2 > 1 &\not\Rightarrow -x > -1. \end{aligned}$$

Una condizione sufficiente a garantire l'equivalenza tra le due disequazioni è che f e g abbiano *segno costante positivo*. Infatti, se $f, g > 0$

$$f(x) > g(x) \iff f - g > 0 \iff (f - g)(f + g) > 0 \iff f^2(x) - g^2(x) > 0 \iff f^2(x) > g^2(x).$$

(Si osservi che $f + g > 0$ perché $f, g > 0$).

Alle stesse conclusioni si arriva se, invece che al quadrato, si eleva ad una qualunque *potenza pari*.

Per quanto riguarda le potenze *dispari*, si ha invece

$$f(x) > g(x) \iff f^3(x) > g^3(x),$$

e lo stesso vale per una *qualunque potenza dispari*.

Ad esempio,

$$x > -1 \iff x^3 > -1.$$

Queste osservazioni si possono ripetere per le disequazioni con gli altri segni $<$, $\leq$, $\geq$.

5.4 Equazioni e disequazioni di primo grado.

DEFINIZIONE 43.

Si dice **equazione algebrica** quella ottenuta eguagliando a zero un polinomio: $P(x) = 0$.

Il **grado dell'equazione** è il grado del polinomio considerato.

Un'equazione di *primo grado* ha dunque la forma

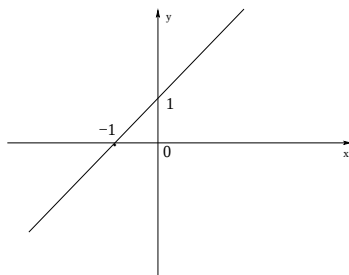
$$ax + b = 0.$$

Per essa si hanno i seguenti risultati

- se $a = 0$, $b \neq 0$, è **impossibile**
- se $a = 0$, $b = 0$, è **un'identità**
- se $a \neq 0$, ha come unica soluzione $x = -\frac{b}{a}$.

L'interpretazione geometrica consiste nell'identificare le soluzioni dell'equazione con l'intersezione tra l'asse x e la retta (non verticale) di equazione $y = ax + b$. Questa intersezione esiste ed è unica se la retta non è parallela all'asse x ($a \neq 0$); se la retta è parallela all'asse, non lo interseca ($a = 0$, $b \neq 0$) oppure si sovrappone ad esso ($a = 0$, $b = 0$.)

Interpretazione geometrica dell'equazione: $x + 1 = 0$: la retta $y = x + 1$ interseca l'asse delle x nel punto di ascissa -1 .



ESEMPIO 123.

Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione: $(k-1)x + 2 = 0$.

Se $k = 1$, l'equazione è impossibile

se $k \neq 1$, $x = -\frac{2}{k-1}$.

ESEMPIO 124.

Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione: $(k^2-1)x + (k-1) = 0$.

Se $k = 1$, l'equazione si riduce ad un'identità

se $k = -1$ l'equazione è impossibile

se $k \neq \pm 1$, $x = -\frac{1}{k+1}$.

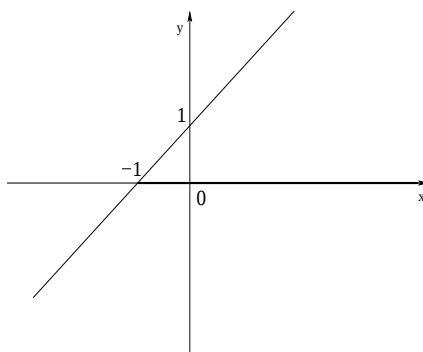
Per lo studio della disequazione $ax+b>0$ si hanno i seguenti risultati:

- se $a = 0$, $b > 0$, è sempre verificata
- se $a = 0$, $b \leq 0$, è impossibile
- se $a > 0$ allora $x > -\frac{b}{a}$
- se $a < 0$ allora $x < -\frac{b}{a}$

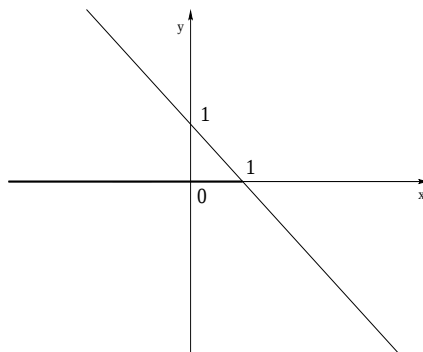
In maniera analoga si procede per le disequazioni con i simboli $<$, $\leq$, $\geq$.

Interpretazione geometrica: si tratta di cercare per quali valori delle ascisse i punti della retta $y = ax + b$ hanno *ordinata positiva*, ovvero per quali valori di x la retta data sta al di sopra dell'asse delle x .

Interpretazione geometrica della disequazione $x + 1 > 0$.



Interpretazione geometrica della disequazione $1 - x > 0$



ESEMPIO 125.

Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la disequazione: $(k-1)x + 2 > 0$.

Se $k = 1$, è sempre verificata

se $k > 1$ allora $x > -\frac{2}{k-1}$

se $k < 1$, $x < -\frac{2}{k-1}$.

ESEMPIO 126.

Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la disequazione: $(k-1)x + (k-1) > 0$.

Se $k = 1$, è impossibile

se $k > 1$ allora $x > -1$

se $k < 1$, allora $x < -1$.

5.5 Equazioni e disequazioni di secondo grado.

Consideriamo l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con a, b, c numeri reali assegnati e $a \neq 0$.

Consideriamo dapprima il *caso particolare* $a = 1, b = 0$:

$$x^2 + c = 0. \tag{5.1}$$

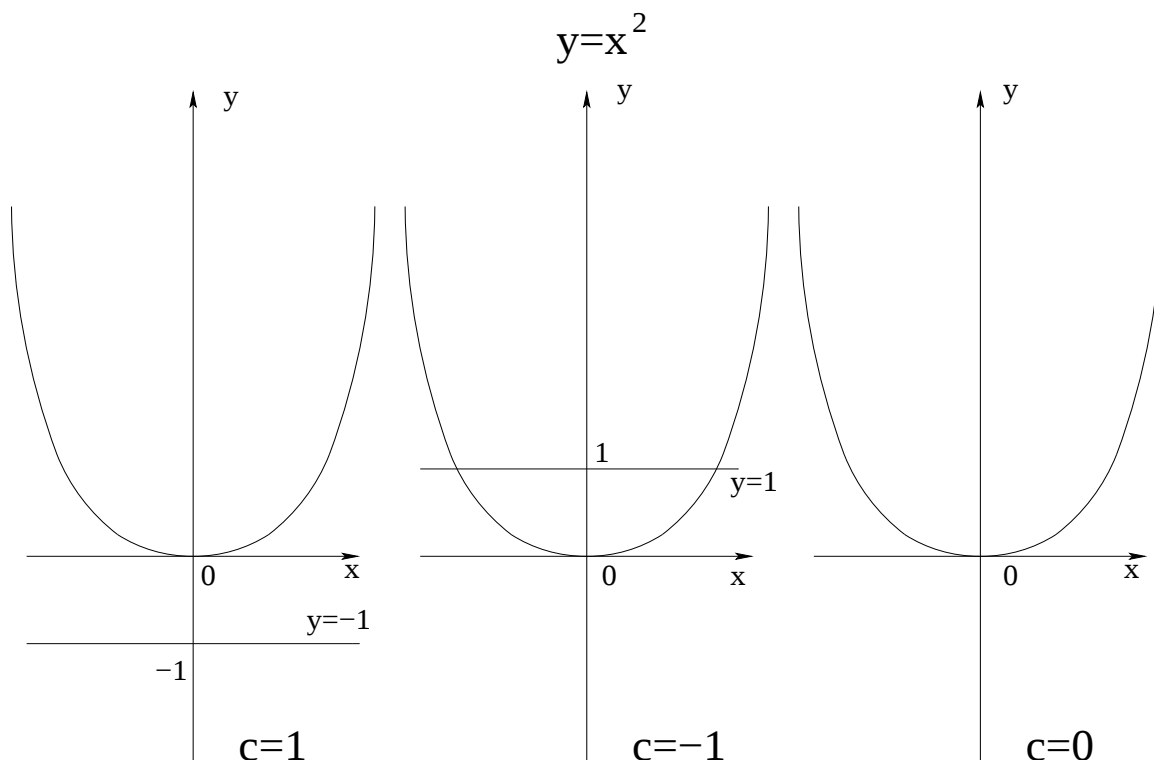
Si verifica facilmente che sono possibili tre casi:

- se $c > 0$, l'equazione è **impossibile**, cioè non ci sono soluzioni nel *campo reale* ⁽³⁾
- se $c = 0$, l'equazione ha la soluzione unica $x = 0$
- se $c < 0$, l'equazione ha due soluzioni, una opposta all'altra; infatti esistono due numeri che elevati al quadrato danno il valore positivo $-c$: la soluzione positiva è detta radice quadrata di $-c$ ⁽⁴⁾ ed è indicata con il simbolo $\sqrt{-c}$, quella negativa è l'opposta della precedente ed è dunque indicata con $-\sqrt{-c}$.

³La somma di due numeri positivi è sempre maggiore di 0.

⁴Oppure **radice quadrata aritmetica** di $-c$.

Interpretazione geometrica: intersezione della parabola $y = x^2$ con la retta orizzontale $y = -c$.



Ritorniamo al caso generale. Ripetendo i calcoli visti nel Capitolo IV, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x \right) + c = \\
 &= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a} = \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}
 \end{aligned}$$

con

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(ricordiamo che abbiamo definito tale quantità **discriminante** del polinomio di secondo grado). Dunque:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

L'equazione è del tipo (5.1) già visto sopra, con $c = -\frac{\Delta}{4a^2}$. Dunque:

- se $\Delta < 0$, l'equazione è **impossibile**: non ci sono soluzioni nel *campo reale*
- se $\Delta = 0$, l'equazione ammette un'unica soluzione

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- se $\Delta > 0$, l'equazione ammette due soluzioni x_1, x_2 dedotte da

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}},$$

cioè (formula risolutiva delle equazioni di secondo grado)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Interpretazione geometrica : risolvere un'equazione di secondo grado significa cercare le intersezioni tra l'asse delle x e la parabola di equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

che ha

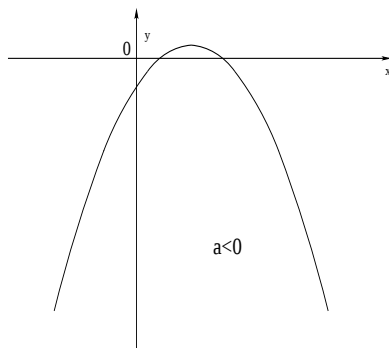
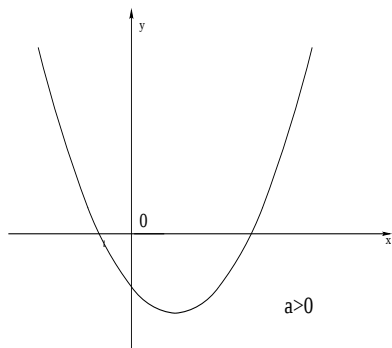
- asse di simmetria verticale
- vertice nel punto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

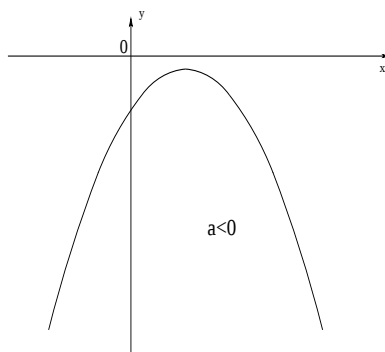
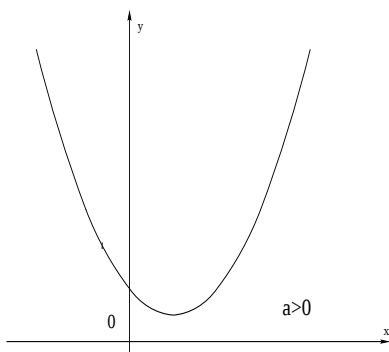
- concavità rivolta verso *l'alto* se $a > 0$
- concavità rivolta verso *il basso* se $a < 0$

Si presentano le seguenti possibilità:

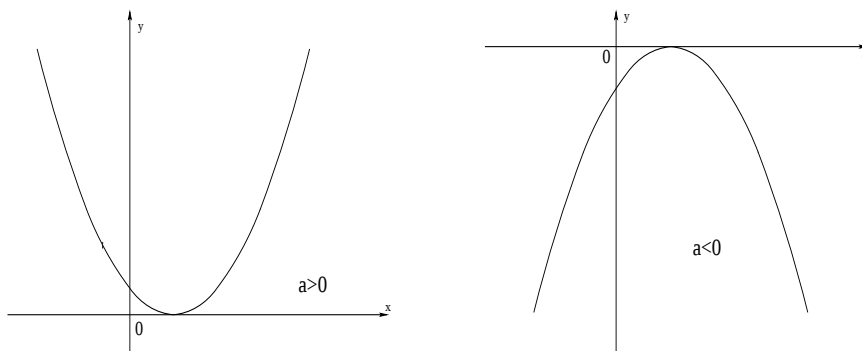
$\Delta > 0$



$\Delta < 0$



$$\Delta = 0$$



OSSERVAZIONE 15.

Nel caso $\Delta > 0$, indicate con x_1, x_2 le due soluzioni dell'equazione si ottiene

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Queste relazioni tra soluzioni e coefficienti valgono anche nel caso $\Delta = 0$, ponendo

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Se indichiamo con s la somma e con p il prodotto delle radici, l'equazione corrispondente può essere scritta nella forma

$$x^2 - s x + p = 0.$$

ESEMPIO 127.

Un'equazione ⁽⁵⁾ che ha come radici $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$ è data da

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Questa osservazione ci permette di risolvere problemi elementari come il seguente:

ESEMPIO 128.

Determinare due numeri la cui somma è -3 ed il prodotto è -70 .

In questo caso otteniamo l'equazione di secondo grado

$$x^2 + 3x - 70 = 0.$$

Applicando la formula risolutiva vista sopra, si ottiene

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-70)}}{2} = \begin{cases} 7 \\ -10 \end{cases}$$

⁵Le altre si possono ottenere da questa moltiplicandola per una costante.

L'osservazione (15) permette di ottenere informazioni sul segno delle radici, nel caso $\Delta > 0$.
Ad esempio riprendiamo l'esempio (127): $x^2 + x - 2 = 0$. La sequenza dei segni dei suoi coefficienti è

+ + -

Questo garantisce che il prodotto delle radici è negativo, cioè le due soluzioni hanno segno discorde; poiché anche la somma è negativa, la soluzione negativa è in valore assoluto maggiore di quella positiva. La validità di questi risultati è confermato anche dal valore delle soluzioni che abbiamo già trovato.

Consideriamo ora l'equazione

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

(che ha $\Delta = 1$); la sequenza dei segni dei coefficienti è

+ - +

Il prodotto delle soluzioni è positivo e quindi le due soluzioni sono concordi; la loro somma è positiva e quindi sono entrambe di segno positivo.

Consideriamo l'equazione

$$x^2 + x = 0$$

(che ha $\Delta = 1$); la sequenza dei segni è

+ + 0

Il prodotto delle radici è 0 e dunque una delle soluzioni è nulla; la somma è negativa e dunque l'altra soluzione è negativa (infatti le soluzioni sono $x_1 = 0$, $x_2 = -1$).

In generale, limitandoci a considerare *equazioni con coefficienti non nulli*, si ha la seguente regola (detta **regola di Cartesio**)⁽⁶⁾.
Conveniamo di dire che nella sequenza di segni c'è una **permanenza** quando sono uguali due segni contigui, una **variazione** in caso contrario. Ciò posto,

- ad ogni permanenza corrisponde una radice negativa
- ad ogni variazione corrisponde una radice positiva
- se la variazione precede la permanenza la radice positiva è maggiore del valore assoluto di quella negativa
- se la permanenza precede la variazione, la radice negativa è in valore assoluto maggiore di quella positiva.

Per quanto riguarda lo studio del **segno del polinomio di secondo grado**, possiamo procedere sia per *via algebrica* che per *via geometrica*. Distinguiamo i possibili casi.

- $\Delta > 0$

Indicate con x_1 , x_2 le due radici reali ($x_1 < x_2$), si può scrivere

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Dunque

1. se $a > 0$
 - $ax^2 + bx + c > 0$ per $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$
 - $ax^2 + bx + c < 0$ per $x \in (x_1, x_2)$
2. se $a < 0$
 - $ax^2 + bx + c > 0$ per $x \in (x_1, x_2)$
 - $ax^2 + bx + c < 0$ per $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

⁶René Descartes (detto Cartesio) (1596-1650), matematico e filosofo francese. Dettò un grande contributo al progresso della Matematica. Con il suo trattato *La géométrie* dette impulso allo sviluppo della Geometria Analitica, vista come la traduzione delle operazioni algebriche nel linguaggio della geometria.

- $\Delta = 0$

Indicata con x_1 l'unica radice (con molteplicità 2), si può scrivere

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Dunque

1. se $a > 0$
 - $ax^2 + bx + c > 0$ per ogni $x \neq x_1$
2. se $a < 0$
 - $ax^2 + bx + c < 0$ per ogni $x \neq x_1$.

- $\Delta < 0$

Scriviamo il polinomio nella forma (vedi sopra, alla dimostrazione della formula risolutiva)

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

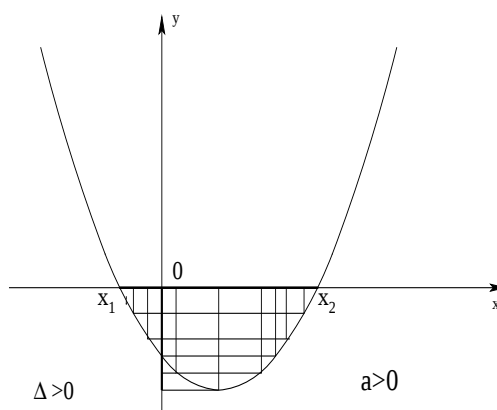
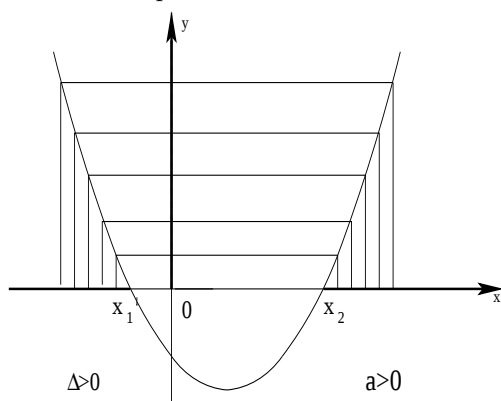
ovvero

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

Si osservi che la quantità entro parentesi è sempre positiva ⁽⁷⁾ e dunque il polinomio ha il segno di a

1. se $a > 0$
 - $ax^2 + bx + c > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
2. se $a < 0$
 - $ax^2 + bx + c < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

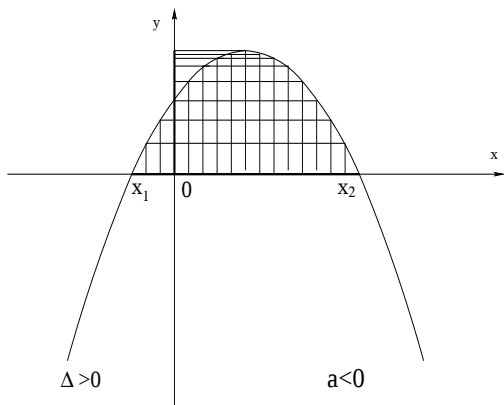
Dal punto di vista geometrico ritroviamo questi risultati esaminando le varie possibili posizioni della parabola $y = ax^2 + bx + c$ rispetto all'asse delle x .



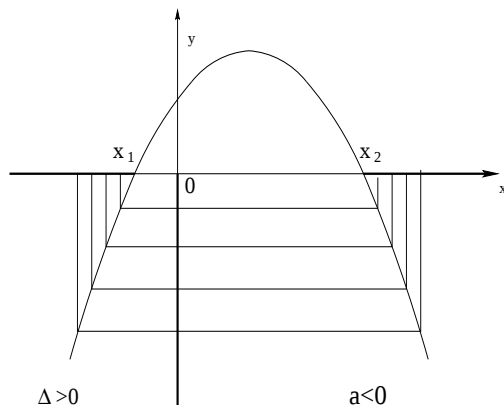
$$y = ax^2 + bx + c > 0 \text{ per } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$$

$$y = ax^2 + bx + c < 0 \text{ per } x \in (x_1, x_2)$$

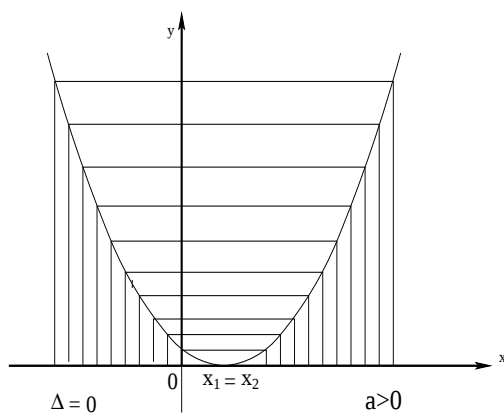
⁷Perché somma di quantità positive, essendo $-\Delta > 0$.



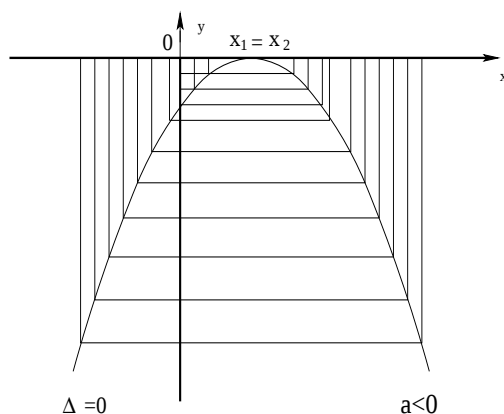
$$y = ax^2 + bx + c > 0 \text{ per } x \in (x_1, x_2)$$



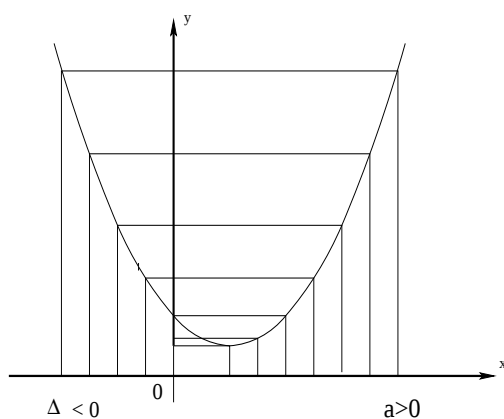
$$y = ax^2 + bx + c < 0 \text{ per } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$$



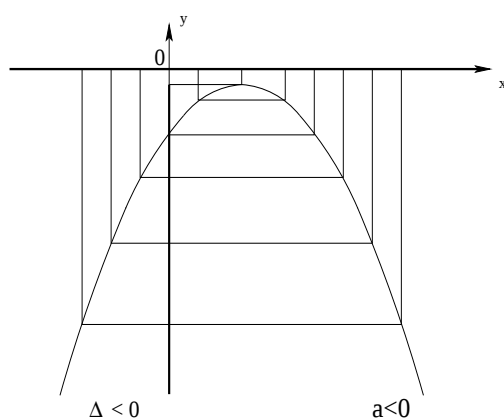
$$y = ax^2 + bx + c > 0 \text{ per } x \neq x_1, x_2$$



$$y = ax^2 + bx + c < 0 \text{ per } x \neq x_1, x_2$$



$$y = ax^2 + bx + c > 0 \text{ per } \forall x \in \mathbb{R}$$



$$y = ax^2 + bx + c < 0 \text{ per } \forall x \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO 129.

Risolvere la disequazione $x^2 - 2x + 4 > 0$.

Poiché $\Delta < 0$ e $a > 0$ la disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO 130.

Risolvere la disequazione $x^2 - 3x + 2 < 0$.

Poiché $\Delta > 0$, il polinomio ha due radici reali, che sono $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Essendo $a > 0$, la disequazione è verificata $\forall x \in (1, 2)$.

ESEMPIO 131.

Risolvere la disequazione $x^2 - 2x + 1 \leq 0$.

Poiché $\Delta = 0$, il polinomio ha come unica radice $x_1 = 1$. Essendo $a > 0$, la disequazione è verificata solo per $x = 1$.

ESEMPIO 132.

Risolvere la disequazione $x^2 + x + 1 \leq 0$.

Poiché $\Delta < 0$ e $a > 0$ la disequazione non è mai verificata.

ESEMPIO 133. Risolvere la disequazione $6x^2 - x - 1 \geq 0$.

Poiché $\Delta > 0$, il polinomio ha due radici reali $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Essendo $a > 0$, la disequazione è verificata per ogni $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

5.6 Equazioni e disequazioni di grado superiore al secondo

Ci limiteremo a presentare solo qualche esempio di equazione o disequazione algebrica di grado superiore al secondo.

(1) **Le equazioni** $x^n = k$, $n \in \mathbb{N}$.

1. se n è *dispari*

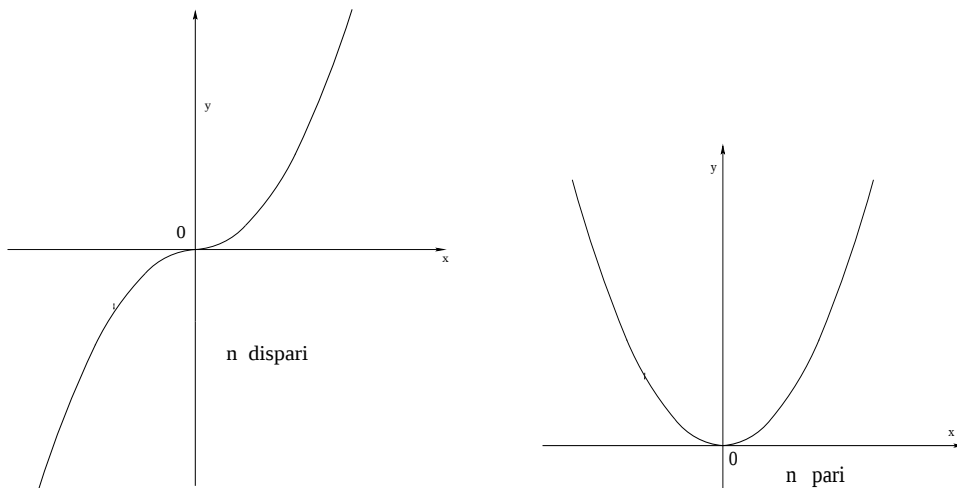
- per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'equazione ammette una ed una sola *soluzione reale*, detta **radice n-esima** di k indicata con $\sqrt[n]{k}$; il segno di questa soluzione è lo stesso di quello di k

2. se n è *pari*

- se $k < 0$ l'equazione non ammette soluzioni *reali* perché qualunque numero reale elevato ad un'esponente *pari* è una quantità positiva
- se $k = 0$ l'unica soluzione è $x = 0$
- se $k > 0$ l'equazione ha due soluzioni una opposta all'altra. Quella positiva è detta *radice n-esima*⁽⁸⁾ di k ed è indicata con $\sqrt[n]{k}$; l'altra soluzione è perciò $-\sqrt[n]{k}$.

Interpretazione geometrica: risolvere l'equazione $x^n = k$ equivale a cercare l'insieme di livello k per le funzioni $f(x) = x^n$. Abbiamo già visto i grafici di queste funzioni, distinguendo il caso *pari* dal caso *dispari*.

⁸O anche **radice aritmetica n-esima** di k .



Le figure confermano quanto detto sopra. Se n è *dispari*, ogni retta orizzontale $y = k$ interseca il grafico della funzione in uno ed un solo punto, ed infatti l'equazione ammette una ed una sola soluzione *reale*. Se n è *pari* la retta $y = k$ interseca il grafico della funzione in due punti (simmetrici rispetto all'asse y) se $k > 0$, in un solo punto se $k = 0$, in nessuno se $k < 0$.

(2) Le disequazioni $x^n > k$ (e analoghe).

Tenendo conto di quanto sopra stabilito, si ha:

1. se n è *dispari*

- le soluzioni sono le $x \in (\sqrt[n]{k}, +\infty)$

2. se n è *pari*

- se $k > 0$ le soluzioni sono le $x \in (-\infty, -\sqrt[n]{k}) \cup (\sqrt[n]{k}, +\infty)$
- se $k = 0$ le soluzioni sono le $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- se $k < 0$ le soluzioni sono tutte le $x \in \mathbb{R}$.

In maniera analoga si trattano le disequazioni con gli altri simboli ($<$, $\leq$, $\geq$).

(3) Equazioni e disequazioni che si abbassano di grado con un cambiamento di variabile

Limitiamoci ad un esempio. L'equazione

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

si può abbassare di grado ponendo $t = x^2$. In questo modo l'equazione assume la forma

$$t^2 + t - 2 = 0$$

che ha per soluzioni $t = -2$, $t = 1$. Ritornando alla variabile x , deve essere $x^2 = -2$ oppure $x^2 = 1$; la prima equazione non ha soluzioni, la seconda è risolta per $x = \pm 1$.

Consideriamo la disequazione

$$x^4 + x^2 - 2 > 0,$$

che possiamo abbassare di grado ponendo $t = x^2$:

$$t^2 + t - 2 > 0.$$

Questa disequazione è risolta da $t \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$. Deve dunque essere $x^2 < 1$ oppure $x^2 > 2$; la prima disequazione è risolta per ogni $x \in (-1, 1)$, la seconda da ogni $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. L'insieme delle soluzioni delle disequazioni di partenza è l'unione dei due insiemi trovati; deve dunque essere

$$x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

L'equazione che abbiamo studiato è un caso particolare delle equazioni della forma

$$a x^{2m} + b x^m + c = 0$$

che sono dette **trinomie**; nel caso $m = 2$ (che è quello visto sopra) si chiamano anche **biquadratiche**. Ponendo $t = x^m$, l'equazione si riconduce ad una equazione di secondo grado.

(4) Equazioni e disequazioni che si abbassano di grado con il teorema di Ruffini

Anche in questo caso, limitiamoci a presentare un esempio: l'equazione

$$x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$$

si abbassa di grado osservando che $x = 1$ è una soluzione. Utilizzando il *teorema di Ruffini* si ottiene

$$x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = (x - 1)(x^3 + 2x^2 + x + 2),$$

da cui segue che le eventuali altre soluzioni si trovano risolvendo l'equazione $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$. Osservando che $x = -2$ è una soluzione, si ottiene

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x + 2)(x^2 + 1).$$

Dunque l'equazione di partenza ha come soluzioni $x = 1$, $x = -2$.

I calcoli fatti permettono di risolvere anche la disequazione

$$x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 > 0$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)(x^2 + 1) > 0.$$

Poichè $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$, la disequazione data equivale a

$$(x - 1)(x + 2) > 0$$

che ha per soluzioni: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

(5) Equazioni reciproche

L'equazione

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad \text{con } a_0 \neq 0, \quad (5.2)$$

si definisce **reciproca** se i suoi coefficienti verificano

$$|a_n| = |a_0|, |a_{n-1}| = |a_1|, |a_{n-2}| = |a_2|, |a_{n-3}| = |a_3|, \dots$$

ovvero sono uguali i valori assoluti dei coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi. Il nome di *reciproche* è attribuito a queste equazioni per il fatto che se esse hanno per soluzione un numero k (ovviamente diverso da 0), allora ammettono come soluzione anche il suo *reciproco* $\frac{1}{k}$.

ESEMPIO 134.

Verificare che se $x_1 = k$ è soluzione dell'equazione reciproca

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (5.3)$$

allora anche $x_2 = \frac{1}{k}$ è soluzione di (5.3).

Infatti se sostituiamo nell'equazione il valore k

$$ak^3 + bk^2 + bk + a = 0$$

e dividiamo per k^3 , otteniamo

$$a + b \frac{1}{k} + b \frac{1}{k^2} + a \frac{1}{k^3} = 0;$$

questo significa che $x_2 = \frac{1}{k}$ è soluzione.

Nello studio di queste equazioni si distinguono due casi:

- equazioni reciproche di *prima specie*: se i suoi coefficienti verificano le condizioni

$$a_n = a_0, \quad a_{n-1} = a_1, \quad a_{n-2} = a_2, \quad a_{n-3} = a_3, \dots$$

- equazioni reciproche di *seconda specie*: se i suoi coefficienti verificano le condizioni

$$a_n = -a_0, \quad a_{n-1} = -a_1, \quad a_{n-2} = -a_2, \quad a_{n-3} = -a_3, \dots$$

Nelle equazioni reciproche di seconda specie, se n è pari, il coefficiente del termine "medio", ovvero di $x^{\frac{n}{2}}$, è zero (in quanto deve essere uguale al suo opposto). Ad esempio

$$\begin{aligned} 3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 &= 0 \\ 2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

sono equazioni reciproche rispettivamente di terzo grado e *prima specie*, di quarto grado e *seconda specie*.

Il seguente schema riassume i metodi di risoluzione delle equazioni reciproche.

1. grado dispari

- se è reciproca di *prima specie*, ammette la soluzione -1 e si divide dunque il polinomio per $x + 1$.
- se è reciproca di *seconda specie*, ammette la soluzione 1 e si divide il polinomio per $x - 1$.

2. grado pari

- se è reciproca di *prima specie* si divide per $x^{\frac{n}{2}}$ e si pone $y = x + \frac{1}{x}$, dopo aver raccolto i termini con coefficienti uguali (vedi esempi sotto)
- se è reciproca di *seconda specie* ammette le soluzioni 1 e -1 e si divide per i polinomi $x - 1$ e $x + 1$.

ESEMPIO 135.

Risolvere l'equazione $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$.

Si tratta di un'equazione reciproca con esponente dispari e di prima specie. Si verifica facilmente che $x = -1$ è una soluzione e dunque il polinomio al primo membro è divisibile per $x + 1$; utilizzando il *teorema di Ruffini*, si può abbassare di grado:

$$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = (x + 1)(3x^2 + 10x + 3) = 0.$$

Le soluzioni sono $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -\frac{1}{3}$.

ESEMPIO 136.

Risolvere l'equazione $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$.

Si tratta di un'equazione reciproca con esponente dispari e di seconda specie. Si verifica facilmente che $x = 1$ è una soluzione. Anche in questo caso abbassiamo il grado con il *teorema di Ruffini*, dividendo per $x - 1$:

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (x - 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0.$$

Le soluzioni sono $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2$.

ESEMPIO 137.

Risolvere l'equazione $5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0$.

Si tratta di un'equazione reciproca con esponente pari e di seconda specie. Si verifica facilmente che $x = 1$ e $x = -1$ sono soluzioni. Anche in questo caso abbassiamo il grado con il *teorema di Ruffini*, dividendo per $x - 1$ e per $x + 1$:

$$5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = (x - 1)(x + 1)(5x^2 - 26x + 5) = 0.$$

Le soluzioni sono $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{5}$, $x_4 = 5$.

ESEMPIO 138.

Risolvere l'equazione $x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0$.

Si tratta di un'equazione reciproca di prima specie, di grado pari. Dividiamo per x^2

$$x^2 - 2x - 6 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

da cui

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

Poniamo

$$y = x + \frac{1}{x} \tag{5.4}$$

da cui

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \iff x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Sostituendo, si ottiene

$$y^2 - 2y - 8 = 0.$$

Le radici di quest'ultima equazione sono $y_{1,2} = \{4, -2\}$. Sostituendo questi valori nella (5.4), si ottiene

$$4 = x + \frac{1}{x}, \quad -2 = x + \frac{1}{x},$$

le cui soluzioni sono rispettivamente $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ e $x_{3,4} = -1$ che sono anche le radici dell'equazione di partenza. Si osservi che i valori $2 \pm \sqrt{3}$ sono l'uno il reciproco dell'altro.

ESEMPIO 139.

Risolvere l'equazione: $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

Procediamo come nell'esercizio precedente, dividendo per x^2

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$$

e ponendo $y = x + \frac{1}{x}$

$$6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0 \iff 6y^2 - 35y + 50 = 0.$$

Otteniamo $y_1 = \frac{10}{3}$, $y_2 = \frac{5}{2}$, da cui

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \iff 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

e

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \iff 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

Da queste equazioni otteniamo le soluzioni dell'equazione data: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = 3$.

5.7 Sistemi di equazioni e disequazioni

Consideriamo un sistema, che per semplicità supponiamo costituito da due equazioni, e lo scriviamo nella forma

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Poniamo

$$E_1 = \{x : f(x) = 0\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{x : g(x) = 0\}.$$

DEFINIZIONE 44.

Risolvere il sistema (5.5) significa determinare gli elementi dell'insieme

$$E_1 \cap E_2$$

*ovvero l'intersezione tra le soluzioni della prima equazione e quelle della seconda. Se l'intersezione è **vuota** il sistema **non ha soluzioni** e diremo che è **impossibile**.*

Analogamente, per determinare le soluzioni di un sistema di disequazioni della forma

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

si devono intersecare le soluzioni della prima disequazione con quelle della seconda.

Discorso simile per sistemi composti da più di due equazioni o disequazioni. Un buon aiuto nella risoluzione di questi problemi è costituito dalla costruzione di diagrammi sui quali si rappresentano le soluzioni delle singole equazioni o disequazioni, come vedremo negli esempi che seguono.

ESEMPIO 140.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^3 - x = 0 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \\ 9 - x^2 > 0 \end{cases}$$

L'equazione $x^3 - x = 0$ è risolta per $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

La disequazione $x^2 - x - 2 \geq 0$ è risolta per $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.

La disequazione $9 - x^2 > 0$ è risolta per $x \in (-3, 3)$.

Osserviamo che l'intersezione dei tre insiemi di soluzioni è costituita dal solo punto -1 .

ESEMPIO 141.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 5x \leq 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 5x \geq 0 &\iff x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty) \\ x^2 - 5x + 6 < 0 &\iff x \in (2, 3). \end{aligned}$$

Il sistema è verificato nell'intersezione dei due insiemi di soluzioni; è facile vedere che questa intersezione è vuota, cioè il sistema è impossibile.

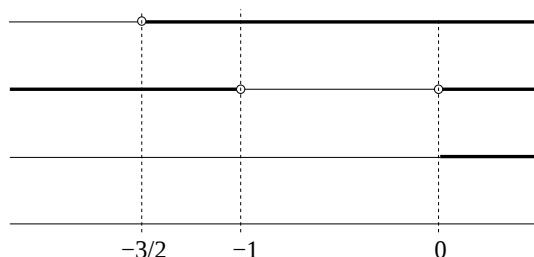
ESEMPIO 142.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x + 1 > x - 2 \\ 1 - x < x^2 + 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 1 > x - 2 \\ 1 - x < x^2 + 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x > -3 \\ x^2 + x > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x < -1 \text{ oppure } x > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x > 0.$$

Per passare dall'ultimo sistema alla soluzione, cioè per trovare l'insieme in cui sono verificate contemporaneamente le tre condizioni, può essere utile una visualizzazione come quella che segue. Nella figura sottostante la linea continua più marcata rappresenta l'insieme in cui una data condizione è verificata. L'intersezione di questi insiemi corrisponde a scegliere in tutti i casi la linea continua più marcata. Nell'esempio dato, questo insieme è la semiretta $(0, +\infty)$.

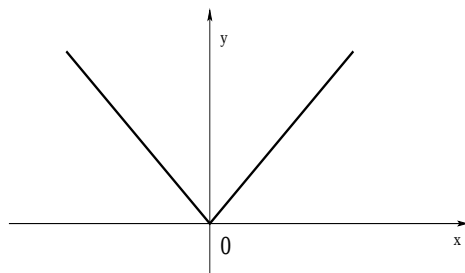


5.8 Equazioni e disequazioni contenenti il valore assoluto

Abbiamo già visto la definizione del valore assoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Il grafico della funzione $|x|$ è il seguente



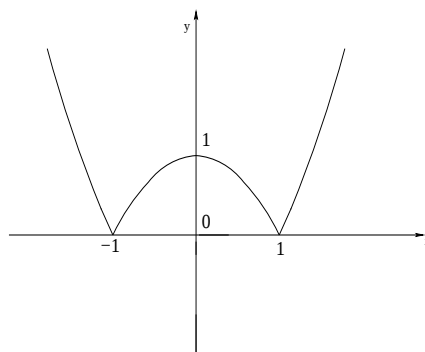
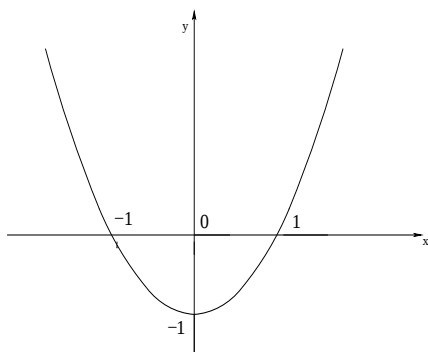
Data la funzione $|f|$, si ha dunque:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Il grafico della funzione $|f|$ si può dunque dedurre facilmente da quello di f : coincide con questo nei punti in cui $f \geq 0$, è l'opposto (cioè il simmetrico rispetto all'asse x) nei rimanenti punti.

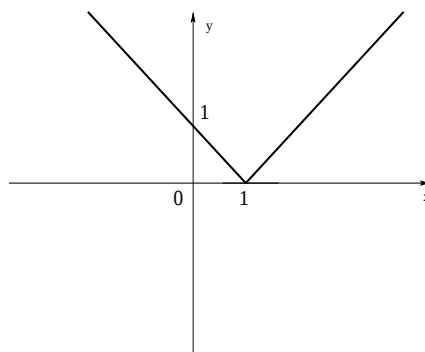
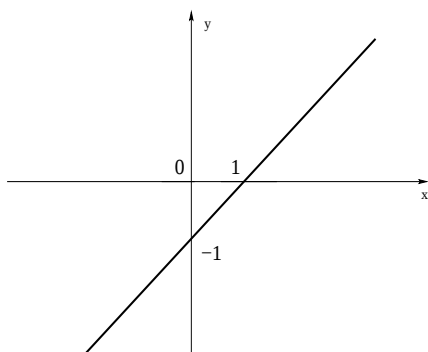
ESEMPIO 143.

Tracciare il grafico di $y = x^2 - 1$ e di $y = |x^2 - 1|$



ESEMPIO 144.

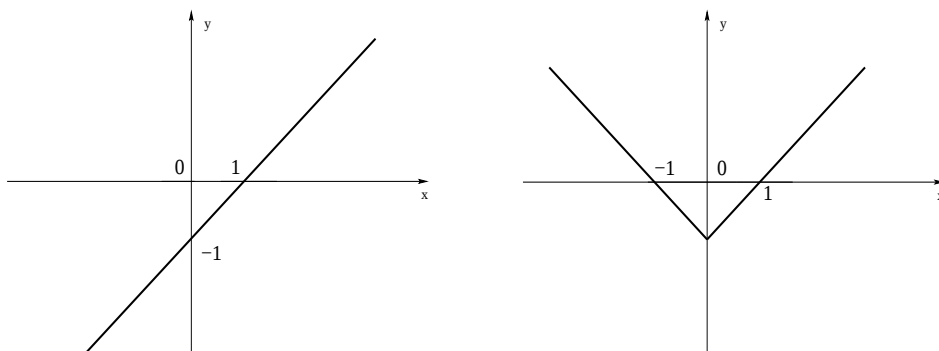
Tracciare il grafico di $y = x - 1$ e di $y = |x - 1|$



Per quanto riguarda il grafico della funzione $y = f(|x|)$, basta osservare che, essendo questa una funzione pari, il grafico è simmetrico rispetto all'asse y . Il grafico coincide dunque con quello di $y = f(x)$ per $x \geq 0$ ed è il simmetrico di questo per $x < 0$.

ESEMPIO 145.

Tracciare il grafico di $y = x - 1$ e di $y = |x| - 1$



Ciò stabilito consideriamo l'equazione

$$|f(x)| = C,$$

Sono possibili i seguenti casi

- se $C < 0$, l'equazione non ha soluzioni
- se $C = 0$, l'equazione è equivalente a $f(x) = 0$
- se $C > 0$, l'equazione equivale a

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = C \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = C \end{cases} \quad (5.7)$$

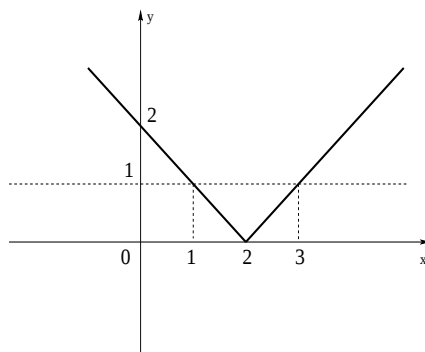
cioè

$$f(x) = C \quad \text{oppure} \quad f(x) = -C.$$

ESEMPIO 146.

Risolvere l'equazione: $|x - 2| = 1$.

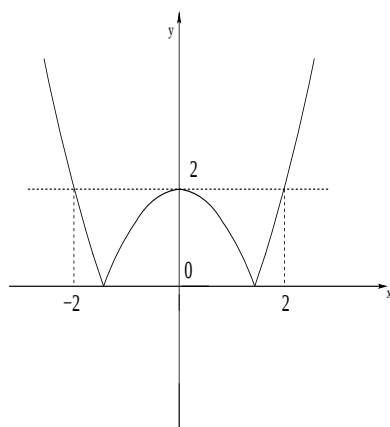
$$|x - 2| = 1 \iff x - 2 = 1 \quad \text{oppure} \quad x - 2 = -1 \iff x = 3 \quad \text{oppure} \quad x = 1.$$



ESEMPIO 147.

Risolvere l'equazione: $|x^2 - 2| = 2$.

$$|x^2 - 2| = 2 \iff x^2 - 2 = 2 \quad \text{oppure} \quad x^2 - 2 = -2 \iff x^2 = 4 \quad \text{oppure} \quad x^2 = 0 \iff x \in \{-2, 0, 2\}.$$



Se l'equazione è data nella forma

$$|f(x)| = |g(x)|,$$

possiamo scriverla in modo equivalente come

$$f(x) = g(x) \quad \text{oppure} \quad f(x) = -g(x),$$

(cioè le sue soluzioni sono date dall'unione degli insiemi di soluzioni delle due equazioni).

Dimostrazione

A seconda del segno di f e di g dobbiamo distinguere quattro casi:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \\ -f(x) = g(x) \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \\ -f(x) = -g(x). \end{array} \right.$$

Ciascuno dei sistemi equivale rispettivamente ai seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) < 0 \\ f(x) = g(x). \end{array} \right.$$

Ma

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) < 0 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right. \iff f(x) = g(x)$$

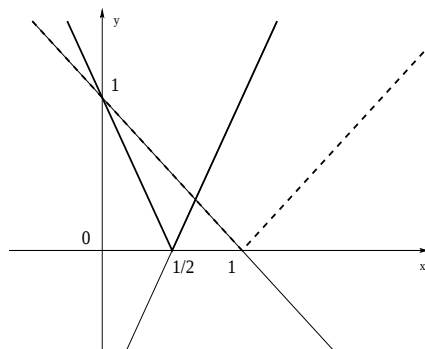
e

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{array} \right. \iff f(x) = -g(x).$$

ESEMPIO 148.

Risolvere l'equazione: $|2x - 1| = |1 - x|$

$$|2x - 1| = |1 - x| \iff 2x - 1 = 1 - x \text{ oppure } 2x - 1 = x - 1 \iff x = \frac{2}{3} \text{ oppure } x = 0$$



ESEMPIO 149.

Risolvere l'equazione: $|x^2 - 1| = |x - 2|$.

$$|x^2 - 1| = |x - 2| \iff x^2 - 1 = x - 2 \text{ oppure } x^2 - 1 = 2 - x \iff x^2 - x + 1 = 0 \text{ oppure } x^2 + x - 3 = 0.$$

La prima equazione non ha soluzione ($\Delta < 0$); la seconda ha per soluzioni $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

ESEMPIO 150.

Risolvere l'equazione: $x^2 - |x| - 2 = 0$.

Posto $t = |x|$, ci riconduciamo all'equazione $t^2 - t - 2 = 0$ che ha per soluzioni $t = -1$, $t = 2$. L'equazione $|x| = -1$ non ha soluzioni, mentre $|x| = 2$ fornisce $x_{1,2} = \pm 2$.

ESEMPIO 151.

Risolvere l'equazione: $|x^2 - x| = x + 1$.

Risolvere l'equazione data equivale a risolvere i seguenti sistemi

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - x = x + 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - x = -x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 = -1. \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzioni, il primo fornisce:

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \iff x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

ESEMPIO 152.

Risolvere l'equazione: $|x| + |x - 1| - |2x + 4| = 0$.

Possiamo esplicitare i moduli ottenendo i seguenti sistemi, l'unione delle cui soluzioni ci dà le soluzioni dell'equazione di partenza:

$$(1) \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ x + x - 1 - (2x + 4) = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x < -2 \\ x + x - 1 + 2x + 4 = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \\ x \geq -2 \\ x - x + 1 - (2x + 4) = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \\ x < -2 \\ x - x + 1 + 2x + 4 = 0 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} x < 0 \\ x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ -x + x - 1 - (2x + 4) = 0 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} x < 0 \\ x \geq 1 \\ x < -2 \\ -x + x - 1 + 2x + 4 = 0 \end{cases}$$

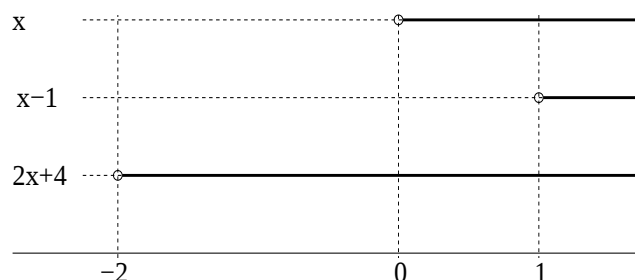
$$(7) \begin{cases} x < 0 \\ x < 1 \\ x \geq -2 \\ -x - x + 1 - (2x + 4) = 0 \end{cases} \quad (8) \begin{cases} x < 0 \\ x < 1 \\ x < -2 \\ -x - x + 1 + 2x + 4 = 0. \end{cases}$$

I sistemi (2), (4), (5), (6), non hanno soluzioni (perché ad esempio nel (2) si dovrebbe avere contemporaneamente $x \geq 0$ e $x < -2$). In definitiva rimangono i seguenti sistemi

$$(1) \begin{cases} x \geq 1 \\ -5 = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ -2x - 3 = 0 \end{cases} \quad (7) \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ -4x - 3 = 0 \end{cases} \quad (8) \begin{cases} x < -2 \\ 5 = 0. \end{cases}$$

L'unico sistema che ammette soluzione è il (7). ⁽⁹⁾ Dunque la soluzione dell'equazione data è $x = -\frac{3}{4}$.

Più semplicemente possiamo studiare il segno entro il valore assoluto e riportare i risultati in un diagramma:



Successivamente, possiamo studiare l'equazione negli intervalli così individuati, ritrovando i sistemi che nella precedente risoluzione erano stati contrassegnati dai numeri (1), (3), (7), (8).

Consideriamo adesso la disequazione

$$|f(x)| > C.$$

Anche in questo caso si presentano tre possibilità:

- se $C < 0$ la disequazione è verificata per ogni $x \in \text{Dom } f$,
- se $C = 0$ la disequazione equivale a $f(x) \neq 0$,

⁹Infatti nei sistemi (1) e (8) le equazioni ottenute sono impossibili, mentre nel sistema (3) la soluzione dell'equazione non cade nell'intervallo determinato dalla disequazione.

- se $C > 0$ la disequazione equivale a

$$f(x) > C \quad \text{oppure} \quad f(x) < -C.$$

Infatti le condizioni

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > C \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > C \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > C \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) < -C \end{cases}$$

equivalgono alle disequazioni

$$f(x) > C \quad \text{oppure} \quad f(x) < -C$$

In maniera analoga per

$$\boxed{|f(x)| \geq C,}$$

- se $C \leq 0$ la disequazione è verificata in tutto il dominio di f
- se $C > 0$ la disequazione equivale alle seguenti

$$f(x) \geq C \quad \text{oppure} \quad f(x) \leq -C.$$

Per la disequazione

$$\boxed{|f(x)| < C,}$$

si ha invece:

- se $C \leq 0$ la disequazione è impossibile;
- se $C > 0$ la disequazione equivale alle seguenti

$$-C < f(x) < C$$

Infatti le condizioni

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < C \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) < C \end{cases}$$

ovvero

$$0 \leq f(x) < C \quad \text{oppure} \quad -C < f(x) < 0$$

equivalgono a

$$-C < f(x) < C.$$

In maniera analoga per

$$\boxed{|f(x)| \leq C,}$$

- se $C < 0$ la disequazione è impossibile;

- se $C = 0$ la disequazione equivale a $f(x) = 0$
- se $C > 0$ la disequazione equivale alle disequazioni

$$-C \leq f(x) \leq C.$$

ESEMPIO 153.

Risolvere la disequazione: $|x^2 - 1| \leq 1$

$$|x^2 - 1| \leq 1 \iff \begin{cases} x^2 - 1 \leq 1 \\ x^2 - 1 \geq -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 \leq 2 \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \iff x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

La disequazione

$$|f(x)| < g(x),$$

equivale al sistema

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ -g(x) \leq f(x) \leq g(x), \end{cases}$$

mentre la disequazione

$$|f(x)| > g(x),$$

equivale ai sistemi

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ x \in \text{Dom } f \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$$

Si procede in maniera analoga per le disequazioni di questo tipo contenenti i simboli $\leq, \geq$.

ESEMPIO 154.

Risolvere la disequazione: $|x - 1| \geq 2 - x$.

Seguendo lo schema esposto sopra, otteniamo

$$2 - x \leq 0 \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 2 - x > 0 \\ x - 1 \geq 2 - x \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 2 - x > 0 \\ x - 1 \leq -2 + x. \end{cases}$$

Tenuto conto che l'ultimo sistema è impossibile perché la disequazione $x - 1 \leq -2 + x$ non è verificata (equivale a $-1 \leq -2$),

$$2 \leq x \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 2 \\ x \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

In definitiva deve dunque essere: $x \geq \frac{3}{2}$.

ESEMPIO 155.

Risolvere la disequazione: $|x - 7| > 1 + x^2$.

$$|x - 7| > 1 + x^2 \iff x - 7 > 1 + x^2 \quad \text{oppure} \quad x - 7 < -1 - x^2 \iff x^2 - x + 8 < 0 \quad \text{oppure} \quad x^2 + x - 6 < 0.$$

La prima disequazione è impossibile ($\Delta < 0$); la seconda, e quindi quella di partenza, è risolta per $x \in (-3, 2)$.

ESEMPIO 156.

Risolvere la disequazione: $|x^2 - 1| < x - 2$.

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2 - x < x^2 - 1 \\ x^2 - 1 < x - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + x - 3 > 0 \\ x^2 - x + 1 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [2, +\infty) \\ x \in \left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right) \\ \emptyset \end{cases}.$$

La disequazione è impossibile.

Con considerazioni simili a quelle viste sopra, si dimostra che la disequazione

$$|f(x)| < |g(x)|,$$

equivale ai sistemi

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} g(x) < 0 \\ g(x) < f(x) < -g(x), \end{cases}$$

mentre la disequazione

$$|f(x)| > |g(x)|,$$

equivale ai sistemi

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ -f(x) < g(x) < f(x) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) < g(x) < -f(x). \end{cases}$$

Risultati analoghi per le disequazioni con il segno $\geq$ o $\leq$.

ESEMPIO 157.

Risolvere la disequazione: $|x + 2| < |x^2 - 1|$.

Otteniamo i sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 < x + 2 < x^2 - 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 1 < x + 2 < 1 - x^2 \end{cases}$$

che possiamo riscrivere nella forma equivalente

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 < x + 2 \\ x + 2 < x^2 - 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 1 < x + 2 \\ x + 2 < 1 - x^2 \end{cases}$$

ovvero

$$(I) \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \\ x^2 - x - 3 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II) \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - x - 3 < 0 \\ x^2 + x + 1 < 0 \end{cases}$$

Per il sistema (I) si ottiene:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \\ x \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

e quindi

$$x \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right).$$

Il sistema (II) fornisce:

$$\begin{cases} x \in (-1, 1) \\ x \in \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) \\ \emptyset \end{cases}$$

e dunque è impossibile. In conclusione la disequazione è verificata per

$$x \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right).$$

ESEMPIO 158.

Risolvere la disequazione: $|x + 1| \geq |2 - x|$.

Seguendo lo schema esposto sopra, la disequazione data equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ -x - 1 \leq 2 - x < x + 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x + 1 < 0 \\ x + 1 \leq 2 - x \leq -x - 1 \end{cases}$$

e quindi ai sistemi

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ -1 \leq 2 \\ 2x \geq 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x + 1 < 0 \\ 2x \leq 1 \\ 2 \leq -1. \end{cases}$$

L'ultimo sistema non ha soluzioni, per cui dal primo deduciamo che deve essere $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

5.9 Equazioni e disequazioni fratte

Consideriamo due funzioni f, g definite in uno stesso dominio A :

- l'equazione

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

è verificata dalle $x \in A$ tali che

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

- la disequazione

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

è verificata dalle $x \in A$ tali che

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

(infatti un quoziente è strettamente positivo quando numeratore e denominatore hanno lo stesso segno).

- la disequazione

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

è verificata dalle $x \in A$ tali che

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

Si osservi che il numeratore può essere nullo, mentre **il denominatore non si può annullare**.

- la disequazione

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

è verificata dalle $x \in A$ tali che

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

(infatti un quoziente è strettamente negativo quando numeratore e denominatore hanno segno discorde).

- la disequazione

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

è verificata dalle $x \in A$ tali che

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Anche in questo caso si osservi che il numeratore può essere nullo, mentre **il denominatore non si può annullare**.

Per risolvere queste disequazioni, si può studiare separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore e poi considerare i punti in cui questi segni concordano o sono opposti, a seconda dei casi.

ESEMPIO 159.

Risolvere la disequazione: $\frac{2x-1}{x+2} \geq 0$.

La disequazione è definita per $x \neq -2$ ed equivale ai sistemi

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 2x-1 \leq 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$$

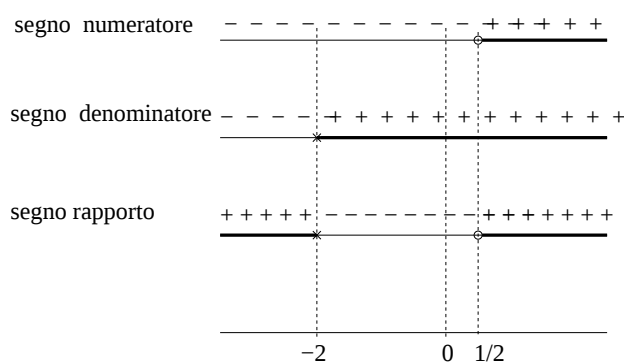
da cui si ottiene

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > -2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x < -2 \end{cases}.$$

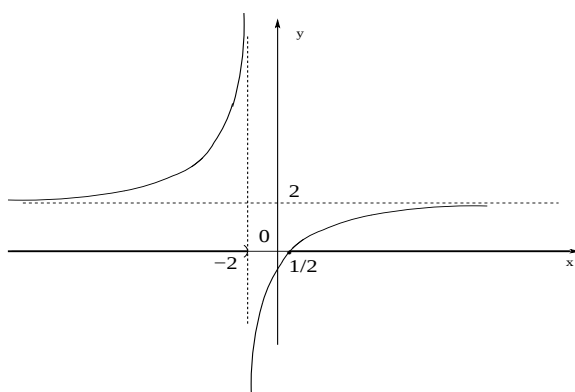
La disequazione è dunque verificata per

$$x \in (-\infty, -2) \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty \right).$$

Ritroviamo il risultato studiando separatamente i segni del numeratore e del denominatore e riportandoli nel seguente schema.



Interpretazione geometrica

**ESEMPIO 160.**

Risolvere la disequazione $\frac{x^2-1}{x-2} < 1$

La disequazione è definita per $x \neq 2$.

Primo metodo

$$\frac{x^2 - 1}{x - 2} - 1 < 0 \iff \frac{x^2 - x + 1}{x - 2} < 0.$$

segno numeratore	+++++++ ----- -----
segno denominatore	----- ----- -----
segno rapporto	----- ----- -----

2

La disequazione equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 - x + 1 < 0 \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Il polinomio $x^2 - x + 1$ ha segno costante positivo (perché $\Delta < 0$) e di conseguenza il secondo sistema non ha soluzioni. Il primo sistema, e quindi la disequazione di partenza, ha come soluzioni i valori $x < 2$.

Secondo metodo Possiamo moltiplicare primo e secondo membro per $x - 2$, ovvero *togliere il denominatore*, pur di imporre la condizione sul suo segno. In tal modo il verso della disequazione resterà lo stesso se $x - 2 > 0$, sarà l'opposto se $x - 2 < 0$. Otteniamo in tal modo sistemi analoghi ai precedenti.

$$\begin{cases} x^2 - 1 < x - 2 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 - 1 > x - 2 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$$

5.10 Appendice I: cenni sui sistemi lineari

I polinomi di primo grado o lineari nelle variabili x, y hanno la forma

$$P(x, y) = ax + by + c$$

con i coefficienti a, b, c che sono numeri reali assegnati. L'equazione

$$P(x, y) = 0 \quad \text{cioè} \quad ax + by + c = 0$$

rappresenta una retta se a e b non sono contemporaneamente nulli¹⁰ ed è dunque verificata da infinite coppie (x, y) .

DEFINIZIONE 45.

Il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

si dice **sistema lineare** di due equazioni nelle due incognite x, y (ovvero nella coppia (x, y) incognita).

Nell'ipotesi che in nessuna delle due equazioni i coefficienti delle incognite siano contemporaneamente nulli, il sistema si interpreta geometricamente come *l'intersezione di due rette*.

Queste possono essere

- **incidenti**

e in tal caso il sistema ha **un'unica soluzione** (x_0, y_0) , corrispondente al *punto di intersezione* tra le due rette;

- **parallele**

in tal caso il sistema è **impossibile**;

- **coincidenti**

in tal caso il sistema è **indeterminato** (ossia è verificato per ogni coppia (x, y)).

La *condizione di incidenza* è

$$-\frac{b}{a} \neq -\frac{b'}{a'}$$

(le due rette hanno coefficienti angolari diversi), se a e a' sono entrambi diversi da 0. Se uno di questi due coefficienti è nullo, e quindi la corrispondente retta è orizzontale, l'altro deve essere diverso da 0, cioè l'altra retta non deve essere orizzontale:

$$a^2 + a'^2 \neq 0.$$

Possiamo compendiare i due casi, scrivendo la condizione di incidenza nella forma

$$ab' - a'b \neq 0.$$

Infatti se a, a' sono entrambi diversi da 0 la condizione è banalmente equivalente a quella precedentemente trovata. Se $a = 0$ (e quindi $b \neq 0$) la condizione equivale ad $a' \neq 0$.

La quantità

$$ab' - a'b$$

¹⁰Se $a = b = 0$ è un'identità per $c = 0$, è impossibile per $c \neq 0$.

è chiamata **determinante della matrice**⁽¹¹⁾

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

che a sua volta è detta matrice dei coefficienti. La condizione $\det A \neq 0$ è dunque necessaria e sufficiente perché un sistema lineare di due equazioni in due incognite sia **determinato**, cioè ammetta **una ed una sola soluzione**.

Una volta stabilito che il sistema è determinato, esistono vari metodi per calcolarne la soluzione (x_0, y_0) .

5.11 Appendice II: rassegna dei principali metodi di risoluzione dei sistemi lineari

(1) Metodo di sostituzione

Poiché abbiamo supposto che in ciascuna delle equazioni i coefficienti non sono contemporaneamente nulli, possiamo ricavare una variabile in funzione dell'altra utilizzando una delle due equazioni e poi sostituire il valore nella rimanente equazione.

ESEMPIO 161.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

Ricaviamo l'incognita x nella seconda equazione:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 2x - 3y = 2. \end{cases}$$

Sostituiamo nell'altra equazione il valore della x ricavato:

$$\begin{cases} x = 1 - 2y \\ 2(1 - 2y) - 3y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 7y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Dunque la soluzione del sistema è la coppia $(1, 0)$.

(2) Metodo di confronto

Si ricava da entrambe le equazioni la stessa variabile in funzione dell'altra e poi si eguagliano i valori trovati.

ESEMPIO 162. *Risolvere l'equazione*

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Ricaviamo l'incognita x da entrambe le equazioni

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + \frac{3}{2}y \\ x = 1 - 2y; \end{cases}$$

¹¹Indicato con la scrittura: $\det A$

eguagliamo i secondi membri delle due equazioni

$$\begin{cases} 1 + \frac{3}{2}y = 1 - 2y \\ x = 1 - 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 - 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

(3) Metodo di Gauss

Consiste nel ricondursi ad un sistema equivalente a quello dato, in modo che in una delle due equazioni il coefficiente di una incognita sia nullo, ad esempio un sistema della forma

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x = \gamma' \end{cases}$$

Il metodo si basa sulla seguente osservazione: i sistemi

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ (a'x + b'y) + s(ax + by) = c' + sc \end{cases}$$

(con $s \in \mathbb{R}$) sono equivalenti.

In altre parole, si trova un sistema equivalente se si lascia invariata un'equazione e se si aggiunge un multiplo di questa all'altra.

Per realizzare l'obiettivo che il *metodo di Gauss si propone* si sceglie s in modo tale che $b' + sb = 0$.

ESEMPIO 163.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Riscriviamo la prima equazione e sostituiamo la seconda con quella ottenuta aggiungendole la prima moltiplicata per $\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ \frac{7}{3}x = \frac{7}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

In questo modo abbiamo trovato un sistema equivalente a quello dato, tale che in una delle due equazioni il coefficiente di y è 0.

Naturalmente invece che il coefficiente delle y avremmo potuto annullare quello della x e invece che nella seconda equazione avremmo potuto farlo nella prima. Una volta arrivati a questa forma, la risoluzione è immediata: la seconda equazione fornisce il valore di x ($x = 1$); sostituendolo nella prima, si ottiene quella di y ($y = 0$).

ESEMPIO 164.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Sostituiamo la seconda equazione con quella ottenuta aggiungendo la prima moltiplicata per $-\frac{3}{2}$:

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ \frac{7}{2}x = -\frac{7}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Oppure, sostituiamo la seconda equazione con quella ottenuta aggiungendole la prima moltiplicata per 2:

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 7y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$$

(4) Metodo di Cramer⁽¹²⁾

Se nel sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

moltiplichiamo una o entrambe le equazioni per una costante non nulla otteniamo un sistema equivalente. Se invece moltiplichiamo per 0, il nuovo sistema non è più equivalente, ma è conseguenza del precedente:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \implies \begin{cases} ax + by = c \\ 0 = 0 \end{cases}$$

I due sistemi

$$\begin{cases} aa'x + a'by = a'c & \text{(abbiamo moltiplicato la prima equazione per } a') \\ aa'x + ab'y = ac' & \text{(abbiamo moltiplicato la seconda equazione per } a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab'x + bb'y = b'c & \text{(abbiamo moltiplicato la prima equazione per } b') \\ a'bx + bb'y = bc' & \text{(abbiamo moltiplicato la seconda equazione per } b) \end{cases}$$

sono conseguenza di quello dato, cioè ogni soluzione del sistema di partenza è anche soluzione di questi due. In entrambi i sistemi sottraiamo membro a membro:

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c$$

$$(ab' - a'b)x = b'c - bc'$$

La prima equazione è conseguenza del primo sistema, la seconda del secondo sistema. Si ha dunque

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \implies \begin{cases} ab'x + bb'y = b'c \\ a'bx + bb'y = bc' \end{cases} \implies \begin{cases} (ab' - a'b)y = ac' - a'c \\ (ab' - a'b)x = b'c - bc' \end{cases}$$

Ovvero

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \implies \begin{cases} (ab' - a'b)y = ac' - a'c \\ (ab' - a'b)x = b'c - bc' \end{cases}$$

¹²Questo metodo venne pubblicata nel 1750 dal matematico svizzero Gabriel Cramer (1704-1752); probabilmente era già noto fin dal 1729 al matematico inglese Colin MacLaurin (1698-1746).

Poniamo

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = ab' - a'b$$

$$\Delta_x = \det \begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix} = b'c - bc'$$

$$\Delta_y = \det \begin{pmatrix} a & c' \\ a' & c \end{pmatrix} = ac' - a'c$$

Il sistema precedente si scrive dunque nella forma

$$\begin{cases} \Delta x = \Delta_x \\ \Delta y = \Delta_y \end{cases}$$

Nelle ipotesi fatte ($\Delta \neq 0$) esso ha un'unica soluzione:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} \end{aligned}$$

e di conseguenza questa è l'unica soluzione anche del sistema di partenza.

Si osservi che

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad \text{è la matrice dei coefficienti}$$

$$A_x = \begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix} \quad \text{è la matrice ottenuta sostituendo la prima colonna di } A \text{ con la colonna dei termini noti}$$

$$A_y = \begin{pmatrix} a & c' \\ a' & c \end{pmatrix} \quad \text{è la matrice ottenuta sostituendo la seconda colonna di } A \text{ con la colonna dei termini noti}$$

ESEMPIO 165.

Risolvere il seguente sistema mediante il metodo di Cramer

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i determinanti delle matrici dei coefficienti

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 7, \quad \Delta_x = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 7, \quad \Delta_y = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

da cui

$$x = \frac{7}{7} = 1, \quad y = \frac{0}{7} = 0.$$

ESEMPIO 166.

Risolvere il seguente sistema mediante il metodo di Cramer

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i determinanti delle matrici dei coefficienti

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -7, \quad \Delta_x = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 7, \quad \Delta_y = \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -7,$$

da cui

$$x = \frac{7}{-7} = -1, \quad y = \frac{-7}{-7} = 1.$$

Un sistema della forma

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

si dice sistema lineare di *tre equazioni in tre incognite*.

Dal punto di vista geometrico esso è rappresentato dalle intersezioni di tre piani. A seconda delle posizioni reciproche di questi piani il sistema può essere

- **determinato** i piani si intersecano in un unico punto (x_0, y_0, z_0) ; questa terna è **la soluzione** del sistema
- **indeterminato** i piani si intersecano secondo una retta o sono sovrapposti; in entrambi i casi il sistema ammette **infinite soluzioni**
- **impossibile** i piani non si intersecano o perché sono paralleli o perché si intersecano a due a due secondo una retta, ma queste rette di intersezione non hanno punti in comune.

Anche in questo caso la *condizione necessaria e sufficiente* perché il sistema sia determinato si può esprimere a partire dalla matrice dei coefficienti.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

Consideriamo la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ a' & b' & c' & a' & b' \\ a'' & b'' & c'' & a'' & b'' \end{pmatrix}$$

e consideriamo i prodotti delle diagonali discendenti

$$ab'c'' \quad bc'a'' \quad ca'b''$$

e quelli delle diagonali ascendenti

$$a''b'c \quad b''c'a \quad c''a'b$$

Sommiamo i primi e sottraiamo i secondi.

Il risultato che si ottiene è detto *determinante* della matrice A .

Anche in questo caso la condizione perché il sistema sia *determinato* è che $\det A \neq 0$.

Per quanto riguarda i metodi per trovare la soluzione, si tratta di modificare opportunamente quelli visti nel caso di due equazioni in due incognite. Senza scendere in dettagli, prendiamo in esame qualche esempio.

ESEMPIO 167.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Risolviamo mediante il **metodo di sostituzione**: ricaviamo, ad esempio, l'incognita x dalla prima equazione e la sostituiamo nelle altre due.

$$\begin{cases} x = 2 - y + z \\ 2(2 - y + z) + 3y + 2z = 5 \\ (2 - y + z) - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - y + z \\ y + 4z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Si ricava y dalla seconda equazione e si sostituisce nella terza

$$\begin{cases} x = 2 - y + z \\ y = 1 - 4z \\ 1 - 4z - z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - y + z \\ y = 1 - 4z \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con il **metodo di confronto**. Si ricava x in ciascuna delle tre equazioni.

$$\begin{cases} x = 2 - y + z \\ x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}y - z \\ x = y - z \end{cases}$$

Si eguagliano le espressioni trovate

$$\begin{cases} x = 2 - y + z \\ 2 - y + z = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}y - z \\ 2 - y + z = y - z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - y + z \\ y + 4z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Si risolve il sistema formato dalle ultime due equazioni:

$$\begin{cases} x = 2 - y + z \\ y = 1 - 4z \\ y = 1 + z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - y + z \\ y = 1 - 4z \\ 1 - 4z = 1 + z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - y + z \\ y = 1 - 4z \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Risolviamo ora con il **metodo di Gauss**.

Vogliamo eliminare la variabile z nella seconda e nella terza equazione.

Sommiamo alla seconda equazione la prima moltiplicata per 2 :

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 5y = 9 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Sommiamo alla terza equazione la prima

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 5y = 9 \\ 2x = 2 \end{cases}$$

Procedendo nei calcoli, si ottiene:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 5y = 5 \\ y - z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Concludiamo risolvendo il sistema proposto con il **metodo di Cramer**.
Le matrici associate al sistema con i relativi *determinanti* sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 10$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A_x = 10$$

$$A_y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A_y = 10$$

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A_z = 0$$

(non riportiamo i calcoli per ottenere i determinanti).

Applicando le formule analoghe a quelle viste in precedenza, otteniamo la soluzione $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$.

ESEMPIO 168.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y - z = -2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

Procediamo sommando la prima due equazione alle altre due:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 2y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

Sottraiamo la seconda equazione dalla terza:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 2y = 2 \\ x = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Le considerazioni sin qui svolte si estendono al caso generale di un sistema di n equazioni in n incognite; per la matrice A (quadrata di ordine n , cioè con n righe ed n colonne) è possibile estendere la nozione di *determinante* già data nei casi $n = 2$, $n = 3$.

Si dimostra che la condizione $\det A \neq 0$ assicura anche in questo caso l'esistenza di una ed una sola soluzione (un' n -upla di numeri reali). In questi brevi cenni della teoria dei sistemi lineari non possiamo inoltrarci nell'argomento.

Osserviamo che i sistemi fin qui trattati sono tali che:

- il numero delle equazioni eguaglia quello delle incognite; questo assicura che la matrice dei coefficienti è quadrata (cioè ha tante righe quante sono le colonne).
- il *determinante* della matrice dei coefficienti (che ha senso solo se questa matrice è quadrata) è diverso da 0.

Vogliamo brevemente mostrare alcuni esempi di sistemi che non rientrano in queste ipotesi, osservando che in generale per essi non è assicurata né l'esistenza né l'unicità di soluzioni. I calcoli per arrivare alla soluzione sono analoghi a quelli già visti.

ESEMPIO 169.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 0. \end{cases}$$

Il sistema è evidentemente impossibile, in quanto è rappresentato geometricamente da due rette parallele. Ritroviamo questo risultato per via algebrica. Procedendo con il *metodo di sostituzione*, troviamo

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ 4x + 2(1 - 2x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 2 = 0. \end{cases}$$

Utilizzando il *metodo del confronto*, si ha invece

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ y = -2x \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 1 - 2x = -2x \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 1 = 0. \end{cases}$$

Con *metodo di Gauss*, sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per -2 troviamo

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 0 = -2. \end{cases}$$

In tutti i casi, dunque, arriviamo ad un sistema impossibile.

Non si può invece usare il *metodo di Cramer*, essendo $\Delta = 0$. Si ricordi che questa condizione non permette da sola di stabilire se il sistema è impossibile o indeterminato.

ESEMPIO 170.

Il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

è evidentemente indeterminato (le due rette coincidono).

Con il metodo di sostituzione troviamo

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ 4x + 2(1 - 2x) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Nel sistema una delle due equazioni è superflua.

Le infinite soluzioni (tutti i punti della retta) si possono descrivere in *forma parametrica*, ponendo ad esempio $x = t$ ed esprimendo y in funzione di t :

$$x = t, \quad y = 1 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

ESEMPIO 171.

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

In questo sistema il numero delle equazioni supera quello delle incognite.

Isolando le prime due equazioni:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0, \end{cases}$$

si ottiene facilmente l'unica soluzione $x = y = 0$. Poichè questa risolve anche la terza equazione, è l'unica soluzione del sistema assegnato. Le tre rette del sistema hanno l'origine degli assi cartesiani come unico punto di intersezione.

ESEMPIO 172.

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Come nell'esempio precedente il numero delle equazioni supera il numero delle incognite. Il sistema formato dalle prime due equazioni ha come unica soluzione $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$. Poiché questa non risolve la terza equazione, il sistema dato è *impossibile*. Le tre rette si intersecano solo a due a due.

ESEMPIO 173.

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

In questo sistema il numero delle incognite supera il numero delle equazioni.

Per verificare la posizione reciproca di questi due piani possiamo assumere z come parametro ($z = t$) e risolvere nelle rimanenti variabili:

$$\begin{cases} x + y = 1 + t \\ x - 2y = -2t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = t + \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

Otteniamo infinite soluzioni, che forniscono i punti di intersezione tra i due piani (una retta dello spazio).

ESEMPIO 174.

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + 4y + 2z = 1 \end{cases}$$

In questo sistema la matrice dei coefficienti ha determinante nullo (il lettore verifichi l'affermazione).

Con il *metodo di sostituzione* troviamo:

$$\begin{cases} z = -x - y \\ x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x - y \\ x - 2y = -1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x - y \\ y = \frac{x+1}{2} \\ \dots = \dots \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t \end{cases}$$

Con il *metodo di Gauss*: sottraendo alla seconda equazione la prima e sommando alla terza equazione la prima moltiplicata per -2 , si ottiene

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y = -1 \\ \dots = \dots \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{x+1}{2} = \frac{t+1}{2} \\ z = -x - y = \frac{-3t-1}{2}. \end{cases}$$

Anche in questo caso troviamo infinite soluzioni, che descrivono la retta di intersezione dei 3 piani.

Capitolo 6

LE FUNZIONI POTENZA

In questo capitolo vedremo per passi successivi la definizione delle funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, fino al caso $\alpha \in \mathbb{Q}$: per la definizione nel caso generale con $\alpha \in \mathbb{R}$ rimandiamo al Capitolo 7.

6.1 Il caso $\alpha = n \in \mathbb{N}$

Abbiamo già utilizzato la potenza x^n lavorando con i polinomi. Una definizione formale può essere data in forma ricorsiva: ⁽¹⁾

$$\begin{cases} x^1 = x \\ x^{n+1} = x \cdot x^n. \end{cases} \quad (6.1)$$

Più semplicemente, x^n è il prodotto di n fattori uguali ad x :

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$$

Le potenze x^n soddisfano alcune proprietà che sono utilizzate comunemente nel calcolo e la cui verifica è immediata:

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m \quad (6.2)$$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m} \quad (6.3)$$

$$x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m}, \quad \text{se } n > m \text{ e } x \neq 0 \quad (6.4)$$

$$x^n y^n = (xy)^n \quad (6.5)$$

I grafici delle funzioni x^n sono già stati presentati nel Capitolo 4. In particolare il *dominio* di queste funzioni è sempre $\mathbb{R}$, mentre l'*immagine* è $\mathbb{R}$ se n è *dispari*, $[0, +\infty)$ se n è *pari*.

OSSERVAZIONE 16.

Utilizzando la definizione di potenza e le proprietà del prodotto tra numeri relativi, si verifica facilmente che è

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}.$$

¹Poiché per definire un prodotto occorrono almeno due fattori, questa definizione non avrebbe senso per $n = 1$: questo è il motivo per cui definiamo esplicitamente il valore x^1 .

ESERCIZIO 8.

Dimostrare che per ogni $x < 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale l'eguaglianza

$$x^n = (-1)^n |x|^n.$$

Infatti se n è pari l'eguaglianza equivale a $x^n = |x|^n$, mentre se n è dispari, dalla definizione di *valore assoluto* si ottiene

$$x = -|x| = (-1)|x|, \quad \forall x < 0,$$

da cui elevando ad n : $x^n = (-1)^n |x|^n$.

6.2 Il caso $\alpha = n \in \mathbb{Z}$

Nell'estendere la definizione agli esponenti interi vogliamo che si conservino le proprietà sopra elencate. In particolare se in (6.2) prendiamo $m = 0$, si deve ottenere:

$$x^n x^0 = x^n.$$

Poiché per $x \neq 0$ è $x^n \neq 0$, l'eguaglianza precedente implica che per $x \neq 0$ dobbiamo definire

$$x^0 = 1.$$

Se ancora in (6.2) prendiamo $m = -n$ (con $n \in \mathbb{N}$), si deve avere

$$x^n x^{-n} = x^0,$$

da cui segue che per $x \neq 0$ dobbiamo definire

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Inoltre perché valga la (6.3) dobbiamo porre

$$(x^n)^{-1} = x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Da questo si ottiene che elevare un numero alla potenza (-1) equivale a considerarne l'inverso.

In questo modo la funzione potenza rimane definita anche per esponenti interi, con la condizione che sia $x \neq 0$. Non è difficile provare che con la definizione data le potenze con esponente in $\mathbb{Z}$ verificano tutte le proprietà viste nel caso di potenze con esponente in $\mathbb{N}$; in particolare, nella proprietà (6.4) adesso possiamo rimuovere la condizione $n > m$ e scrivere

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad x \neq 0.$$

Anche per quanto riguarda i grafici di $y = \frac{1}{x^n}$ rimandiamo al Capitolo 3.

In particolare il dominio di queste funzioni è sempre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'immagine è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se n è dispari, $(0, +\infty)$ se n è pari.

Anche la funzione $y = x^0$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; nel suo dominio coincide con la funzione che vale costantemente 1.

6.3 Il caso $\alpha = 1/n$: le funzioni radice

Le funzioni potenza $x^{\frac{1}{n}}$ coincidono con le funzioni radice $\sqrt[n]{x}$.

Per arrivare ad una corretta definizione, cominciamo con l'osservare che ogni funzione:

$$x^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

con **n dispari** è **invertibile** (in quanto crescente); la funzione inversa prende il nome di **radice n-esima** e si indica come

$$\sqrt[n]{x}.$$

Dalla definizione segue che $\sqrt[n]{x}$ è la soluzione (reale) dell'equazione $t^n = x$; si dimostra che **questa soluzione esiste ed è unica** per ogni $x \in \mathbb{R}$ (si tenga presente che n è *dispari*) ed inoltre ha lo stesso segno di x .

Dal fatto che le funzioni

$$x^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sqrt[n]{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

con n **dispari** sono una l'inversa dell'altra, seguono le uguaglianze

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x})^n &= x, & \forall x \in \mathbb{R} \\ \sqrt[n]{x^n} &= x, & \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Le funzioni $x^n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ con **n pari non sono invertibili**, in quanto **non iniettive**; lo sono invece le loro restrizioni a $[0, +\infty)$:

$$x^n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty).$$

Anche alla loro inversa

$$\sqrt[n]{x} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

si dà il nome di **radice n-esima**. Questa è ancora soluzione dell'equazione $t^n = x$, ma a differenza del caso precedente, questa equazione *ha soluzione (reale) solo se $x \geq 0$* ; inoltre per $x > 0$, ammette due soluzioni, una opposta dell'altra:

$\sqrt[n]{x}$ indica quella positiva e di conseguenza l'altra è data da $-\sqrt[n]{x}$. ⁽²⁾

Anche nel caso che n **sia pari** il legame tra potenza e radice si esprime nelle uguaglianze

$$(\sqrt[n]{x})^n = x, \quad \forall x \in [0, +\infty) \tag{6.6}$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x, \quad \forall x \in [0, +\infty). \tag{6.7}$$

Rispetto al caso n *dispari* cambia solo il dominio in cui queste uguaglianze sono valide.

OSSERVAZIONE 17.

L'espressione $\sqrt[n]{x^n}$ ha senso anche per $x < 0$, ma per questi valori di x e per n pari non coincide con x ; infatti $\sqrt[n]{x^n}$, per definizione di radice con indice pari, è sempre positiva, mentre x è negativo.

L'eguaglianza (6.7) deve essere modificata nella forma:

$$\sqrt[n]{x^n} = -x, \quad \forall x < 0. \tag{6.8}$$

Dunque se **n pari** possiamo in generale scrivere:

$$(\sqrt[n]{x})^n = x, \quad \forall x \in [0, +\infty) \tag{6.9}$$

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6.10}$$

Esaminiamo ora alcune proprietà valide sia per n *pari* che per n *dispari*, assumendo però $x, y \geq 0$:

²Le radici $\pm \sqrt[n]{x}$ sono anche dette *radici algebriche* dell'equazione $t^n = x$, mentre $\sqrt[n]{x}$, è detta *radice aritmetica*. Tradizionalmente la radice di ordine $n = 2$ è detta *radice quadrata* ed è indicata con il simbolo $\sqrt{x}$ (in cui l'ordine è sottointeso.)

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} \quad (6.11)$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad (\text{con } y \neq 0) \quad (6.12)$$

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} \quad (6.13)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{x^{\frac{1}{m}}} \quad (6.14)$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m}. \quad (6.15)$$

Per argomenti x, y di *segno qualunque* queste proprietà in generale non sono più vere in presenza di *radici con ordine pari*.

Consideriamo ad esempio la proprietà (6.11) con $x, y < 0$: se n è *dispari* l'uguaglianza è ancora vera, se n è *pari* i due termini a secondo membro perdono significato; così dunque

$$\sqrt[5]{(-2)(-3)} = \sqrt[5]{-2} \sqrt[5]{-3},$$

mentre

$$\sqrt{(-2)(-3)} \neq \sqrt{-2} \sqrt{-3}$$

in quanto il **secondo membro non ha senso**. L'uguaglianza corretta è ovviamente

$$\sqrt{(-2)(-3)} = \sqrt{2}\sqrt{3}.$$

Analoghe considerazioni per la proprietà (6.12).

Nella proprietà (6.13), prendiamo $x < 0$ con n ed m *pari*: il primo membro non ha significato, a differenza del secondo. Ad esempio, per $x = -2$, $n = 2$, $m = 4$ il primo membro diventa $(\sqrt{-2})^4$ e non ha senso, mentre il secondo membro $\sqrt{(-2)^4}$ ha senso e vale 4.

La proprietà (6.14) si può estendere a valori negativi di x solo se n ed m sono *dispari*: ad esempio, per $x = -2$, $n = 3$, $m = 5$ diventa

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{-2}} = \sqrt[15]{-2},$$

che è vera, mentre per $x = -2$, $n = 2$, $m = 3$ diventa

$$\sqrt[3]{\sqrt{-2}} = \sqrt[6]{-2},$$

che **non ha senso** in quanto sono **privi di significato** sia il primo che il secondo membro.

Anche in (6.15) occorre prestare attenzione nel caso $x < 0$: ad esempio per $x = -3$ ed $n = m = 2$:

$$\sqrt{-3} = \sqrt[4]{9}$$

non ha senso in quanto il primo membro è **privo di significato**.

Riassumendo, le proprietà elencate sono *sempre vere* per $x, y \geq 0$ (solo in (6.12) occorre supporre $y \neq 0$); per estenderle al caso generale x, y di *segno qualunque*, in presenza di *radici di ordine pari* occorre sempre controllare che tutte le quantità che intervengano abbiano senso. Quando si ha a che fare con dei numeri questo controllo è semplice; il problema è più delicato quando gli argomenti delle radici dipendono da una variabile.

Ad esempio, abbiamo già osservato come l'espressione $\sqrt{x^2}$ si *semplifichi* in x solo se $x \geq 0$, mentre in generale vale $|x|$. Prendiamo in considerazione altri esempi significativi ed illuminanti.

ESEMPIO 175.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, che è definita per $x \in I = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Dall'eguaglianza $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ **non segue** $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x - 1}\sqrt{x + 1}$.
 Questa eguaglianza vale solo quando tutte le radici scritte hanno senso, cioè solo se $x \geq 1$.
 Se invece $x \leq -1$, si scrive

$$x^2 - 1 = [-(x - 1)][-(x + 1)] \quad \text{da cui} \quad \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{-(x - 1)}\sqrt{-(x + 1)}.$$

I due casi possono essere sintetizzati scrivendo

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{|x - 1|}\sqrt{|x + 1|}, \quad \forall x \in I.$$

ESEMPIO 176.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, che è definita per $x \in [-1, 1]$.

L'eguaglianza

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - x}\sqrt{1 + x}$$

è vera, perché in questo caso hanno senso tutte le radici scritte.

ESEMPIO 177.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{x^2(1 - x)}$, che è definita per $x \in (-\infty, 1]$.

L'espressione può essere riscritta e poi semplificata nel modo che segue:

$$\sqrt{x^2(1 - x)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1 - x} = |x|\sqrt{1 - x}.$$

L'operazione eseguita nell'ultimo passaggio in genere si sintetizza dicendo che "abbiamo portato fuori x^2 dalla radice". Sarebbe invece **sbagliato** scrivere

$$\sqrt{x^2(1 - x)} = x\sqrt{1 - x} :$$

questa eguaglianza vale solo se x è positivo (dunque $\forall x \in [0, 1]$).

ESEMPIO 178.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x - 1}{x}},$$

che è definita per $x \in I = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.

Possiamo "portare x dentro la radice" e scrivere

$$x\sqrt{\frac{x - 1}{x}} = \sqrt{\frac{x^2(x - 1)}{x}} = \sqrt{x(x - 1)} \quad \text{solo per } x \geq 1.$$

Invece per $x < 0$ l'eguaglianza corretta è

$$x\sqrt{\frac{x - 1}{x}} = -(-x)\sqrt{\frac{x - 1}{x}} = -\sqrt{\frac{x^2(x - 1)}{x}} = -\sqrt{x(x - 1)}.$$

Possiamo sintetizzare le osservazioni fatte scrivendo:

$$x\sqrt{\frac{x - 1}{x}} = \begin{cases} \sqrt{x(x - 1)} & \text{se } x \geq 1 \\ -\sqrt{x(x - 1)} & \text{se } x < 0 \end{cases} = (\operatorname{sgn} x)\sqrt{x(x - 1)}$$

ESEMPIO 179.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^3(1 - x)}$, che è definita per $\forall x \in \mathbb{R}$.

Poiché l'indice di radice è *dispari* l'espressione può essere sempre semplificata nella forma

$$\sqrt[3]{x^3(1-x)} = x \sqrt[3]{1-x}.$$

ESEMPIO 180.

Consideriamo la funzione $f(x) = x \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}$, che è definita per $x \neq 0$.

L'indice di radice è *dispari*, pertanto l'espressione si semplifica in

$$\sqrt[3]{\frac{x^3(x-1)}{x}} = \sqrt[3]{x^2(x-1)}.$$

6.4 Il caso $\alpha = m/n$

Per $\alpha = \frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ (m ed n primi tra loro) definiamo

$$x^\alpha = \sqrt[n]{x^m} \begin{cases} \text{se } n \text{ è dispari e } m > 0 & \text{è definita } \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{se } n \text{ è dispari e } m \leq 0 & \text{è definita } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{se } n \text{ è pari e } m > 0 & \text{è definita } \forall x \in [0, +\infty) \\ \text{se } n \text{ è pari e } m \leq 0 & \text{è definita } \forall x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

(Si osservi che se n è pari deve essere m dispari, affinché i due numeri siano primi tra loro.)

Ad esempio

- $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
- $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$, $\forall x \in [0, +\infty)$,
- $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, +\infty)$,
- $x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

OSSERVAZIONE 18.

Le espressioni che compaiono nell'eguaglianza (6.13)

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

si possono indifferentemente utilizzare per definire la funzione potenza, possiamo cioè scrivere

$$x^\alpha = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m. \quad (6.16)$$

Si tenga presente però che per n pari (e quindi m dispari) l'uguaglianza vale per $x \geq 0$ ($x > 0$ se m negativo), mentre per n dispari vale per ogni $x \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$ se m è negativo). Queste limitazioni sono comunque le stesse presentate al momento di definire la *funzione potenza*.

Riassumendo, possiamo affermare che l'**eguaglianza (6.16)** è valida per tutti i valori di x per cui le espressioni scritte hanno senso.

OSSERVAZIONE 19.

Perché valga l'uguaglianza

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

è essenziale supporre che gli interi m, n siano **primi tra loro**.

Ad esempio:

- $(-1)^{\frac{1}{3}}$ è definito come $\sqrt[3]{-1}$, che ha senso e vale -1 .
- $(-1)^{\frac{2}{6}}$ è definito come $\sqrt[6]{(-1)^2}$ che ha ancora senso, ma vale 1 .
- l'espressione $(\sqrt[6]{-1})^2$ non ha senso.

Possiamo rimuovere questa ipotesi ed utilizzare indifferentemente sia l'una che l'altra espressione di limitando però il dominio della funzione **solamente agli argomenti positivi**.

Tenendo conto dei risultati finora ottenuti, possiamo stabilire per le potenze in **campo razionale** le seguenti proprietà *fondamentali*:

$$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} \quad (6.17)$$

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}} \quad (6.18)$$

$$(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta} \quad (6.19)$$

$$x^{\alpha} y^{\alpha} = (xy)^{\alpha} \quad (6.20)$$

valide per ogni $x, y > 0$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

La possibilità di estendere queste eguaglianze ai valori negativi o nulli di x è limitata al caso in cui per tali valori le funzioni scritte abbiano senso, cioè *siano definite*.

L'Analisi Matematica permette di estendere la funzione potenza anche al caso di **esponente reale**, conservando le proprietà (6.17), (6.18), (6.19), (6.20), ma solo per $x, y > 0$.

6.5 Equazioni irrazionali.

In questo paragrafo studiamo alcuni tipi di *equazioni* in cui compare la *funzioni radice*. In particolare consideriamo l'equazione ⁽³⁾

$$\sqrt[n]{P(x)} = Q(x). \quad (6.21)$$

Nella pratica $P(x), Q(x)$ saranno comunemente polinomi o funzioni razionali; indichiamo con A un sottoinsieme di $\text{Dom } P \cap \text{Dom } Q$, in modo che per $x \in A$ siano definite entrambe le funzioni.

Se n è dispari la radice al primo membro di (6.21) è definita per ogni $x \in A$. Nell'equazione possiamo eliminare la *radice*, elevando alla n entrambi i membri, in modo da ottenere:

$$P(x) = [Q(x)]^n \quad (6.22)$$

che è equivalente all'equazione (6.21).

Se n è pari dobbiamo dare significato alla radice al primo membro di (6.21), imponendo la condizione $P(x) \geq 0$. Inoltre prima di elevare alla n entrambi i termini, dobbiamo imporre che anche il secondo membro sia positivo. L'equazione (6.21) è dunque equivalente al sistema

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) = [Q(x)]^n. \end{cases}$$

³Per altri tipi di equazione ci limiteremo a vedere alcuni esempi

La prima condizione è superflua, in quanto contenuta nelle altre due.
In definitiva dunque l'equazione (6.21) *equivale al sistema*

$$\begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = [Q(x)]^n. \end{cases} \quad (6.23)$$

ESEMPIO 181.

Risolvere l'equazione

$$\sqrt{4x^2 - 13x + 3} = 2x - 3.$$

Ponendo $P(x) = 4x^2 - 13x + 3$ e $Q(x) = 2x - 3$, ci riportiamo ad un sistema del tipo (6.23):

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 4x^2 - 13x + 3 = (2x - 3)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x = -6 \end{cases}$$

Il sistema ottenuto *non ha soluzioni*, quindi anche l'equazione di partenza *non ha soluzioni*.
Si osservi che la condizione di esistenza della radice

$$4x^2 - 13x + 3 \geq 0$$

è superflua, perché contenuta nell'equazione del sistema:

$$4x^2 - 13x + 3 = (2x - 3)^2 \geq 0.$$

ESEMPIO 182.

Risolvere l'equazione:

$$\sqrt[3]{x^3 + 4} = x + 1.$$

Possiamo riscrivere l'equazione nella forma equivalente

$$x^3 + 4 = (x + 1)^3;$$

da questa, svolgendo i calcoli e semplificando, si ottiene

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Le soluzioni sono $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

ESEMPIO 183.

Risolvere l'equazione

$$\sqrt{4x - 3} = \sqrt{2x - 1}$$

In questo caso dobbiamo dare significato alle radici, prima di elevare al quadrato (ovvero, eguagliare i due argomenti):

$$\begin{cases} 4x - 3 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ 4x - 3 = 2x - 1. \end{cases}$$

Tenendo conto dell'equazione, una delle due disequazioni è superflua; possiamo scrivere equivalentemente

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 4x - 3 = 2x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases} \iff x = 1.$$

Delle due condizioni $4x - 3 \geq 0$, $2x - 1 \geq 0$, in realtà la prima è evidentemente più forte della seconda, nel senso che

$$4x - 3 \geq 0 \Rightarrow 2x - 1 \geq 0;$$

sarebbe stato dunque naturale togliere come superflua la condizione $2x - 1 \geq 0$ al contrario di quello che abbiamo fatto. Abbiamo preferito togliere l'altra condizione, per ribadire che questa scelta è ininfluente. Si osservi che la soluzione trovata verifica *entrambe le condizioni*, come ci aspettavamo che facesse.

ESEMPIO 184.

Risolvere l'equazione:

$$\sqrt{5x+3} + \sqrt{x+6} = \sqrt{3x-8}. \quad (6.24)$$

L'equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 5x + 3 \geq 0 \\ x + 6 \geq 0 \\ 3x - 8 \geq 0 \\ 6x + 9 + 2\sqrt{(5x+3)(x+6)} = 3x - 8; \end{cases}$$

le prime tre disequazioni sono state ottenute imponendo le condizioni di esistenza delle radici, l'equazione del sistema si ottiene elevando al quadrato entrambi i membri dell'equazione (6.24). Le soluzioni delle disequazioni sono i valori di x tali che $x \geq \frac{8}{3}$, per cui il sistema può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} x \geq \frac{8}{3} \\ 6x + 9 + 2\sqrt{(5x+3)(x+6)} = 3x - 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{8}{3} \\ 2\sqrt{(5x+3)(x+6)} = -3x - 17 \end{cases}$$

Il secondo membro per $x \geq \frac{8}{3}$ è negativo e dunque l'equazione è **impossibile**. Sarebbe **errato** procedere nei calcoli **elevando al quadrato**.

ESEMPIO 185.

Risolvere l'equazione

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x+3}.$$

Scrivendo l'equazione nella forma: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1}$, ci riportiamo al modello dell'esempio precedente.

Altrimenti, prima di elevare al quadrato primo e secondo membro, si deve imporre (oltre alle condizioni di esistenza delle radici viste negli esempi precedenti) anche la condizione che il primo membro sia non negativo:

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+1} \geq 0.$$

Queste condizioni vengono riportate nel sistema

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq x + 1 \\ 3x - 2\sqrt{(2x-1)(x+1)} = x + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 2 \\ 2\sqrt{(2x-1)(x+1)} = 2x - 3. \end{cases}$$

A questo punto possiamo elevare al quadrato primo e secondo membro dell'equazione, in quanto le condizioni imposte assicurano l'esistenza delle radici e la condizione $x \geq 2$ rende positivo il secondo membro:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 4(2x^2 + x - 1) = 4x^2 - 12x + 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 16x - 13 = 0. \end{cases}$$

Delle due soluzioni dell'equazione $x_{1,2} = 2 \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$, solamente $2 + \frac{\sqrt{29}}{2}$ verifica la prima condizione del sistema ed è quindi la soluzione dell'equazione di partenza.

6.6 Disequazioni irrazionali

Iniziamo col considerare *disequazioni irrazionali* del tipo

$$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x). \quad (6.25)$$

Come abbiamo fatto per le equazioni irrazionali, anche in questo caso si devono distinguere i casi n *dispari* ed n *pari*.

1. Sia n **dispari**.

La disequazione data equivale a quella ottenuta elevando alla n entrambi i membri:

$$P(x) > [Q(x)]^n.$$

2. Sia n **pari**

Occorre innanzitutto dare significato alla radice:

- si impone che risulti $P(x) \geq 0$.

Successivamente si controlla il segno del secondo membro:

- se $Q(x) < 0$, la disequazione è verificata;
- se $Q(x) \geq 0$, possiamo elevare alla n .

La disequazione (6.25) è dunque equivalente a

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) > [Q(x)]^n. \end{cases}$$

Nel secondo sistema la condizione $P(x) \geq 0$ è superflua, in quanto contenuta in $P(x) > [Q(x)]^n$.

Riassumendo, se n è **pari** possiamo scrivere:

$$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x) \iff \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) > [Q(x)]^n. \end{cases}$$

Consideriamo ora disequazioni irrazionali del tipo:

$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x). \quad (6.26)$$

Distighuiamo anche stavolta i casi n *dispari* ed n *pari*.

1. Sia n **dispari**.

La disequazione data equivale a quella ottenuta elevando alla n entrambi i membri:

$$P(x) < [Q(x)]^n;$$

2. Sia n **pari**

Occorre dare significato alla radice:

- si impone la condizione $P(x) \geq 0$.

Si controlla poi il segno del secondo membro:

- se $Q(x) < 0$, la disequazione non ha soluzioni;
- se $Q(x) \geq 0$, possiamo elevare alla n .

Possiamo quindi scrivere

$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) < [Q(x)]^n. \end{cases}$$

Ragionando in maniera analoga si studiano le disequazioni

$$\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x), \quad (6.27)$$

$$\sqrt[n]{P(x)} \leq Q(x). \quad (6.28)$$

Se n è **dispari** possiamo elevare alla n .

Se n è **pari**, si ottiene

$$\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} Q(x) > 0 \\ P(x) \geq [Q(x)]^n, \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{P(x)} \leq Q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \leq [Q(x)]^n. \end{cases}$$

ESEMPIO 186.*Risolvere la disequazione*

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} > 2$$

Soluzione:

$$x^2 - 1 > 8 \iff x^2 > 9 \iff x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$

ESEMPIO 187.*Risolvere la disequazione*

$$2x + 1 > \sqrt{4x^2 - 13x + 3}.$$

Soluzione:

$$\begin{cases} 4x^2 - 13x + 3 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \\ (2x + 1)^2 > 4x^2 - 13x + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup [3, +\infty) \\ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ x \in \left(\frac{2}{17}, +\infty\right). \end{cases}$$

L'intersezione degli insiemi delle soluzioni di ciascuna disequazione è: $x \in \left(\frac{2}{17}, \frac{1}{4}\right] \cup [3, +\infty)$.

ESEMPIO 188.*Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{x^2 - 9x + 14} > x - 8.$$

Soluzione:

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 \geq 0 \\ x - 8 < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x - 8 \geq 0 \\ x^2 - 9x + 14 > (x - 8)^2, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \in (-\infty, 2] \cup [7, +\infty) \\ x \in (-\infty, 8) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \in [8, +\infty) \\ x \in \left(\frac{50}{7}, +\infty\right) \end{cases} \iff x \in (-\infty, 2] \cup [7, 8) \quad \text{oppure} \quad x \in [8, +\infty),$$

da cui segue: $x \in (-\infty, 2] \cup [7, +\infty)$.

ESEMPIO 189.*Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{|x^2 - 1|} > x.$$

Soluzione: ⁽⁴⁾

$$x < 0 \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ |x^2 - 1| > x^2 \end{cases} \iff x < 0 \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 > x^2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 < -x^2. \end{cases}$$

Ovvero

$$x < 0 \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < \frac{1}{2} \end{cases} \iff x \in \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

⁴Sviluppiamo il termine $|x^2 - 1|$ mediante la definizione di valore assoluto:

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x^2 - 1 \geq 0 \\ -x^2 + 1 & \text{se } x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 190.

Risolvere la disequazione

$$\sqrt[3]{1+3x} \geq \sqrt{1-3x}.$$

Soluzione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{1+3x} \geq 0 \\ 1-3x \geq 0 \\ \sqrt[6]{(1+3x)^2} \geq \sqrt[6]{(1-3x)^3} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ (1+3x)^2 \geq (1-3x)^3. \end{array} \right.$$

Completando i calcoli, si ottiene che deve essere $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

ESEMPIO 191.

Risolvere la disequazione

$$\sqrt[3]{1-x} \leq \sqrt{1+x}.$$

Soluzione

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+x \geq 0 \\ 1-x < 0 \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ \sqrt[6]{(1-x)^2} < \sqrt[6]{(1+x)^3} \end{array} \right. \iff x > 1 \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in [-1, 1] \\ x(x^2 + 2x + 5) > 0. \end{array} \right.$$

Completando i calcoli, si ottiene che le soluzioni della disequazione data sono tutte le $x > 0$.

Capitolo 7

ESPONENZIALI E LOGARITMI

Abbiamo chiamato potenza ogni funzione della forma $f(x) = x^\alpha$ che si ottiene facendo variare la base x e tenendo fisso l'esponente α . Ogni funzione $f(x) = a^x$, che si ottiene tenendo fissa la base $a > 0$ e facendo variare l'esponente x , si dice *esponenziale*.

Tenendo conto di quanto già detto a proposito delle potenze, per $x = \frac{m}{n}$ (con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, m, n primi tra loro), risulta definito

$$a^x = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

(essendo $a > 0$, l'eguaglianza tra le due espressioni che definiscono a^x vale anche se m e n non sono primi tra loro).

In particolare

- $\forall x \in \mathbb{Q}, a^x > 0$
- $\forall x \in \mathbb{Q}, 1^x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{Q}, a^x b^x = (a b)^x$
- $a^0 = 1, a^1 = a$.

Riccollegandoci ancora ai risultati visti per le potenze, possiamo affermare che in campo razionale l'esponenziale verifica le seguenti proprietà algebriche:

1. $a^{x+y} = a^x a^y, \forall x \in \mathbb{Q}$
2. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \forall x \in \mathbb{Q}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}, \forall x, y \in \mathbb{Q}$
4. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

La proprietà (4) segue dalle (1) e (2).

La *funzione esponenziale* $f(x) = a^x$ in campo razionale

- per $a > 1$ è crescente, cioè $x, y \in \mathbb{Q}, x < y \Rightarrow a^x < a^y$
- per $0 < a < 1$ è decrescente, cioè $x, y \in \mathbb{Q}, x < y \Rightarrow a^x > a^y$.

Diamo una dimostrazione di queste proprietà.

Consideriamo il caso $a > 1$.

Per le proprietà elementari dei numeri reali, $\forall n \in \mathbb{N} \quad a^n > 1, a^{-n} < 1$. Facciamo adesso vedere che

$$\frac{m}{n} > 0 \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} > 1$$

$$\frac{m}{n} < 0 \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} < 1$$

cioè

$$m, n \in \mathbb{N} \quad \sqrt[n]{a^m} > 1, \sqrt[n]{a^{-m}} < 1.$$

Poiché

$$\sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}},$$

il secondo risultato è conseguenza del primo.

Se fosse $\sqrt[n]{a^m} \leq 1$, elevando alla n avremmo $a^m \leq 1$ e questo per $m > 0$ è assurdo.

Ciò stabilito, proviamo che l'esponenziale è crescente.

Se $x < y$, allora $y - x > 0$ e, per quanto detto in precedenza, $a^{y-x} > 1$, cioè $\frac{a^y}{a^x} > 1$, da cui $a^y > a^x$.

Se $0 < a < 1$, $a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$; la funzione $x \rightarrow (\frac{1}{a})^x$ è crescente, per quanto dimostrato nella prima parte e di conseguenza $x \rightarrow a^x$ risulta decrescente.

Diamo alcuni esempi di utilizzo delle proprietà della funzione esponenziale nella risoluzione di equazioni e disequazioni.

ESEMPIO 192.

$$7^{x-1} > 7^{1-2x} \iff x-1 > 1-2x$$

ESEMPIO 193.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x^2} \iff 2x < 1-x^2$$

ESEMPIO 194.

$$5^{x^2+1} = 5^{x-1} \iff x^2+1 = x-1$$

Dopo aver descritto il comportamento dell'esponenziale al variare dell'esponente, adesso controlliamo quello rispetto alla base ($\neq 1$):

$$a^x > b^x \iff \begin{array}{l} a > b \text{ e } x \in \mathbb{Q}, x > 0 \\ \text{oppure} \\ a < b \text{ e } x \in \mathbb{Q}, x < 0 \end{array}$$

$$a^x < b^x \iff \begin{array}{l} a > b \text{ e } x \in \mathbb{Q}, x < 0 \\ \text{oppure} \\ a < b \text{ e } x \in \mathbb{Q}, x > 0 \end{array}$$

$$a^x = b^x \iff x = 0.$$

Per dimostrare questi risultati, basta osservare ad esempio che

$$a^x > b^x \iff \frac{a^x}{b^x} > 1 \iff \left(\frac{a}{b}\right)^x > 1.$$

Vediamo come si applicano le proprietà della funzione esponenziale elencate sopra.

ESEMPIO 195.

$$2^{x-1} > 5^{x-1} \quad \Longleftrightarrow \quad x-1 < 0 \quad \text{perché } a=2, b=5, a < b$$

$$3^{x^2-1} > 5^{x^2-1} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2-1 < 0 \quad \text{perché } a=3, b=5, a < b$$

$$4^{3x} > 2^{3x} \quad \Longleftrightarrow \quad 3x > 0 \quad \text{perché } a=4, b=2, a > b$$

$$2^{\sqrt{x^2-1}} = 4^{\sqrt{x^2-1}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2-1} = 0$$

$$2^x = 2^{x^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad x = x^2 + 1.$$

In analisi si dimostra la possibilità di estendere la funzione esponenziale dal campo *razionale* a quello *reale*, conservando le proprietà sopra elencate.

In altre parole,

$$\forall a > 0, a \neq 1 \exists_1 f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

che indichiamo con la notazione a^x già introdotta, tale che:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}, \text{ Im } f = (0, +\infty) \quad (7.1)$$

$$\forall x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, a^x = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (7.2)$$

$$x \longrightarrow a^x \text{ é crescente (su } \mathbb{R}) \text{ se } a > 1, \text{ decrescente (su } \mathbb{R}) \text{ se } 0 < a < 1 \quad (7.3)$$

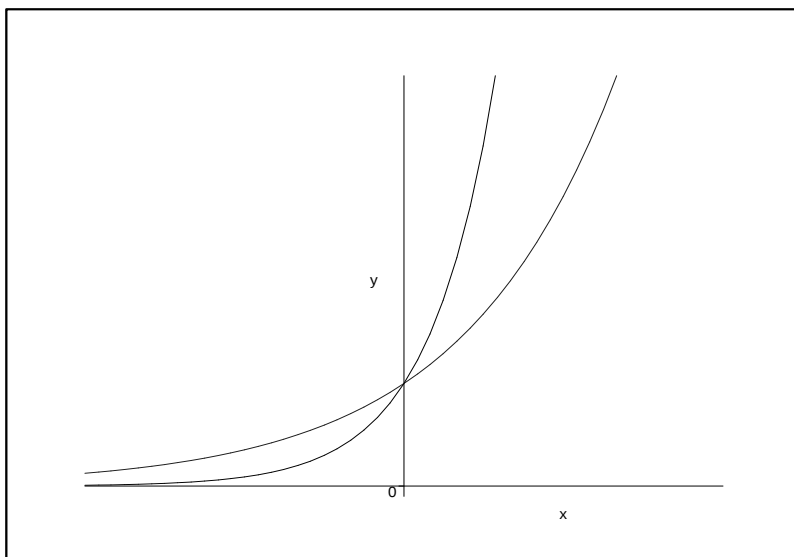
$$a^x > b^x \Longleftrightarrow a > b > 0 \text{ e } x > 0 \text{ oppure } 0 < a < b \text{ e } x < 0 \quad (7.4)$$

$$a^{x+y} = a^x a^y, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (7.5)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (7.6)$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (7.7)$$

Grafico della funzione $f(x) = a^x$, con $a > 1$.



Nella figura precedente abbiamo riportato il grafico della *funzione esponenziale* per due diversi valori della base (entrambi maggiori di 1).

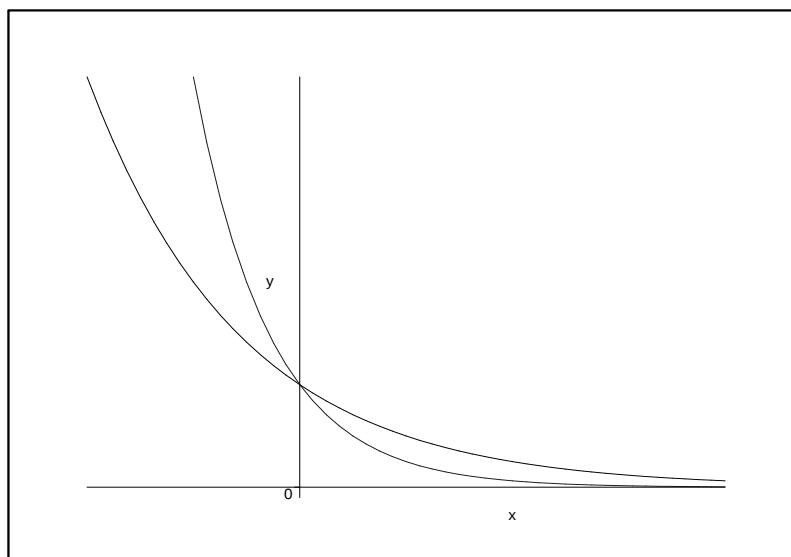
Osserviamo che i grafici passano tutti per il punto (0, 1) e che questo è l'unico punto in comune.

Per $a > 1$ le funzioni crescono rapidamente al crescere di x , mentre si avvicinano rapidamente a 0 quando x è negativo e cresce in valore assoluto (in questo caso il semiasse negativo delle x si dice costituire un *asintoto orizzontale*).

Per $0 < a < 1$ il comportamento è analogo ma opposto.

In entrambi i casi al crescere della base i grafici si *innalzano* per $x > 0$, si *abbassano* per $x < 0$.

Grafico della funzione $f(x) = a^x$, con $a < 1$.



In analisi riveste un ruolo particolarmente importante la funzione esponenziale, che ha come base il *numero e*, detto *numero di Nepero* ¹ dal nome del matematico che lo ha introdotto (mentre la notazione è dovuta a Eulero ² che ha utilizzato l'iniziale del suo nome); e è un numero irrazionale, il cui valore approssimato, con cento cifre decimali esatte, è

$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995$
 $95749\ 66967\ 62772\ 40766\ 30353\ 54759\ 45713\ 82178\ 52516\ 64274.$

¹È il nome latinizzato del matematico scozzese John Napier (1550-1617). "... Era un matematico di professione di famiglia nobile che passava il suo tempo amministrando i suoi vasti possedimenti e scrivendo su svariati argomenti; si interessava soltanto a certi aspetti della matematica, soprattutto a quelli che si riferivano al computo e alla trigonometria... Napier stesso ci informa di avere lavorato alla sua invenzione dei logaritmi per venti anni, prima di pubblicare i risultati, affermazione che farebbe risalire l'origine della sua idea al 1594..." (C. B. Boyer, *Storia della Matematica*) Napier pubblicò le sue scoperte nel 1614 nel trattato *Mirifici logarithmorum canonis* (Descrizione della regola meravigliosa dei logaritmi). Il termine *logaritmo* fu da lui coniato ed è composto dalle due parole greche *logos* (λόγος) (ragione o rapporto) e *arithmos* (ἀριθμός) (numero). I suoi logaritmi avevano come base $\frac{1}{e}$.

²Leonhard Euler (1707-1783), nato a Basilea, trascorse la maggior parte della sua vita in Russia dove pubblicò centinaia di studi sulla matematica. A lui si devono molte tra le più importanti scoperte della matematica, nonché l'introduzione di molti dei simboli attualmente in uso come e , π , i (unità immaginaria), il simbolo di sommatoria Σ e la notazione $f(x)$ per indicare una funzione.

7.1 La funzione logaritmo

La funzione $a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ con $a > 0$, $a \neq 1$ è *invertibile* in quanto monotona; alla **funzione inversa** si dà il nome di **logaritmo** in base a :

$$\log_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Le relazioni tra una funzione e la sua inversa forniscono:

$$a^{\log_a x} = x, \quad \forall x > 0$$

$$\log_a a^x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Possiamo memorizzare il risultato dicendo che l'*esponenziale* ed il *logaritmo* con la stessa base "*si annullano a vicenda*", nel senso che applicando successivamente le due funzioni si ritorna al punto di partenza.

Così, per risolvere un'equazione della forma

$$a^x = b \quad (\text{con } b > 0)$$

(se $b \leq 0$ l'equazione è impossibile) possiamo prendere il *logaritmo* in base a di ambo i membri, ottenendo

$$x = \log_a b.$$

Analogamente per risolvere un'equazione della forma

$$\log_a x = b,$$

possiamo prendere l'esponenziale di base a di ambo i membri, ottenendo

$$x = a^b.$$

I grafici dell'*esponenziale* e del *logaritmo* con uguale base sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto alla bisettrice degli assi cartesiani $y = x$.

Grafico della funzione $f(x) = \log_a x$, con $a > 1$.

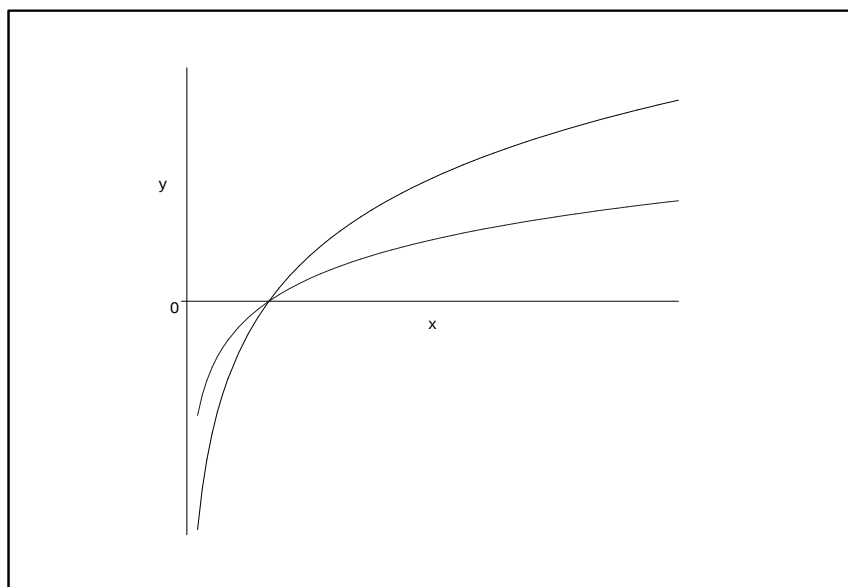
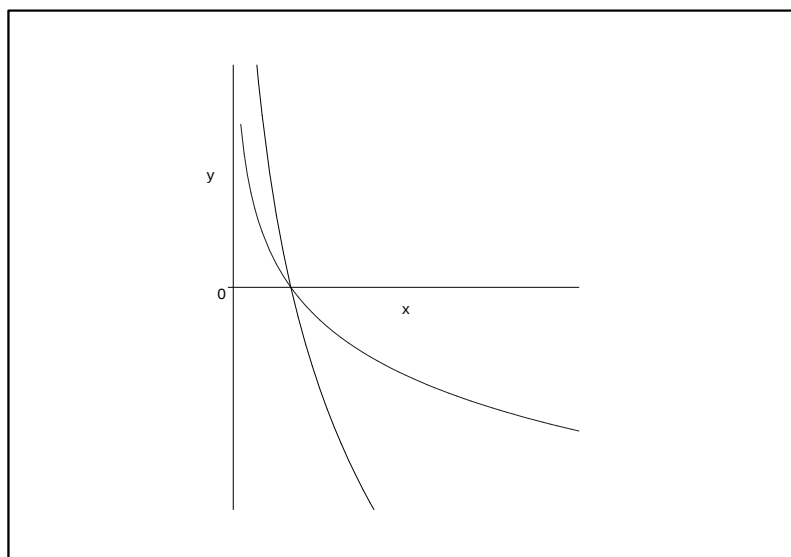


Grafico della funzione $f(x) = \log_a x$, con $a < 1$.



Nelle figure precedenti abbiamo riportato i grafici della *funzione logaritmo* con valori diversi della base. In particolare i grafici passano tutti per il punto $(1, 0)$ e questo è l'unico punto in comune.

Per $a > 1$ le *funzioni logaritmo* sono crescenti: all'aumentare di x crescono lentamente, mentre all'avvicinarsi di x a 0 (mantenendosi positivo) assumono valori negativi di valore assoluto sempre più grande (diremo che il semiasse negativo delle y è asintoto verticale).

Per $0 < a < 1$ le funzioni sono decrescenti: all'aumentare di x decrescono lentamente assumendo valori negativi, mentre all'avvicinarsi di x a 0, assumono valori positivi sempre più grandi (il semiasse positivo delle y è asintoto verticale).

Al crescere della base, i grafici si "abbassano" per $x > 1$, si "alzano" per $0 < x < 1$.

Il logaritmo in base e (cioè l'inverso della funzione $x \rightarrow e^x$) è detto *logaritmo naturale* ed è indicato con il simbolo $\log$ (o anche $\ln$).

Alle proprietà algebriche degli esponenziali corrispondono le seguenti proprietà per i logaritmi, $\forall x, y > 0$, $a > 0$, e $a \neq 1$:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. se $0 < a < 1$ allora $x < y \iff \log_a x > \log_a y$
6. se $1 < a$ allora $x < y \iff \log_a x < \log_a y$.

DIMOSTRAZIONE.

(1) Prendendo l'esponenziale di base a di entrambi i membri siamo ricondotti a provare l'eguaglianza

$$a^{\log_a(xy)} = a^{(\log_a x + \log_a y)}.$$

Il primo membro vale xy ; il secondo, per la proprietà (5) dell'esponenziale, vale $a^{\log_a x} a^{\log_a y}$, cioè appunto xy .

(2) Prendendo l'esponenziale di base a , l'eguaglianza da dimostrare diventa

$$a^{\log_a \frac{1}{x}} = a^{-\log_a x}.$$

Il primo membro vale $\frac{1}{x}$, il secondo $\frac{1}{a^{\log_a x}}$, cioè $\frac{1}{x}$.

(3) Prendendo anche in questo caso l'esponenziale di base a , si ottiene:

$$a^{\log_a x^\alpha} = a^{\alpha \log_a x}.$$

Il primo membro vale x^α , il secondo $(a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha$.

(4) Segue da (1) e (2).

(5) Utilizziamo la definizione di *logaritmo* la proprietà (7.3) della funzione esponenziale scrivendo

$$\begin{array}{llll} \text{se} & 0 < a < 1 & \text{e} & x < y \quad \text{allora} \quad x = a^{\log_a x} < a^{\log_a y} = y \iff \log_a x > \log_a y \\ \text{se} & 1 < a & \text{e} & x < y \quad \text{allora} \quad x = a^{\log_a x} < a^{\log_a y} = y \iff \log_a x < \log_a y. \end{array}$$

Siano a, b due numeri reali, positivi e diversi da 1.

Vale la seguente eguaglianza, detta *cambiamento di base dei logaritmi*:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Dimostrazione

Riscriviamo l'eguaglianza nella forma

$$\log_a x = \log_b x \log_a b$$

e prendiamo l'esponenziale di base a di entrambi i membri. Il primo membro vale x ; per il secondo si ha

$$a^{\log_b x \log_a b} = a^{\log_a (b^{\log_b x})} = a^{\log_a x} = x.$$

In particolare

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \quad \forall x > 0$$

$$\log x = \frac{\log_a x}{\log_a e}, \quad \forall x > 0.$$

OSSERVAZIONE 20.

La proprietà (3) del logaritmo fornisce

$$x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}, \quad \forall x > 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

in particolare

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x}, \quad \forall x > 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (7.8)$$

Questa eguaglianza (nota come *artificio di Bernoulli*) è molto utile per semplificare alcuni calcoli che si presentano nell'Analisi Matematica. Ad esempio consideriamo la funzione

$$f(x) = x^x :$$

non è di tipo *polinomiale* né di tipo *esponenziale*, perché variano sia base che esponente; utilizzando (7.8) si può scrivere

$$f(x) = x^x = e^{x \log x},$$

ottenendo in questo modo una funzione composta di tipo esponenziale.

In generale l'artificio di Bernoulli ci consente di scrivere

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}.$$

Ovviamente l'espressione è valida per i valori di x che danno significato all'espressione, ovvero

$$x \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g \cap \{x : f(x) > 0\}.$$

Capitolo 8

INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA

8.1 La trigonometria: come e perché.

La parola *trigonometria* significa *misura degli elementi di un triangolo*; problema primario di questo capitolo della matematica è quello di determinare la misura dei lati e degli angoli di un triangolo a partire da alcuni di questi elementi. Poiché un triangolo non è definito se si conoscono solo i suoi angoli (avremmo tanti triangoli simili), almeno uno dei dati deve essere un lato. È noto dalla geometria elementare che per individuare un triangolo possono essere assegnati:

1. due lati e l'angolo tra essi compreso (primo criterio di eguaglianza dei triangoli),
2. due angoli ed un lato (secondo criterio più, eventualmente, il teorema sulla somma degli angoli interni),
3. tre lati (terzo criterio).

Poniamoci dunque il seguente problema:

PROBLEMA 1

Dato un triangolo del quale si conoscono i tre elementi indicati in uno dei punti precedenti determinarne tutti gli altri.

Affrontiamo lo studio di questo problema esaminando il caso particolare dei triangoli rettangoli. Già in questa forma il problema si presenta di natura non elementare (tranne il caso in cui siano noti due lati ed uno degli angoli acuti: il teorema di Pitagora e quello della somma degli angoli interni di un triangolo permettono di concludere in modo ovvio). Vedremo più avanti come i risultati ottenuti per triangoli rettangoli potranno essere utilizzati per studiare il caso generale. Iniziamo con due osservazioni generali.

OSSERVAZIONE 21.

Consideriamo i triangoli ABC e $AB'C'$, rettangoli rispettivamente in C ed in C' e con lo stesso angolo in corrispondenza del vertice A (Figura 1).

Questi sono evidentemente simili e quindi si ha:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$$

Dunque in tutti i triangoli rettangoli che hanno uno stesso angolo acuto il rapporto tra cateto e ipotenusa si mantiene costante.

OSSERVAZIONE 22.

Consideriamo i triangoli ABC e $AB'C'$, rettangoli rispettivamente in C e in C' , aventi il vertice dell'angolo $\hat{A}$ al centro di un cerchio e i punti B e B' sul bordo di esso (vedi Figura 2). Dalla figura risulta evidentemente $\hat{C}AB > \hat{C}'AB'$, mentre :

$$\frac{B'C'}{AB'} > \frac{BC}{AB}, \quad \frac{AC}{AB} < \frac{AC'}{AB'}$$

perché $AB = AB'$, $B'C' > BC$, $AC' < AC$.

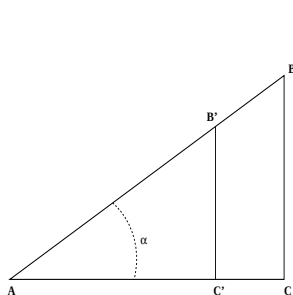


Figura 1

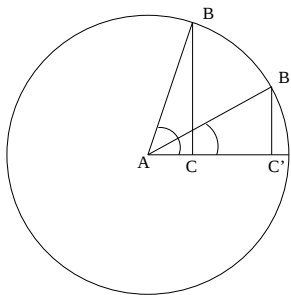


Figura 2

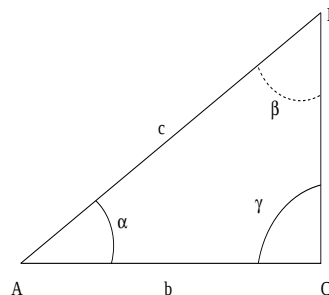


Figura 3

Dunque in triangoli rettangoli che hanno un angolo acuto diverso il rapporto tra cateto e ipotenusa cambia. Da queste due osservazioni segue che i rapporti:

$$\frac{BC}{AB} \quad \text{e} \quad \frac{AC}{AB}$$

di un cateto con l'ipotenusa dipendono solo dall'ampiezza dell'angolo α (sono cioè funzioni di α).

Le uguaglianze:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}, \quad \cos \alpha = \frac{AC}{AB}$$

ovvero (con riferimento alla Figura 3)

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

definiscono rispettivamente le funzioni *trigonometriche seno* e *coseno*.

In altre parole $\sin \alpha$ è il rapporto tra il cateto opposto ad α e l'ipotenusa, $\cos \alpha$ quello tra il cateto adiacente ad α e l'ipotenusa. Possiamo riscrivere

$$a = c \sin \alpha, \quad b = c \cos \alpha.$$

Osserviamo che per il teorema di Pitagora si ha $a^2 + b^2 = c^2$, dunque:

$$(c \sin \alpha)^2 + (c \cos \alpha)^2 = c^2,$$

da cui otteniamo la seguente identità (detta **Relazione Pitagorica** o identità fondamentale della trigonometria):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

A partire da questa identità ritroviamo un risultato che è immediato dedurre dalle definizioni date:

in un triangolo rettangolo il *seno* ed il *coseno* sono quantità **positive** e **minori o uguali a 1**,
cioè:

in un triangolo rettangolo: $0 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \cos \alpha \leq 1.$

Siamo ora in grado di affrontare il problema che ci siamo posti in partenza (Problema 1) per i triangoli rettangoli (vedi Figura 3).

i) Dati due lati e l'angolo tra essi compreso, determinare gli altri elementi del triangolo.

Noti

$$a, c, \beta \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad \alpha = 90^\circ - \beta$$

$$b, c, \alpha \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$a, b, \gamma \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{“} \quad \text{“} \quad \sin \beta = \frac{b}{c} \quad \alpha = 90^\circ - \beta$$

$$\text{“} \quad \text{“} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{“} \quad \text{“} \quad \cos \beta = \frac{a}{c} \quad \alpha = 90^\circ - \beta$$

Si noti che $\cos \alpha = \sin \beta$ e $\sin \alpha = \cos \beta$. Possiamo dunque dedurre da queste osservazioni la seguente identità:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha).$$

ii) Dati due angoli ed un lato.⁽¹⁾

Noti

$$c, \alpha, \beta \quad a = c \sin \alpha \quad b = c \cos \alpha$$

$$\text{“} \quad a = c \cos \beta \quad b = c \sin \beta$$

$$a, \alpha, \beta \quad c = \frac{a}{\sin \alpha} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$\text{“} \quad c = \frac{a}{\cos \beta} \quad \text{“}$$

$$b, \alpha, \beta \quad c = \frac{b}{\sin \beta} \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$\text{“} \quad c = \frac{b}{\cos \alpha} \quad \text{“}$$

iii) Dati tre lati.

Noti

$$a, b, c \quad \sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{“} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \text{“}$$

$$\text{“} \quad \sin \beta = \frac{b}{c} \quad \alpha = 90^\circ - \beta$$

$$\text{“} \quad \cos \beta = \frac{a}{c} \quad \text{“}$$

¹Poiché dati due angoli, il terzo è automaticamente noto, possiamo limitarci a supporre che siano assegnati α, β .

Questo non è ancora l'obiettivo che ci eravamo posti all'inizio poiché le soluzioni sono state scritte utilizzando non direttamente gli angoli, ma il loro *seno* o *coseno*. Occorre saper passare dal valore della funzione a quello degli angoli e viceversa: dato $\sin \alpha$ o $\cos \alpha$ dobbiamo saper calcolare α oppure dato α calcolare $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$. La geometria ci consente di eseguire questi calcoli per un numero limitato di angoli (vedi oltre). In tutti gli altri casi si deve ricorrere agli strumenti più raffinati forniti dall'Analisi Matematica. Esaminiamo alcuni angoli particolari per i quali è possibile calcolare *seno* e *coseno*.

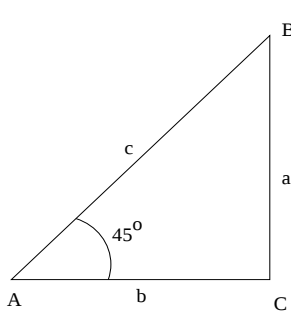


Figura 4

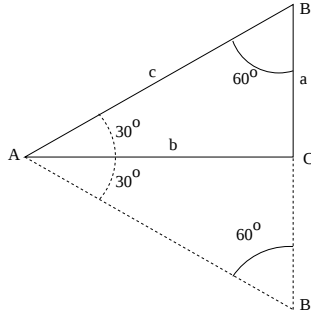


Figura 5

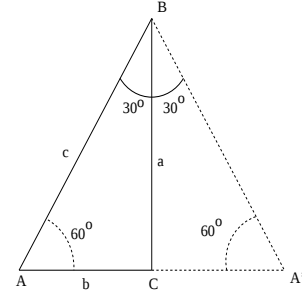


Figura 6

- $\alpha = 45^\circ$ (Figura 4)

Osserviamo che il triangolo ABC è isoscele, perché $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$. Essendo dunque $a = b$, per il teorema di Pitagora risulta $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$ da cui $c = \sqrt{2}a = \sqrt{2}b$

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $\alpha = 30^\circ$ (Figura 5)

Osserviamo che il triangolo $AB'B$ è equilatero (tutti i suoi angoli misurano 60°), quindi: $a = CB = \frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$. In definitiva:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} = \frac{\sqrt{4a^2 - a^2}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

oppure dalla relazione pitagorica:

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - (\sin 30^\circ)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- $\alpha = 60^\circ$ (Figura 6)

Osservando che il triangolo $AA'B$ è equilatero e ragionando come nel caso precedente, ricaviamo che $b = \frac{1}{2}c$ e quindi:

$$\cos 60^\circ = \frac{b}{c} = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\alpha = 0^\circ$

In questo caso il triangolo si riduce ad un segmento in cui $B \equiv C$ e dunque $a = 0$, $b = c$. Allora:

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{b} = 0, \quad \cos 0^\circ = \frac{c}{c} = 1.$$

- $\alpha = 90^\circ$

Anche in questo caso il triangolo diventa un segmento, con $A \equiv B$ e dunque $c = 0$ e $a = b$. Allora:

$$\sin 90^\circ = \frac{a}{a} = 1, \quad \cos 90^\circ = \frac{0}{b} = 0$$

Come abbiamo già detto, in generale il valore di $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ non può essere ottenuto per via elementare, ma solo utilizzando i metodi dell'Analisi Matematica. Possiamo però servirci di una calcolatrice. In generale la calcolatrice legge i gradi e le sue frazioni decimali, ma non quelle sessagesimali. Per gli angoli espressi in questa forma occorre operare prima una conversione (cosa che la calcolatrice fa quando viene digitato un opportuno tasto che varia a seconda del modello). Ad esempio, calcoliamo $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ per $\alpha = 30^\circ 15' 20''$. Ricordiamo che:

$$\text{un primo} = \frac{1}{60} \text{ di grado}, \quad \text{un secondo} = \frac{1}{3600} \text{ di grado}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\alpha = 30^\circ 15' 20'' = \left(30 + \frac{15}{60} + \frac{20}{3600} \right)^\circ = (30,2555555556)^\circ.$$

Digitiamo il valore ottenuto nella calcolatrice ed otteniamo:

$$\sin (30,2555555556)^\circ = 0,5038577453, \quad \cos (30,2555555556)^\circ = 0,86378665384.$$

Viceversa, vogliamo calcolare l'angolo α compreso tra 0° e 90° tale che $\cos \alpha = 0,7$. Digitiamo questo valore sulla calcolatrice, poi digitiamo $\cos^{-1}$ ed otteniamo $(45,572996)^\circ$. A questo punto trasformiamo le frazioni decimali dei gradi ottenuti in frazioni sessagesimali (e anche per questa operazione la calcolatrice ha un tasto opportuno che deve essere digitato). Concretamente, moltiplichiamo $0,572996$ per 60 ed otteniamo $34,37976$ (primi); moltiplicando $0,37976$ per 60 otteniamo $22,7856$ (secondi). In definitiva $(45,572996)^\circ = 45^\circ 34' (22,7856)''$.

8.2 Le funzioni trigonometriche.

Le funzioni trigonometriche sono state definite nel paragrafo precedente per gli angoli interni di un triangolo rettangolo (quindi per angoli di ampiezza compresa tra 0° e 90°). Nel presente paragrafo diamo una definizione delle funzioni trigonometriche per angoli di ampiezza qualunque, anche negativa. Per questo scopo, introduciamo prima la nozione di angoli orientati.

Angoli orientati.

Consideriamo l'angolo individuato dalla coppia ordinata a, b di semirette del piano con la medesima origine O .

Diremo che l'angolo è orientato se è stabilito quale delle due semirette deve considerarsi come primo lato.

Se scriviamo $\widehat{ab}$ consideriamo a come primo lato. Quindi $\widehat{ab}$ e $\widehat{ba}$ sono da considerarsi diversi (Figura 7).

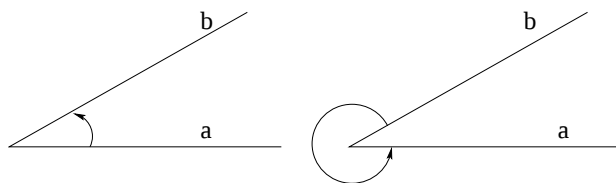


Figura 7

L'angolo $\widehat{ab}$ si dice positivo se è descritto dalla semiretta a mediante una rotazione antioraria, negativo se la rotazione è oraria.

La misura di un angolo è positiva o negativa a seconda che l'angolo sia positivo o negativo.

Supponiamo che la semiretta a si sovrapponga alla semiretta b dopo aver percorso l'angolo di misura α . La semiretta continuerà a sovrapporsi se la ruotiamo ulteriormente di uno o più angoli giri. Tenendo conto di questa considerazione, possiamo associare all'angolo $\widehat{ab}$ infiniti numeri reali della forma $\alpha + k360^\circ$: ognuno di essi può essere scelto come misura dell'angolo $\widehat{ab}$. In altre parole, la misura di un angolo è individuata a meno di multipli interi di 360° : $\widehat{ab} = \alpha + k360^\circ$, $0 \leq \alpha < 360^\circ$. Chiameremo il valore α *misura principale* dell'angolo. A meno che non sia specificato diversamente, quando parleremo di misura di un angolo intenderemo sempre riferirci a questo valore principale.

Consideriamo un sistema di assi cartesiani aventi l'origine O nel vertice dell'angolo $\widehat{ab}$ e il semiasse positivo delle ascisse coincidente con a . Aggiungiamo inoltre una circonferenza di raggio unitario avente il centro in O e indichiamo con A e B rispettivamente l'intersezione di questa con le semirette a, b (Figura 8).

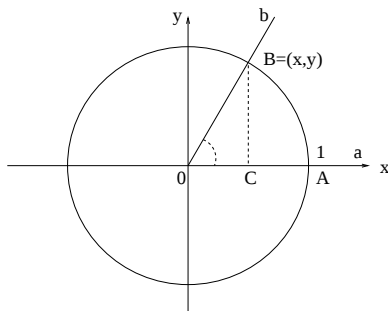


Figura 8

DEFINIZIONE 46.

Se $B = (x, y)$ e misura di $\widehat{ab} = \alpha$, poniamo:

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x.$$

In questo modo le funzioni trigonometriche sono definite per qualunque valore dell'angolo $\widehat{ab}$ (positivo o negativo).

Nel caso in cui la misura dell'angolo abbia un valore compreso tra 0° e 90° ritroviamo la stessa definizione del paragrafo precedente; infatti:

$$\sin \widehat{ab} = \frac{CB}{OB} = \frac{CB}{1} = \text{ordinata di } B, \quad \cos \widehat{ab} = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = \text{ascissa di } B.$$

Continua a valere la relazione pitagorica in quanto:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = x^2 + y^2 = (BO)^2 = 1.$$

Dalla definizione data è facile verificare che:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Abbiamo osservato in precedenza che se $\widehat{ab}$ ha ampiezza α allora gli angoli di ampiezza $\alpha + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ coincidono con $\widehat{ab}$, quindi anche il valore delle loro funzioni trigonometriche coincide:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + k360^\circ), \quad \cos \alpha = \cos(\alpha + k360^\circ), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Queste eguaglianze provano che le funzioni *seno* e *coseno* sono periodiche di periodo 360° .²

²Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T > 0$, se per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $f(x) = f(x + T)$.

Come abbiamo già detto nelle definizioni preliminari viste nel Paragrafo 1, per calcolare esplicitamente il valore del *seno* e del *coseno* di un angolo si dovrebbero utilizzare gli strumenti dell'Analisi Matematica (formula di Taylor). In pratica basta un PC o una calcolatrice scientifica secondo le istruzioni già introdotte. Per un numero limitato di angoli, il risultato si può ottenere ancora per via geometrica. A tale scopo richiamiamo nelle figure sotto le relazioni rispettivamente tra altezza e lato di un triangolo equilatero (Figura 9), lato e diagonale di un quadrato (Figura 10) (si usa il teorema di Pitagora).

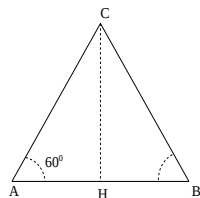


Figura 9

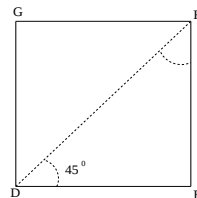


Figura 10

$$HB = \frac{1}{2}CB, \quad HC = \frac{\sqrt{3}}{2}CB, \quad DF = DE \sqrt{2}$$

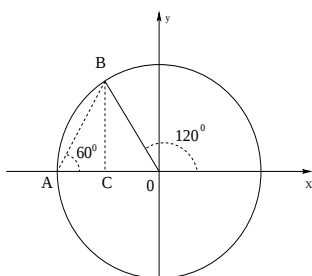


Figura 11

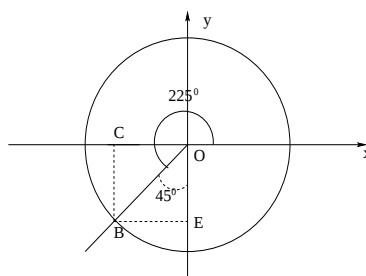


Figura 12

- $\alpha = 120^\circ$

Consideriamo il triangolo AOB (equilatero)⁽³⁾ (Figura 11) .

Per quanto osservato sopra, $\sin \alpha =$ ordinata di $B = BC = \frac{\sqrt{3}}{2}OB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mentre $\cos \alpha =$ ascissa di $C = -OC = -\frac{1}{2}OB = -\frac{1}{2}$.

- $\alpha = 180^\circ$

Il punto B ha coordinate $(-1,0)$, quindi: $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = -1$.

- $\alpha = 225^\circ$ (Figura 12)

B è il vertice del quadrato OCBE la cui diagonale $OB = 1$. Quindi la misura di BC è uguale alla misura di BE ed è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tenuto conto che B si trova nel quadrante dove x e y sono negativi, possiamo scrivere:

$$\sin 225^\circ = \cos 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

In maniera analoga si ragiona per determinare il valore delle funzioni trigonometriche per altri angoli notevoli (vedi la tabella più avanti).

³Perchè $OA = OB = 1$ e $\widehat{AOB}$ misura 60° .

Misura dell'angolo in radianti

Come abbiamo visto, le funzioni trigonometriche sono definite come rapporto tra lunghezze e perciò sono quantità adimensionali. Se vogliamo che questo accada per gli angoli, occorre dare una nuova definizione: quella di misura di un angolo in radianti. Per introdurla, fissato l'angolo positivo $\widehat{ab}$ di vertice 0, consideriamo il sistema di riferimento come in Figura 13 a cui sovrapponiamo la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro l'origine e raggio R ; (in questa Figura il raggio è 1) siano A, B rispettivamente le intersezioni con le semirette a, b .

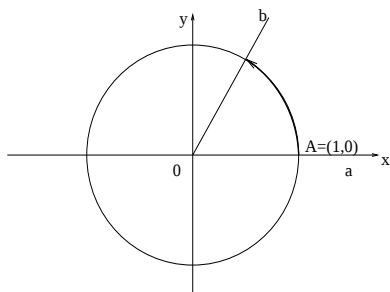


Figura 13

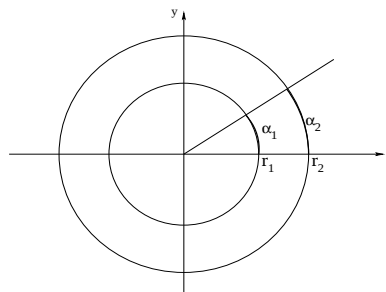


Figura 14

Indicato con $\widehat{AB}$ l'arco di circonferenza delimitato dai due punti A, B , diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 47.

Si dice misura in radianti dell'angolo positivo $\widehat{ab}$ il numero reale

$$\alpha = \frac{\text{mis } \widehat{AB}}{\text{raggio di } \mathcal{C}}.$$

Si può dimostrare che il valore di questo rapporto non dipende dal raggio della circonferenza. ⁽⁴⁾

In particolare, se $\mathcal{C}$ è la circonferenza di raggio unitario, la misura in radianti dell'angolo coincide con la lunghezza dell'arco $\widehat{AB}$. Nel caso di un angolo giro risulta $A = B$ e l'arco $\widehat{AB}$ è l'intera circonferenza, la cui misura è dunque $2\pi R$. Dalla definizione data si deduce pertanto che la misura in radianti dell'angolo giro è 2π , quella di un angolo piatto π e quella di un angolo retto $\frac{\pi}{2}$.

In generale per passare da gradi a radianti e viceversa si usa la proporzione:

$$\alpha^\circ : \alpha_{rad} = 360^\circ : 2\pi,$$

ovvero:

$$\alpha^\circ : \alpha_{rad} = 180^\circ : \pi$$

dove α° rappresenta la misura di $\widehat{ab}$ in gradi e α_{rad} quella di $\widehat{ab}$ in radianti.

In particolare: $1 \text{ rad} \cong 57^\circ 18'$, $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \cong 0,01745 \text{ rad}$.

Ogni angolo positivo è dunque misurato da un numero reale compreso tra 0 e 2π . Se l'angolo $\widehat{ab}$ è negativo, definiamo la sua misura in radianti come l'opposto della misura in radianti dell'angolo positivo $\widehat{ba}$. Come nel caso dei gradi avevamo definito la misura a meno di multipli interi di 360° , così adesso la misura in radianti sarà data a meno di multipli interi di 2π .

Come già detto, utilizzando la circonferenza di raggio unitario (*circonferenza goniometrica*): la misura in radianti di un angolo al centro α è uguale alla lunghezza s dell'arco da esso sotteso. Si può immaginare che la circonferenza rechi una scala numerica

⁴Ricordiamo che prese due circonferenze concentriche di raggi r_1, r_2 , se consideriamo due archi di lunghezza α_1, α_2 sottesi dallo stesso angolo, vale la relazione: $\alpha_1 : \alpha_2 = r_1 : r_2$. (vedi figura 14)

su cui leggere α ; ad esempio, si può pensare di *avvolgere* attorno alla circonferenza una retta in cui sia stato introdotto un riferimento cartesiano avente come unità di misura la lunghezza del raggio. Si colloca l'origine nel punto $A = (1, 0)$ della circonferenza e poi si avvolge la semiretta positiva in senso antiorario, quella negativa in senso orario. In questo modo l'angolo α si può leggere su questo asse curvilineo. In questa costruzione ad ogni angolo al centro corrisponde uno ed un solo punto sulla circonferenza e viceversa (*corrispondenza biunivoca*); ad ogni punto della circonferenza corrispondono però infiniti punti dell'asse curvilineo e dunque infiniti numeri reali: infatti, quando si esegue l'*avvolgimento* i punti che distano tra loro $k2\pi$ unità ($k \in \mathbb{Z}$) hanno come immagine lo stesso punto.

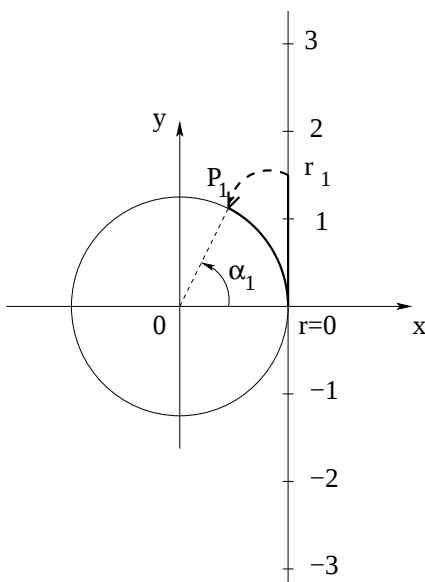


Figura 15

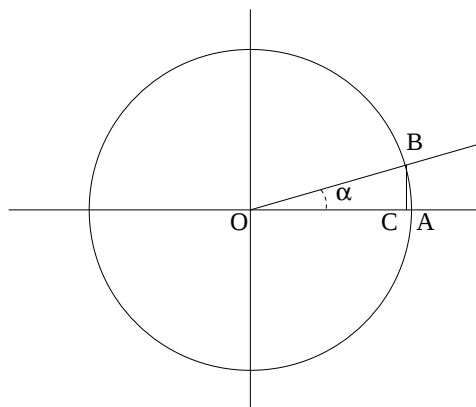


Figura 16

L'utilità che le funzioni trigonometriche e i loro argomenti abbiano la stessa unità di misura è evidente oltre che da considerazioni di carattere teorico, anche da quelle pratiche. Ricordiamo nella fisica il procedimento con il quale si deduce la legge delle piccole oscillazioni del pendolo. Nella dimostrazione della formula si osserva che per angoli piccoli $\sin \alpha \cong \alpha$ (circa uguale). Questa uguaglianza avrebbe poco senso se la grandezza al primo membro fosse espressa ad esempio in millimetri e quella al secondo membro in gradi. La tabella che segue ci dà un'idea di ciò. ⁽⁵⁾

$\alpha^\circ = \alpha \text{ rad}$	$\sin \alpha$	Differenza, %
$0^\circ = 0,0000 \text{ rad}$	0,0000	0,00
$2^\circ = 0,0349 \text{ rad}$	0,0349	0,00
$5^\circ = 0,0873 \text{ rad}$	0,0872	0,11
$10^\circ = 0,1745 \text{ rad}$	0,1736	0,51
$15^\circ = 0,2618 \text{ rad}$	0,2588	1,14

Osservando la Figura 16 ci si può rendere conto di quanto osservato sopra, cioè, se la misura dell'arco α è piccola, il segmento che rappresenta $\sin \alpha$ tende a coincidere con esso.

La funzione tangente.

La funzione *tangente*, indicata $\tan \alpha$ o $tg \alpha$, è definita attraverso l'eguaglianza:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Il dominio di questa funzione, a differenza di quanto accade per *seno* e *coseno*, non è tutto l'insieme $\mathbb{R}$. Infatti nel rapporto che definisce la tangente il denominatore si annulla per $\alpha = 90^\circ + k180^\circ$, ovvero per $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), valori che dobbiamo escludere dal dominio della funzione, che dunque è definita per

$$\alpha \neq 90^\circ + k180^\circ \quad \text{ovvero} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

⁵vedi: R. Resnick D. Halliday, FISICA, (Parte Prima), cap.15, par. 15-5.

OSSERVAZIONE 23.

Anche $\tan \alpha$ ha una rappresentazione geometrica come $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$. Nella Figura 19 consideriamo i triangoli OCB e OAD . Essendo simili possiamo scrivere: $\frac{CB}{OC} = \frac{AD}{OA}$; ma $OC = \cos \alpha$, $CB = \sin \alpha$, $OA = 1$ e quindi

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{OC}{CB} = \frac{AD}{OA} = AD.$$

Di conseguenza $\tan \alpha$ è l'ordinata del punto D sulla retta tangente orientata positivamente verso l'alto. A differenza di $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ che variano sempre tra -1 e 1 , non c'è alcuna limitazione per $\tan \alpha$ che varia su tutto $\mathbb{R}$.

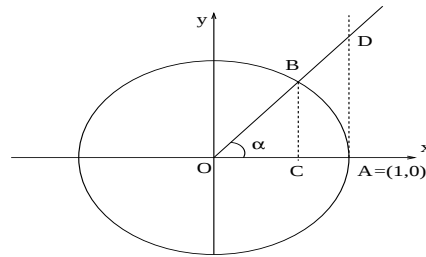


Figura 17

Possiamo definire una nuova funzione, detta *cotangente* e indicata $\cot \alpha$ (o anche $\cot \alpha$ o $\cotg \alpha$), attraverso l'uguaglianza

$$\cot \alpha = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Questa funzione è definita se $\sin x \neq 0$ cioè per $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Possiamo anche scrivere

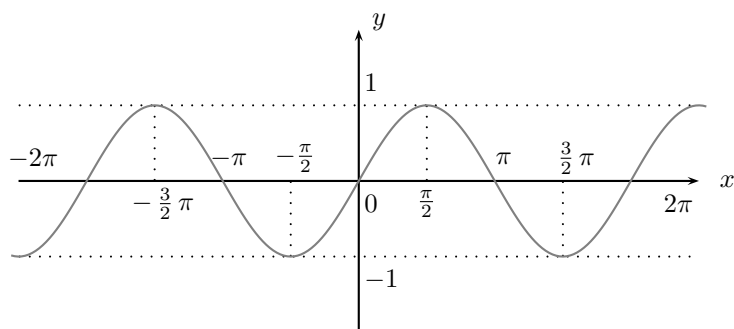
$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

con la convenzione che $\cot \alpha = 0$ per $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) (cioè dove la tangente non è definita); la nuova espressione non è definita nei punti in cui $\tan \alpha = 0$, cioè appunto per $\alpha = k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

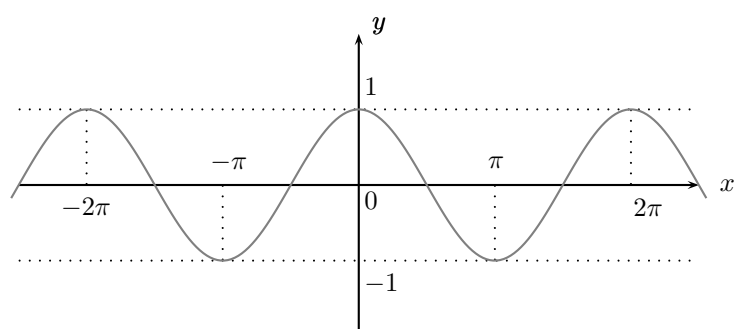
Riassumiamo nella seguente tabella quanto abbiamo ottenuto finora.

α°	α_{rad}	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	non esiste
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
360°	2π	0	1	0

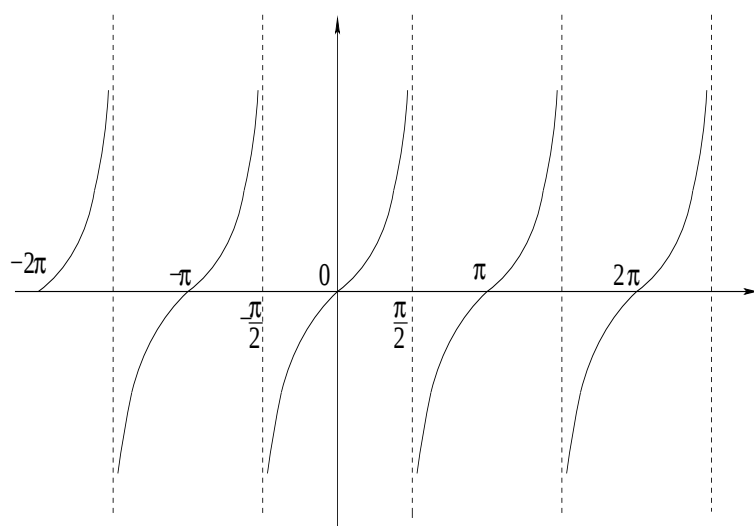
I dati riportati nella tabella ci permettono di tracciare un grafico approssimato di ciascuna funzione trigonometrica.



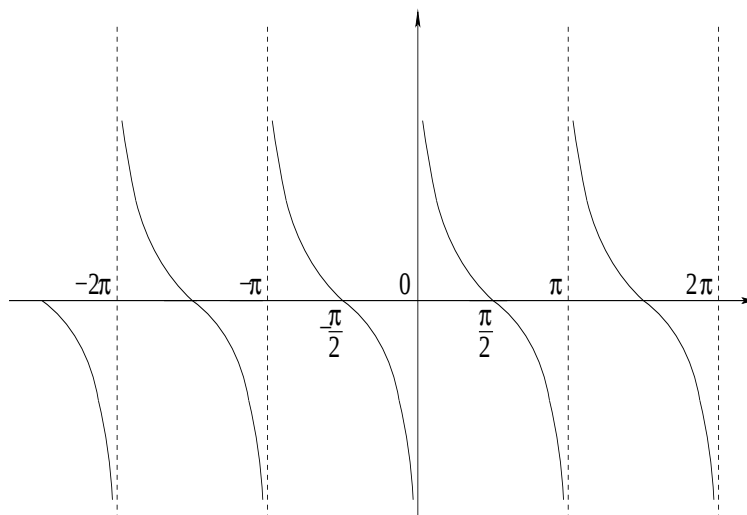
$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$



$$y = \tan x$$



$$y = \cot x$$

8.3 Formule della trigonometria.

In questo paragrafo riportiamo le principali formule della trigonometria, utili nella semplificazione di espressioni o equazioni in cui compaiono le funzioni trigonometriche.

Mettiamo subito in guardia il lettore dal ritenere che queste funzioni dipendano linearmente dal loro argomento. Ad esempio:

$$\sin 2x \quad \text{NON È UGUALE A} \quad 2 \sin x$$

Infatti se $x = 45^\circ$ si ha che $\sin 2 \cdot 45^\circ = \sin 90^\circ = 1$, mentre $2 \sin 45^\circ = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Ed ancora

$$\sin(\alpha + \beta) \quad \text{NON È UGUALE A} \quad \sin \alpha + \sin \beta.$$

Infatti se $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$ si ha che $\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$, mentre

$$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} > 1.$$

Noto	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$
$\tan \alpha$	$\frac{\tan \alpha}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\tan \alpha$	$\frac{1}{\tan \alpha}$
$\cot \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$	$\frac{\cot \alpha}{\pm \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cot \alpha}$	$\cot \alpha$

N.B. Quando nelle formule sopra compare $\pm$ non si intende che vadano bene entrambe le opzioni, ma il segno si sceglie in base al quadrante dove cade il secondo lato dell'angolo.

Angoli associati.

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha \\ \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha \\ \tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \\ \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha \\ \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha \end{cases}$$

Formule di addizione.

Formule di sottrazione

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{cases}$$

Formule di duplicazione.

Formule di bisezione.⁶

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \\ = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \pm \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \end{cases}$$

Formule di prostaferesi.

Formule di Werner.⁽⁷⁾

$$\begin{cases} \sin p \pm \sin q = 2 \sin \frac{p \pm q}{2} \cos \frac{p \mp q}{2} \\ \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \end{cases}$$

Espressioni di $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ come funzioni razionali di $\tan \frac{\alpha}{2}$.

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Diamo alcuni esempi di come usare le formule della trigonometria elencate sopra. Si tratta di dimostrare alcune identità.

ESEMPIO 196.

$$\cos^4 \xi - \sin^4 \xi = \cos 2\xi \quad (8.1)$$

Sviluppiamo il primo membro:

$$\begin{aligned}
\cos^4 \xi - \sin^4 \xi &= (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi)(\cos^2 \xi + \sin^2 \xi) = \text{(per la relazione Pitagorica)} \\
&= (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) \cdot 1 = \text{(vedi formule di duplicazione)} \\
&= \cos 2\xi.
\end{aligned}$$

ESEMPIO 197.

$$\cos^2 \frac{1}{2} \xi = \frac{\tan \xi + \sin \xi}{2 \tan \xi} \quad (8.2)$$

Sviluppiamo il primo membro utilizzando la formula di *bisezione* del *coseno*:

$$\cos^2 \frac{1}{2} \xi = \frac{1 + \cos \xi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \xi$$

Sviluppiamo il secondo membro di (8.2)

$$\frac{\tan \xi + \sin \xi}{2 \tan \xi} = \frac{\tan \xi}{2 \tan \xi} + \frac{\sin \xi}{2 \tan \xi} = \frac{1}{2} + \frac{\sin \xi}{2 \tan \xi} = \frac{1}{2} + \frac{\sin \xi}{2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \xi \quad (8.3)$$

L'identità è verificata.

ESEMPIO 198.

$$(\sin \xi + \cos \xi)^2 = 1 + \sin 2\xi. \quad (8.4)$$

Sviluppiamo il quadrato al primo membro:

$$\begin{aligned}
(\sin \xi + \cos \xi)^2 &= \overbrace{\sin^2 \xi + \cos^2 \xi}^{=1} + 2 \sin \xi \cos \xi = \text{(relazione Pitagorica)} \\
&= 1 + 2 \sin \xi \cos \xi = \text{(formula di duplicazione del seno)} \\
&= 1 + \sin 2\xi.
\end{aligned}$$

ESEMPIO 199.

$$\sin 2\xi \cos \xi - \cos 2\xi \sin \xi = \sin \xi. \quad (8.5)$$

Applichiamo al primo membro di (8.5) le formule di sottrazione del *seno*, prendendo $\alpha = 2\xi$, $\beta = \xi$:

$$\sin 2\xi \cos \xi - \cos 2\xi \sin \xi = \sin(2\xi - \xi) = \sin \xi.$$

In alternativa, utilizzando le formule di duplicazione, il primo membro si scrive nella forma

$$2 \sin \xi \cos^2 \xi - (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) \sin \xi = \sin \xi (\sin^2 \xi + \cos^2 \xi) = \sin \xi.$$

ESEMPIO 200.

$$\sin 3\xi - \sin 2\xi = \frac{1}{2}(\cos \xi - \cos 5\xi) \quad (8.6)$$

Applichiamo al primo membro dell'identità le formule di Werner (vedi Tabella sopra) con $\alpha = 3\xi$, $\beta = 2\xi$:

$$\sin 3\xi \sin 2\xi = \frac{1}{2}[\cos(3\xi - 2\xi) - \cos(3\xi + 2\xi)],$$

da cui segue l'identità proposta.

ESEMPIO 201.

$$\cos \xi - \sin \xi \tan 2\xi = \frac{\cos 3\xi}{\cos 2\xi} \quad (8.7)$$

Sviluppiamo il primo membro di (8.7) nel modo che segue:

$$\cos \xi - \sin \xi \tan 2\xi = \cos \xi - \sin \xi \frac{\sin 2\xi}{\cos 2\xi} = \frac{\cos \xi \cos 2\xi - \sin \xi \sin 2\xi}{\cos 2\xi}, \quad (8.8)$$

al numeratore della frazione di (8.8) applichiamo la formula di addizione del *coseno* prendendo $\alpha = \xi$, $\beta = 2\xi$:

$$\cos \xi \cos 2\xi - \sin \xi \sin 2\xi = \cos(\xi + 2\xi) = \cos 3\xi.$$

Sostituendo questa espressione in (8.8) otteniamo l'identità (8.7).

ESEMPIO 202.

$$\sin^3 \xi = \frac{1}{4} (3 \sin \xi - \sin 3\xi) \quad (8.9)$$

Esprimiamo $\sin 3\xi$, utilizzando le formule di addizione del *seno* come segue:

$$\sin 3\xi = \sin(2\xi + \xi) = \sin 2\xi \cos \xi + \cos 2\xi \sin \xi,$$

sostituendo al secondo membro di (8.9):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [3 \sin \xi - (\sin 2\xi \cos \xi + \cos 2\xi \sin \xi)] &= \frac{1}{4} [3 \sin \xi - \sin 2\xi \cos \xi - \cos 2\xi \sin \xi] = \\ &\quad \text{(formule di duplicazione del seno e del coseno)} \\ &= \frac{1}{4} [3 \sin \xi - 2 \sin \xi \cos \xi \cos \xi - \sin \xi + 2 \sin^3 \xi] = \\ &\quad \text{(relazione Pitagorica)} \\ &= \frac{1}{4} [2 \sin \xi - 2 \sin \xi (1 - \sin^2 \xi) + 2 \sin^3 \xi] = \\ &= \frac{1}{4} [2 \sin^3 \xi + 2 \sin^3 \xi] = \sin^3 \xi. \end{aligned}$$

ESEMPIO 203.

$$\sin \xi + \sin 2\xi + \sin 3\xi = \sin 2\xi (1 + 2 \cos \xi) \quad (8.10)$$

Al primo membro di (8.10) applichiamo le formule di addizione del *seno* alla funzione $\sin 3x$ come segue:

$$\sin 3\xi = \sin(2\xi + \xi) = \sin 2\xi \cos \xi + \cos 2\xi \sin \xi;$$

possiamo sostituire questa espressione nel primo membro di (8.10):

$$\begin{aligned}
\sin \xi + \sin 2\xi + \sin 3\xi &= \sin \xi + \sin 2\xi + \sin 2\xi \cos \xi + \cos 2\xi \sin \xi = \\
&= \sin 2\xi(1 + \cos \xi) + \sin \xi(1 + \cos 2\xi) = \\
&\quad \text{(formula di duplicazione del coseno)} \\
&= \sin 2\xi(1 + \cos \xi) + \sin \xi(1 + 2\cos^2 \xi - 1) = \\
&= \sin 2\xi(1 + \cos \xi) + 2\sin \xi \cos \xi \cos \xi = \\
&\quad \text{(formula di duplicazione del seno)} \\
&= \sin 2\xi(1 + \cos \xi) + \sin 2\xi \cos \xi = \sin 2\xi(1 + 2\cos \xi).
\end{aligned}$$

ESEMPIO 204.

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (8.11)$$

Esprimiamo la *tangente* come rapporto tra *seno* e *coseno*:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \text{(formule di addizione del seno)} \\
&= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}
\end{aligned}$$

ESEMPIO 205.

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (8.12)$$

Si procede in maniera analoga a quella dell'esercizio precedente.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} &= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \text{(formule di sottrazione del seno)} \\
&= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}
\end{aligned}$$

8.4 Equazioni goniometriche elementari

Un'equazione goniometrica è un'equazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione trigonometrica.

Nei casi più elementari, dato $m \in \mathbb{R}$, si tratta di determinare (se esiste) $x \in \mathbb{R}$ tale che:

$$1) \sin x = m,$$

oppure

$$2) \cos x = m,$$

oppure

$$3) \tan x = m.$$

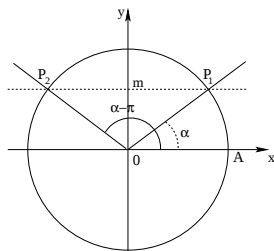
Esaminiamo in dettaglio ciascuno di questi casi.

$$1) \sin x = m$$

Questa equazione ha soluzione se e solo se $m \in [-1, 1]$ (vedi definizione di seno); se $\alpha \in \mathbb{R}$ è una soluzione, tutte le soluzioni si possono scrivere nella forma:

$$x = \alpha + 2h\pi \quad \text{oppure} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad h, k \in \mathbb{Z},$$

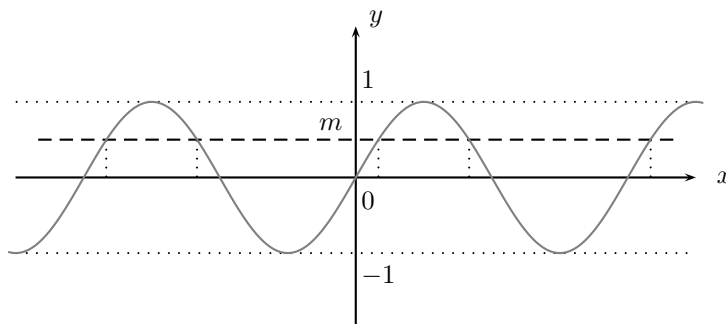
ovvero, in maniera più concisa, $x = (-1)^k \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Infatti le soluzioni possono essere ottenute graficamente intersecando la circonferenza goniometrica con la retta $y = m$. I punti P_1, P_2 di intersezione individuano gli angoli $\widehat{AOP_1}$, $\widehat{AOP_2}$ le cui misure in radianti forniscono le soluzioni dell'equazione:

$$x = \alpha + 2k\pi, \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

È evidente che queste soluzioni esistono se e solo se $|m| \leq 1$; in particolare, se $m = \pm 1$ i due punti P_1 e P_2 coincidono e invece di due infinità di soluzioni ne troviamo solo una ($x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, se $m = 1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, se $m = -1$). Un altro metodo grafico di risoluzione consiste nel trovare i punti di intersezione della retta $y = m$ con il grafico della funzione seno: le ascisse di questi punti sono le soluzioni.



Una ed una sola di queste soluzioni cade nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Chiameremo questa soluzione **arcsin m** (*arcoseno*) (vedi, più avanti, §5). Le soluzioni possono essere riscritte nella forma :

$$x = \arcsin m + 2k\pi, \quad x = \pi - \arcsin m + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

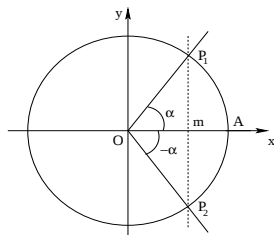
ovvero

$$x = (-1)^k \arcsin m + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos x = m$$

Questa equazione ha soluzione se e solo se $m \in [-1, 1]$ (vedi definizione di coseno); se $\alpha \in \mathbb{R}$ è una soluzione, tutte le soluzioni si possono scrivere nella forma

$$x = \pm \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



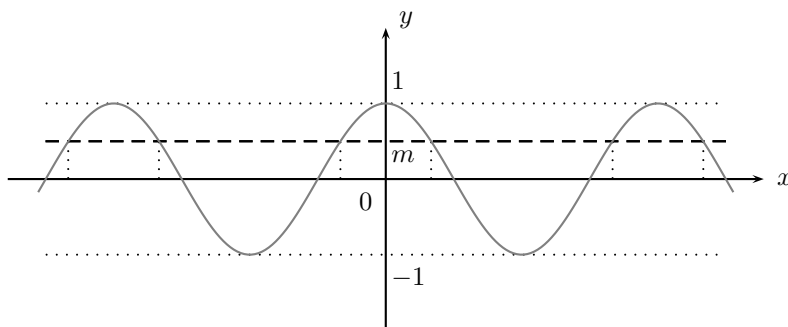
Infatti le soluzioni si possono ottenere graficamente intersecando la circonferenza goniometrica con la retta $x = m$. I punti P_1, P_2 di intersezione individuano gli angoli $\widehat{AOP_1}, \widehat{AOP_2}$ le cui misure in radianti forniscono le soluzioni dell'equazione:

$$x = \alpha + 2k\pi, \quad x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

È evidente che queste soluzioni esistono se e solo se $|m| \leq 1$; in particolare, se $m = \pm 1$ i due punti P_1, P_2 coincidono ed invece di due infinità di soluzioni ne troviamo solo una, cioè $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ se $m = 1$; $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ se $m = -1$. Come nel caso della funzione *seno* anche per la funzione *coseno* si può utilizzare un altro metodo di risoluzione grafica, che consiste nel trovare i punti di intersezione della retta $y = m$ con il grafico della funzione *coseno*: le ascisse di questi punti sono le soluzioni dell'equazione. Una ed una sola di queste soluzioni cade nell'intervallo $[0, \pi]$. Chiameremo questa soluzione **arccos m** (*arcocoseno*) (vedi, più avanti, §5).

Le soluzioni possono dunque essere riscritte nella forma

$$x = \pm \arccos m + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



3) $\tan x = m$

Questa equazione ha soluzione per ogni valore reale di m ; se $\alpha \in \mathbb{R}$ è una soluzione, tutte le altre si possono scrivere nella forma

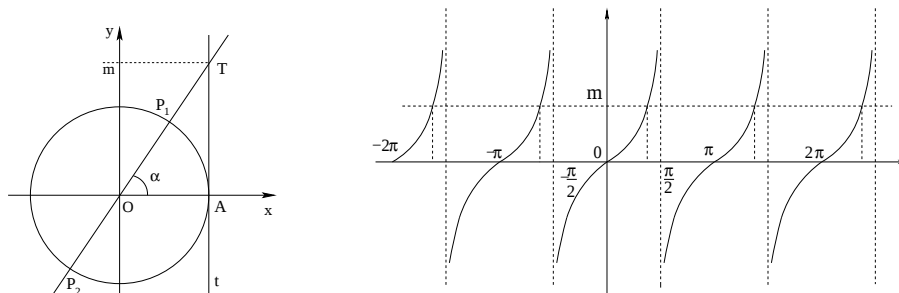
$$x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

Dal punto di vista geometrico, la retta orizzontale di equazione $y = m$ interseca la retta tangente alla circonferenza goniometrica in un punto T ; a sua volta la retta per O e T interseca la circonferenza nei due punti P_1 e P_2 . La misura in radianti degli angoli $\widehat{AOP_1}, \widehat{AOP_2}$ fornisce le soluzioni dell'equazione:

$$x = \alpha + k2\pi \quad \text{oppure} \quad x = \alpha + \pi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

che possiamo riscrivere più semplicemente nella forma

$$x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Anche in questo caso possiamo considerare l'intersezione della retta $y = m$ con il grafico della funzione *tangente*: le ascisse di questi punti sono le soluzioni dell'equazione.

Una ed una sola di queste cade nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Chiameremo questa soluzione **arctan m** (*arcotangente*) (vedi, più avanti, §5). Le soluzioni possono essere scritte anche nella forma

$$x = \arctan m + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ESEMPIO 206.

Risolvere l'equazione: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Consultando la tabella con i valori notevoli delle funzioni trigonometriche, vediamo che una soluzione è $\frac{\pi}{3}$. Dunque tutte le soluzioni dell'equazione sono:

$$x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, \quad \text{oppure} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, \quad h, k \in \mathbb{Z}$$

In maniera più sintetica: $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$.

ESEMPIO 207.

Determinare (con un'approssimazione di 10^{-9}) le soluzioni sull'intervallo $[0, 2\pi]$ dell'equazione: $\sin x = 0.8$.

Il valore proposto non è tra quelli notevoli indicati nella tabella. Ricorriamo ad una calcolatrice scientifica (o al computer). Digitiamo 0.8 e poi $\sin^{-1}$. Sul display compare

$$\sin^{-1} 0.8 =^{RAD} 0.927295218$$

le soluzioni sono:

$$x_1 = 0.927295218, \quad \text{e} \quad x_2 = 2.214297436.$$

ESEMPIO 208.

Risolvere l'equazione: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Consultando la tabella, vediamo che una soluzione è $x = \frac{3\pi}{4}$. Un primo insieme di soluzioni è dunque dato da:

$$x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre, abbiamo visto che se α è soluzione lo è anche $-\alpha$, dunque un'altro insieme di soluzioni è dato da:

$$x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

che può essere espresso anche nella forma:

$$x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

coerentemente con il fatto che nella tabella troviamo, oltre alla soluzione $\frac{3\pi}{4}$, anche $\frac{5\pi}{4}$.

ESEMPIO 209.

Determinare (con un'approssimazione di 10^{-9}) le soluzioni dell'equazione: $\cos x = 0.9$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

Anche in questo caso il valore proposto non è tra quelli notevoli indicati nella tabella. Ricorriamo ad una calcolatrice scientifica (o al computer). Digitiamo 0.9 e poi $\cos^{-1}$. Sul display compare

$$\cos^{-1} 0.9 =^{RAD} 0.451026811$$

una soluzione è $x = 0.451026811$; l'altra non è $x = -0.451026811$, perché non cade nell'intervallo considerato, ma $x = 5.832158495$.

ESEMPIO 210.

Risolvere l'equazione $\cos x = 6$.

L'equazione data non ammette soluzioni, perché la funzione *coseno* può assumere solamente valori compresi tra -1 e 1 .

ESEMPIO 211.

Risolvere l'equazione: $\tan x = \sqrt{3}$.

Dalla tabella ricaviamo che il minore degli angoli positivi la cui tangente è $\sqrt{3}$ ha misura $\frac{\pi}{3}$. Le soluzioni dell'equazione data sono:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

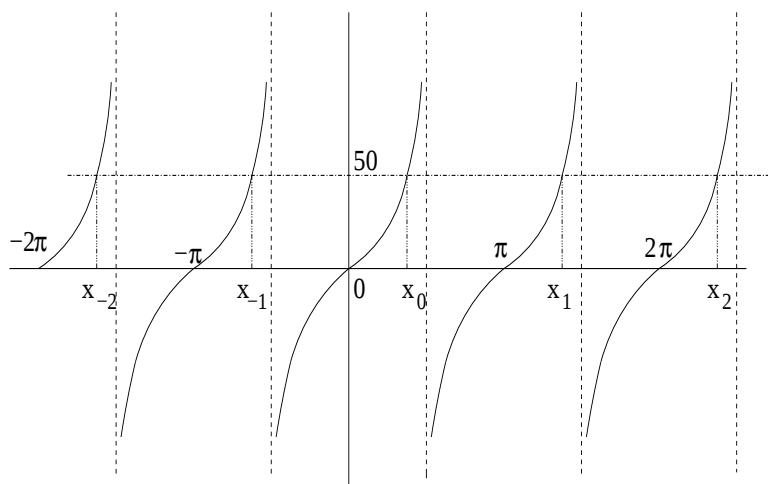
ESEMPIO 212.

Determinare (con un'approssimazione di 10^{-9}) le soluzioni nell'intervallo $[0, 2\pi]$ dell'equazione: $\tan x = 50$.

Digitiamo sul pc o sulla calcolatrice 50 e poi $\tan^{-1}$. Sul display compare

$$\tan^{-1} 50 =^{RAD} 1.550798993;$$

le soluzioni sono (vedi figura seguente): $x_0 = 1.550798993$, $x_1 = 4.692391646$; gli altri valori che verificano l'equazione non cadono nell'intervallo $[0, 2\pi]$.



8.5 Funzioni trigonometriche inverse

Le funzioni trigonometriche, in quanto periodiche, non sono iniettive (e di conseguenza nemmeno invertibili) nel loro dominio: lo diventano se ristrette ad opportuni intervalli che possono essere scelti in modo da lasciare invariata l'immagine.

• Funzione inversa della funzione seno.

La funzione $x \rightarrow \sin x$ è **crescente** sull'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ⁽⁸⁾

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x_1 < \sin x_2.$$

La restrizione f della *funzione seno* all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ha come immagine $[-1, 1]$; la funzione

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

è invertibile; alla funzione inversa diamo il nome di **arcoseno** e scriviamo

$$f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

Dunque

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Il valore $x = \arcsin m$:

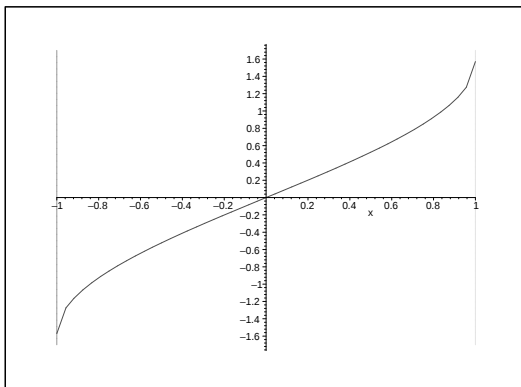
- ha senso solo se $m \in [-1, 1]$;
- è l'unico valore $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $\sin x = m$, cioè è l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin x = m \end{cases}$$

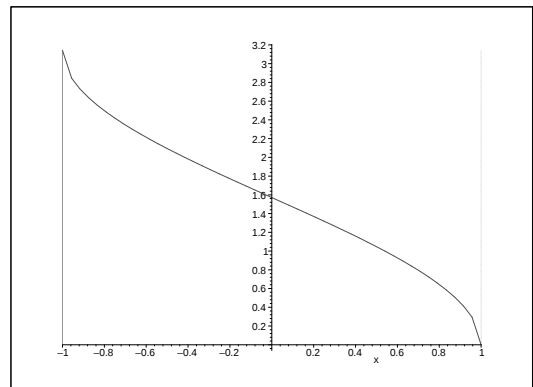
Le soluzioni dell'equazione elementare $\sin x = m$ (con $m \in [-1, 1]$) si possono dunque scrivere nella forma

$$x = \arcsin m + k2\pi \quad \text{oppure} \quad x = \pi - \arcsin m + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Il grafico della *funzione arcoseno* è riportato nella figura sotto.



$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$

⁸Infatti, presi $x_1, x_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, con $x_1 < x_2$ risulta:

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2} > 0,$$

perché

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < x_1 + x_2 < \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < x_2 - x_1 < \pi \Rightarrow 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0.$$

• **Funzione inversa della funzione coseno.**

La funzione $x \rightarrow \cos x$ è **decreciente** sull'intervallo $[0, \pi]$ ⁽⁹⁾

$$0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi \Rightarrow \cos x_1 > \cos x_2.$$

La restrizione f della *funzione coseno* all'intervallo $[0, \pi]$ ha come immagine $[-1, 1]$; la funzione

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

è invertibile; alla funzione inversa diamo il nome di **arcocoseno** e scriviamo

$$f^{-1}(x) = \arccos x.$$

Dunque

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Il valore $x = \arccos m$:

- ha senso solo se $m \in [-1, 1]$;
- è l'unico valore $x \in [0, \pi]$ tale che $\cos x = m$, cioè è l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} x \in [0, \pi] \\ \cos x = m \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione elementare $\cos x = m$ (con $m \in [-1, 1]$) si possono dunque scrivere nella forma

$$x = \pm \arccos m + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Il grafico della *funzione arcocoseno* è riportato nella figura sopra.

• **Funzione inversa della funzione tangente.**

La funzione $x \rightarrow \tan x$ è **crescente** sull'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ⁽¹⁰⁾

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x_1 < \tan x_2.$$

La restrizione f della *funzione tangente* all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ha come immagine $\mathbb{R}$; la funzione

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

è invertibile; alla funzione inversa diamo il nome di **arcotangente** e scriviamo

$$f^{-1}(x) = \arctan x.$$

Dunque

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Il valore $x = \arctan m$:

⁹Infatti, presi $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, con $x_1 < x_2$ risulta:

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2} < 0,$$

perché, essendo $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, allora $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$; mentre da $0 < \frac{x_2 + x_1}{2} < \pi$ segue $\sin \frac{x_2 + x_1}{2} > 0$.

¹⁰Infatti, presi $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, con $x_1 < x_2$ risulta:

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x_2 - \tan x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2} > 0,$$

perché $0 < x_2 - x_1 < \pi$.

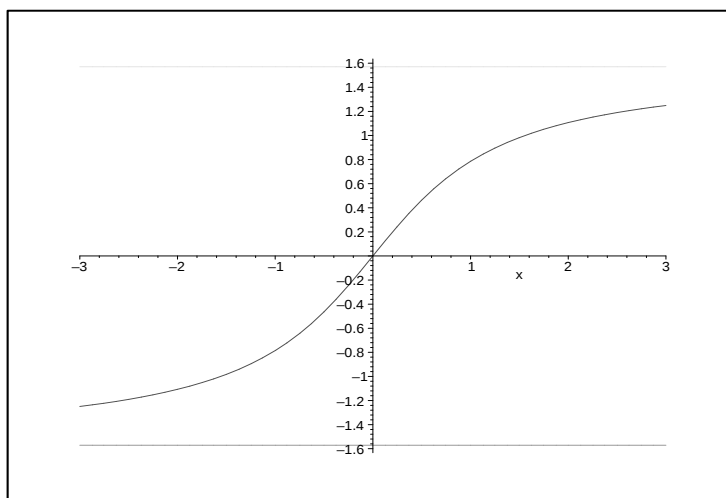
- ha senso per ogni $m \in \mathbb{R}$;
- è l'unico valore $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tale che $\tan x = m$, cioè è l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x = m \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione elementare $\tan x = m$ (con $m \in \mathbb{R}$) si possono dunque scrivere nella forma

$$x = \arctan m + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Il grafico della *funzione arcotangente* è riportato nella figura sotto.



$$y = \arctan x$$

Le tre funzioni $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$ non sono indipendenti tra loro: le prime due possono essere calcolate utilizzando solo la terza.

Infatti, se è $\sin x = m$ e se $\sqrt{1-m^2} \neq 0$, allora senza ambiguità di segno sarà $\tan x = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$, perché nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ seno e tangente hanno lo stesso segno. Dunque

$$\arcsin m = \arctan \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Analogamente, se $\cos x = m$, sarà $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = m$ e quindi $\frac{\pi}{2} - x = \arcsin m$, da cui si ricava $x = \frac{\pi}{2} - \arcsin m$. In definitiva, se $1-m^2 \neq 0$,

$$\arccos m = \frac{\pi}{2} - \arcsin m = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}.$$

8.6 Altre equazioni trigonometriche

In generale le equazioni goniometriche si presentano come eguaglianze tra espressioni in cui compaiono le funzioni trigonometriche che hanno l'incognita come argomento. Per risolverle si cercherà, applicando le formule della trigonometria (vedi il paragrafo precedente), di semplificare le espressioni fino a ridursi ad una delle equazioni elementari viste in precedenza. Diamo qui di seguito alcuni esempi di questo procedimento.

ESEMPIO 213.*Risolvere le equazioni*

$$\sin rx = \sin sx, \quad (8.13)$$

$$\cos rx = \cos sx, \quad (8.14)$$

$$\tan rx = \tan sx. \quad (8.15)$$

Se $r \neq \pm s$ si risolvono tenendo conto dei risultati elementari già stabiliti. Infatti l'equazione (8.13) è verificata per quei valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali risulta:

$$rx = sx + h2\pi, \quad h \in \mathbb{Z}$$

oppure

$$rx = \pi - sx + k2\pi, \quad k \in \mathbb{N},$$

da cui

$$x = \frac{h2\pi}{r-s}, \quad \text{oppure} \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{r+s}.$$

L'equazione (8.14) è verificata per quei valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali risulta:

$$rx = \pm sx + k2\pi \iff x = \frac{k2\pi}{r \pm s}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'equazione (8.15) è verificata per quei valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali risulta:

$$rx = sx + k\pi \iff x = \frac{k\pi}{r-s}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ESERCIZIO 9.*Risolvere l'equazione:*

$$\sin 3x = \sin 2x.$$

L'equazione ha come soluzioni le x tali che: $3x = 2x + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$ oppure $3x = \pi - 2x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi:

$$x = h2\pi, \quad h \in \mathbb{Z}, \quad \text{oppure} \quad x = \frac{(1+2k)\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ESERCIZIO 10.*Risolvere l'equazione:*

$$\cos 7x = \cos 4x.$$

Le soluzioni x sono tali che $7x = \pm 4x + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, da cui: $3x = h2\pi$ oppure $11x = h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, cioè: $x = \frac{2}{3}h\pi$ oppure $x = \frac{2}{11}h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

ESERCIZIO 11.*Risolvere l'equazione:*

$$\tan 6x = \tan 2x.$$

Deve essere $6x = 2x + h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, cioè $x = \frac{h\pi}{4}$, $h \in \mathbb{Z}$.

ESERCIZIO 12.*Risolvere l'equazione:*

$$\sin(6x - 10^0) = \sin(3x + 50^0).$$

L'equazione ha soluzioni che risolvono $6x - 10^0 = 3x + 50^0 + h360^0$, $h \in \mathbb{Z}$, oppure $6x - 10^0 = 180^0 - (3x + 50^0) + k360^0$, $k \in \mathbb{Z}$. Dunque:

$$x = \frac{60^0 + h360^0}{3} \text{ oppure } x = \frac{-40^0 + (1+2k)180^0}{9}, \quad h, k \in \mathbb{Z}.$$

ESERCIZIO 13.

Risolvere l'equazione:

$$\cos(4x + 40^0) = \cos(x - 30^0).$$

Dall'equazione data otteniamo: $4x + 40^0 = \pm(x - 30^0) + k360^0$, $k \in \mathbb{Z}$, da cui si ricava:

$$x = \frac{-70^0 + k360^0}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ oppure } x = \frac{-10^0 + h360^0}{5}, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

ESERCIZIO 14.

Risolvere l'equazione:

$$\tan(6x + 35^0) = \tan(2x + 15^0)$$

Tenendo conto delle proprietà della funzione tangente: $6x + 35^0 = 2x + 15^0 + k180^0$, $k \in \mathbb{Z}$, da cui

$$x = \frac{-20^0 + k180^0}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ESERCIZIO 15.

Risolvere l'equazione:

$$\sin 2x = \cos 3x$$

Tenendo conto dell'identità $\cos 3x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ l'equazione assegnata può essere riscritta nella forma

$$\sin 2x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Le soluzioni x sono tali che $2x = 3x + \frac{\pi}{2} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, oppure $2x = \pi - 3x - \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi:

$$x = -\frac{\pi}{2} + h2\pi, \quad h \in \mathbb{Z}, \quad \text{oppure} \quad x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2}{5}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Equazioni lineari in $\sin x$ e $\cos x$.

Sono le equazioni del tipo:

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad \text{con } a, b \neq 0. \quad (8.16)$$

I) Sia $c = 0$.

Osserviamo che deve essere $\cos x \neq 0$, perché altrimenti si avrebbe $\sin x = \pm 1$ e sostituendo nell'equazione (8.16) si otterrebbe $a = 0$, contrariamente all'ipotesi fatta. Possiamo dunque dividere entrambi i membri dell'equazione (8.16) per $\cos x$ ottenendo

$$a \tan x + b = 0 \quad \text{cioè} \quad \tan x = -\frac{b}{a}$$

che è un'equazione elementare già studiata.

ESEMPIO 214.

Risolvere l'equazione:

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

Dividiamo per $\cos x$:

$$\tan x - \sqrt{3} = 0 \iff \tan x = \sqrt{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

II) Sia $c \neq 0$.

i) *Risoluzione mediante la trasformazione di seno e coseno come funzioni razionali di $\tan \frac{x}{2}$*

Sostituiamo al posto di $\sin x$ e $\cos x$ le loro espressioni razionali in termini di $\tan \frac{x}{2}$:

$$a \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + b \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = c \quad (8.17)$$

Raccogliendo a fattor comune e semplificando:

$$(b + c) \tan^2 \frac{x}{2} - 2a \tan \frac{x}{2} + c - b = 0. \quad (8.18)$$

Se $b + c = 0$ si tratta di un'equazione elementare già vista in precedenza. Se $b + c \neq 0$, ponendo $y = \tan \frac{x}{2}$ si ottiene un'equazione di secondo grado in y . Osserviamo che le espressioni razionali usate hanno senso solo se è $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, cioè $x \neq \pi + 2k\pi$. Occorre dunque controllare separatamente se questi valori esclusi sono soluzioni dell'equazione di partenza.

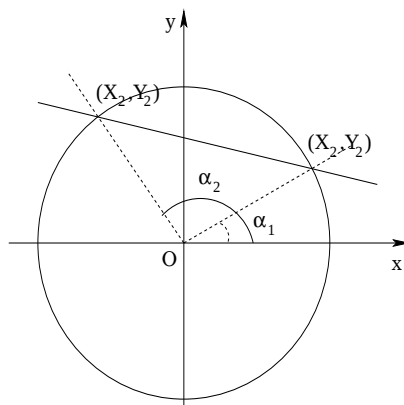
ii) *Risoluzione geometrica.*

Ponendo $X = \cos x$, $Y = \sin x$, l'equazione data si traduce nel sistema

$$\begin{cases} aX + bY = c \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

dove la seconda equazione equivale a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dal punto di vista geometrico il sistema studia le intersezioni tra una retta e la circonferenza goniometrica. Trovati i punti di intersezione (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , le soluzioni dell'equazione di partenza si ottengono risolvendo i sistemi formati dalle equazioni elementari:

$$\begin{cases} \cos x = X_1 \\ \sin x = Y_1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos x = X_2 \\ \sin x = Y_2 \end{cases}$$



ESEMPIO 215.

Risolvere l'equazione:

$$(1 - \sqrt{3}) \cos x + (1 + \sqrt{3}) \sin x = 2$$

Ponendo $X = \cos x$, $Y = \sin x$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} (1 - \sqrt{3})X + (1 + \sqrt{3})Y = 2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$(X_1, Y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{e} \quad (X_2, Y_2) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Dobbiamo quindi risolvere:

$$(I) \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II) \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Il sistema (I) ha soluzione $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, perché la prima equazione viene risolta dai valori $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ oppure $x = -\frac{\pi}{3} + 2h\pi$, mentre la seconda dai valori $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ oppure $x = \frac{2\pi}{3} + h2\pi$. Il sistema (II) ha soluzione $x = \frac{5\pi}{6} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$ perché la prima equazione viene risolta dai valori $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ oppure $x = -\frac{5\pi}{6} + 2h\pi$, mentre la seconda dai valori $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ oppure $x = \frac{5\pi}{6} + h2\pi$.

iii) *Risoluzione con altri artifici algebrici.*

L'equazione (8.16) può essere risolta ricorrendo all'introduzione di una nuova incognita e utilizzando le formule di addizione del *seno*.

L'idea segue dalla seguente osservazione.

OSSERVAZIONE 24.

Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ esiste $\varphi \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (8.19)$$

Applichiamo le formule di addizione al secondo membro dell'identità

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin x \cos \varphi + \sqrt{a^2 + b^2} \sin \varphi \cos x$$

ed otteniamo le soluzioni risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Poiché

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1,$$

la soluzione del sistema esiste ed è individuata a meno di multipli interi di 2π .

Ciò stabilito, riprendiamo l'equazione dell'Esempio 215:

$$(1 + \sqrt{3}) \sin x + (1 - \sqrt{3}) \cos x = 2. \quad (8.20)$$

Facendo riferimento alle notazioni dell'Osservazione (24), possiamo scrivere: $a = 1 + \sqrt{3}$, $b = 1 - \sqrt{3}$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2}$; di conseguenza il sistema da risolvere per determinare l'incognita ausiliaria φ è il seguente:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 0,97 \\ \sin \varphi = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -0,26. \end{cases} \quad (8.21)$$

Risolviamo, moltiplicando membro a membro le equazioni del sistema. Si ottiene

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\varphi = -\frac{1}{2}.$$

Le soluzioni dell'equazione così ottenuta sono

$$\varphi = -\frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{oppure} \quad \varphi = -\frac{5}{12}\pi + h\pi, \quad h, k \in \mathbb{Z}.$$

Tra queste si trova per verifica diretta che risolvono il sistema (8.21) solo

$$\varphi = -\frac{\pi}{12} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (8.22)$$

Inoltre dalle equazioni (8.19), (8.20) segue

$$\sin(x + \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ovvero

$$x + \varphi = \frac{\pi}{4} + h2\pi \quad \text{oppure} \quad x + \varphi = \frac{3}{4}\pi + k2\pi, \quad h, k \in \mathbb{Z}.$$

Tenuto conto di (8.22) si ha infine

$$x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, \quad \text{e} \quad x = \frac{5}{6}\pi + k2\pi, \quad h, k \in \mathbb{Z}.$$

Equazioni omogenee di secondo grado in $\sin x$ e $\cos x$.

Sono equazioni del tipo:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d \quad (8.23)$$

I) Sia $d = 0$.

Se $a = 0$ l'equazione assume la forma

$$\cos x (b \sin x + c \cos x) = 0$$

che equivale a due equazioni già studiate:

$$\cos x = 0 \quad \text{oppure} \quad b \sin x + c \cos x = 0.$$

Se $a \neq 0$ i valori di x per cui $\cos x = 0$ (e dunque $\sin x = \pm 1$) non risolvono l'equazione. Possiamo dunque dividere per $\cos^2 x$, ottenendo l'equazione

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

di secondo grado in $\tan x$, che risolviamo ponendo $y = \tan x$.

II) Sia $d \neq 0$.

Ci riconduciamo al caso precedente sostituendo il secondo membro con $d (\sin^2 x + \cos^2 x)$.

L'equazione assume la forma

$$(a - d) \sin^2 x + b \sin x \cos x + (c - d) \cos^2 x = 0. \quad (8.24)$$

ESEMPIO 216.

Risolvere l'equazione:

$$\sin^2 x - 2 \cos^2 x - \sin x \cos x = 0.$$

Poiché i valori di x per cui $\cos x = 0$ non risolvono l'equazione, possiamo dividere per $\cos^2 x$ e scrivere

$$\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$$

Posto $\tan x = t$, l'equazione di secondo grado in t

$$t^2 - t - 2 = 0$$

fornisce $t = 2$ oppure $t = -1$ e quindi

$$\begin{aligned} \tan x = 2 &\Rightarrow x = \arctan 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \tan x = -1 &\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 217.

Risolvere l'equazione:

$$\sin^2 x - 2 \cos^2 x - \sin x \cos x = 1.$$

Sostituito il secondo membro con $\sin^2 x + \cos^2 x$, possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$3 \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$$

da cui segue

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}$$

oppure

$$3 \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \tan x = -3 \Rightarrow x = -\arctan 3 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ESEMPIO 218.

Risolvere l'equazione:

$$\sin^2 x + 3 \cos^2 x + \sin x - 2 = 0.$$

L'equazione non rientra nei casi esaminati. In genere la risoluzione di equazioni di questo tipo avviene in tre passi.

1°) *Far comparire un'unica funzione nell'equazione.*

Utilizzando l'*identità fondamentale*, possiamo sostituire $\cos^2 x$ con $1 - \sin^2 x$ in modo da ottenere un'equazione in cui compare una sola funzione trigonometrica:

$$\sin^2 x + 3(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 = 0$$

cioè

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

2°) *Risolvere l'equazione ottenuta considerando la funzione trigonometrica come incognita.*

Ponendo $y = \sin x$ ci riconduciamo a risolvere l'equazione di secondo grado

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

che ha come soluzioni $y_1 = 1$ e $y_2 = -\frac{1}{2}$.

3°) *Risolvere le equazioni elementari ottenute.*

Dobbiamo risolvere le due equazioni elementari: $\sin x = 1$ (che ha soluzioni: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) e $\sin x = -\frac{1}{2}$ (che ha soluzioni $x = \frac{7}{6}\pi + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$ e $x = \frac{11}{6}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

8.7 Disequazioni goniometriche.

Per la risoluzione delle disequazioni goniometriche vale quanto detto sopra per le equazioni, quindi, o una disequazione è elementare o dobbiamo ricondurla a questo tipo utilizzando opportunamente le formule della trigonometria. Vediamo qualche esempio.

ESEMPIO 219.

Risolvere la disequazione:

$$\sin x < \frac{1}{2}.$$

L'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$ ha soluzioni $x = \frac{\pi}{6} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, e $x = \frac{5}{6}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Nella Figura 18 osserviamo che possiamo scrivere gli archi che verificano la disequazione nella forma:

$$0 + h2\pi < x < \frac{\pi}{6} + h2\pi, \quad h \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{5}{6}\pi + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi = 2(k+1)\pi,$$

ovvero

$$-\frac{7}{6}\pi + k2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad h, k \in \mathbb{Z}.$$

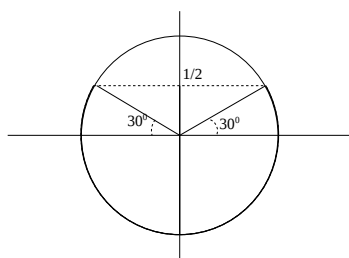


Figura 18

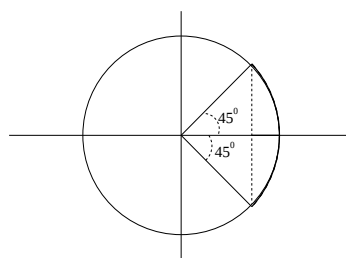


Figura 19

ESEMPIO 220.

Risolvere la disequazione:

$$\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'equazione $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ha soluzioni: $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dalla Figura 19 deduciamo che la disequazione è verificata da:

$$0 + k2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

oppure

$$-\frac{\pi}{4} + h2\pi < x < 0 + 2h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Possiamo sintetizzare nella forma

$$-\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ESEMPIO 221.

Risolvere la disequazione:

$$\tan x < 1.$$

Con procedimento analogo a quello dei casi precedenti iniziamo col risolvere l'equazione $\tan x = 1$ e poi ricorriamo al grafico della funzione *tangente* (vedi Figura 20).

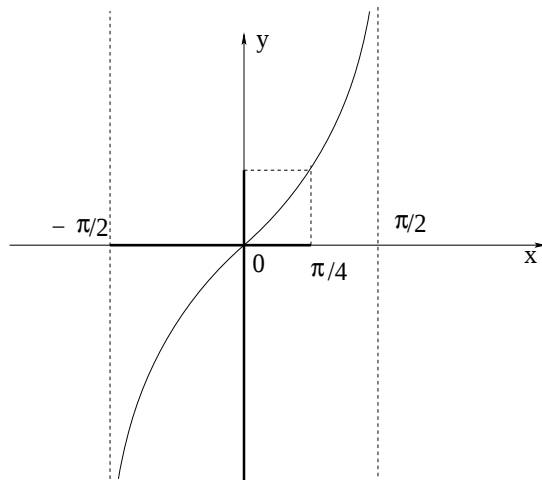


Figura 20

Le soluzioni nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sono quindi: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$. Tenendo conto della periodicità della funzione tangente abbiamo, in definitiva:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

8.8 Risoluzione dei triangoli

In questo paragrafo riprendiamo il Problema 1 sulla risoluzione dei triangoli, affrontando il caso generale. Per fare questo, abbiamo bisogno di richiamare due teoremi di trigonometria: *il teorema dei seni o di Eulero* e *il teorema del coseno o di Carnot*, entrambi validi per un triangolo qualunque ABC (figura 21).¹¹

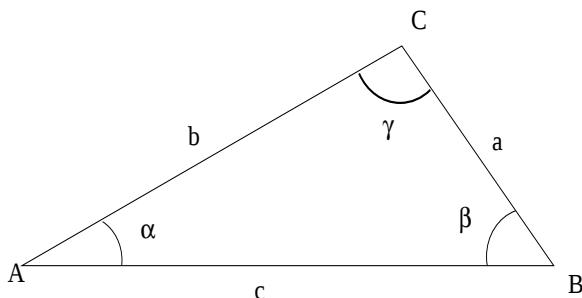


Figura 21

TEOREMA DEI SENI O DI EULERO

In un triangolo qualunque le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

Questo teorema può essere espresso nella forma:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

¹¹La dimostrazione di questi teoremi fa uso della geometria e delle funzioni trigonometriche.

TEOREMA DEL COSENO O DI CARNOT ⁽¹²⁾

In un triangolo qualsiasi, il quadrato della misura di ogni lato è eguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due diminuita del doppio prodotto delle misure di questi due lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

In formula:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 25.

Il teorema dei coseni è una generalizzazione del Teorema di Pitagora. Infatti se uno degli angoli, ad esempio α , misura 90° , sostituendo $\cos \alpha = 0$ nella prima eguaglianza si ottiene $a^2 = b^2 + c^2$ che esprime appunto l'identità pitagorica.

A questo punto siamo in grado di risolvere il Problema 1 per un triangolo qualunque.

Caso i). Noti due lati e l'angolo tra essi compreso.

Se conosciamo ad esempio b, c, α , la prima delle formule del Teorema di Carnot ci permette di calcolare a , mentre dalla seconda e dalla terza ricaviamo:

$$\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Per calcolare β e γ potremmo anche ricorrere al teorema dei seni

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \frac{b}{a} \sin \alpha \\ \sin \gamma &= \frac{c}{a} \sin \alpha.\end{aligned}$$

Ci sarebbe però ambiguità nel ricavare i valori di β e di γ , perché i due angoli potrebbero essere entrambi acuti oppure uno acuto e l'altro ottuso. Così, se β fosse acuto, sarebbe

$$\beta = \arcsin \left(\frac{b}{a} \sin \alpha \right)$$

altrimenti

$$\beta = \pi - \arcsin \left(\frac{b}{a} \sin \alpha \right).$$

Questa ambiguità può essere risolta tenendo presente che in un triangolo a lato maggiore è opposto angolo maggiore. L'utilizzo del teorema del coseno permette invece di risolvere direttamente il problema.

Caso ii). Noti due angoli ed un lato.

Supponiamo di conoscere α, β, a . Dal teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo deduciamo subito $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$. Per calcolare b, c utilizziamo il teorema dei seni, ottenendo

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}, \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

¹²Lazare Carnot, (1753-1823), matematico francese. Partecipò alla Rivoluzione del 1789. Come membro del Comitato di Salute pubblica dette un contributo decisivo alla politica scientifica della Repubblica, in particolare alla fondazione delle Grandi Scuole.

"...Con la fondazione delle Grandi Scuole finì per mutare definitivamente anche il ruolo sociale del matematico, non più un dilettante, come spesso era stato nel Seicento, né un dotto o un accademico come nel Settecento. Tranne poche eccezioni, da allora in poi il mestiere del matematico sarà indissolubilmente legato a quello di insegnante, nelle Grandi Scuole in Francia, generalmente nelle università negli altri Paesi. Tale fatto avrà esiti non indifferenti anche sul modo di fare matematica. L'organizzazione delle teorie necessarie per una chiara esposizione didattica finirà infatti per riflettersi anche sugli standard di rigore accettabili in matematica." U. Bottazzini, *Il flauto di Hilbert*, UTET, 2003.

Caso iii). Noti i tre lati.

Supponiamo di conoscere a, b, c . Dal teorema di Carnot deduciamo il coseno degli angoli α, β, γ e quindi gli angoli stessi.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (8.25)$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad (8.26)$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (8.27)$$

Ovviamente le equazioni (8.25), (8.26), (8.27) ammettono soluzioni α, β, γ se i dati verificano rispettivamente le condizioni:

$$\left| \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right| \leq 1. \quad (8.28)$$

La prima di queste disequazioni equivale a

$$-1 \leq \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \leq 1, \quad (8.29)$$

che possiamo riscrivere successivamente nelle forme equivalenti:

$$\begin{aligned} -2bc &\leq b^2 + c^2 - a^2 \quad \text{e} \quad b^2 + c^2 - a^2 \leq 2bc \\ a^2 &\leq (b+c)^2 \quad \text{e} \quad (b-c)^2 \leq a^2 \\ a &\leq b+c \quad \text{e} \quad |b-c| \leq a. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Analogamente dalle altre disequazioni si deduce:

$$\begin{aligned} b &\leq a+c \quad \text{e} \quad |a-c| \leq b, \\ c &\leq a+b \quad \text{e} \quad |a-b| \leq c. \end{aligned}$$

Queste sono proprio le condizioni dettate dai noti teoremi di geometria sulle relazioni tra le lunghezze dei lati di un triangolo: *in un triangolo la misura di un lato è minore della somma delle misure degli altri due e maggiore della loro differenza. L'uguaglianza si ottiene solo nel caso in cui il triangolo degeneri in un segmento.*

I dati del problema devono dunque verificare queste condizioni per individuare un triangolo.

Nello studio della risoluzione di un triangolo c'è un caso non ancora esaminato: quello in cui sono noti due lati (ad esempio a, b) ed un angolo non compreso tra essi (ad esempio α). In questa situazione i teoremi di uguaglianza dei triangoli non ci assicurano l'unicità di soluzioni (e nemmeno l'esistenza). Esaminiamo nel dettaglio il problema.

La strada più ovvia da seguire è quella di applicare il *Teorema dei seni* per calcolare l'angolo β , e di conseguenza l'angolo γ , riconducendosi così al caso i):

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

ovvero

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha. \quad (8.31)$$

Una volta ricavato β , sarà $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$. Per trovare c , possiamo ricorrere al *teorema dei seni* o a quello del *coseno*.

Riprendiamo l'equazione (8.31): sappiamo che ha soluzione se e solo se risulta:

$$\left| \frac{b}{a} \sin \alpha \right| \leq 1. \quad (8.32)$$

Poiché α è l'angolo interno di un triangolo (e dunque $\sin \alpha \geq 0$) la condizione (8.32) si può riscrivere in modo equivalente nella forma

$$\frac{b}{a} \sin \alpha \leq 1$$

cioè

$$a \geq b \sin \alpha.$$

Questa condizione è dunque *necessaria* per l'esistenza del triangolo.

Se $a = b \sin \alpha$, si deduce $\sin \beta = 1$ cioè $\beta = 90^\circ$: in questo caso dunque il triangolo è rettangolo.

Se $a > b \sin \alpha$, l'equazione (8.31) fornisce due soluzioni ⁽¹³⁾

$$\beta = \beta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad \beta = \beta_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Perché sia possibile la scelta di β_2 deve essere $b > a$ (infatti in questo caso l'angolo β risulta maggiore dell'angolo α e dunque il lato b opposto a β deve essere maggiore del lato a opposto ad α).

Riassumendo

se	$a < b \sin \alpha$	il triangolo non esiste
se	$a = b \sin \alpha$	il triangolo è unico e rettangolo
se	$b \sin \alpha < a < b$	esistono due triangoli
se	$a = b$	il triangolo è unico e isoscele
se	$a > b$	il triangolo è unico.

ESEMPIO 222. (Figura 22)

Siano $a = 2$, $b = 1$, $\gamma = 15^\circ$. Calcolare c , α , β .

Applicando il *teorema del coseno*, si ottiene: $c^2 = 1 + 4 - 4 \cos 15^\circ$ da cui $c = 1,066$.

Sempre per lo stesso teorema:

$$\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \beta = 14^\circ 3'$$

Di conseguenza $\alpha = 150^\circ 57'$.

Se invece usiamo il *teorema dei seni* per calcolare β , troviamo

$$\frac{\sin \beta}{1} = \frac{\sin 15^\circ}{1,066} \quad \text{cioè} \quad \sin \beta = 0,2428$$

Quest'ultima equazione fornisce $\beta_1 = 14^\circ 3'$ oppure $\beta_2 = 165^\circ 57'$.

La soluzione β_2 è naturalmente da scartare, tenendo conto della somma degli angoli interni di un triangolo. Avremmo potuto scartare a priori la possibilità di β angolo ottuso, perché il lato b opposto a β misura meno del lato a opposto ad α (si ricordi che a lati minori corrispondono angoli minori).

Dunque l'unica soluzione possibile per β è il valore $14^\circ 3'$, che coincide con il risultato trovato applicando il *teorema del coseno*.

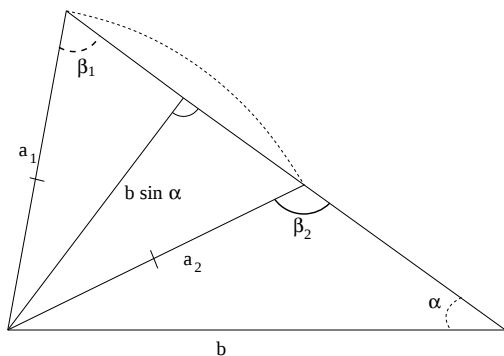


Figura 22

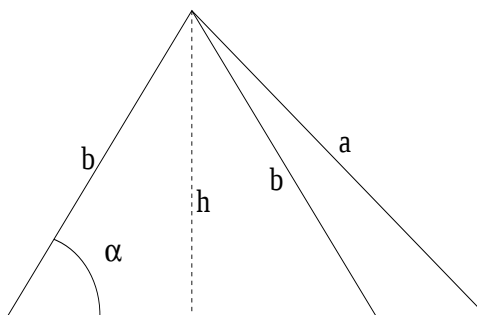


Figura 23

¹³Se fosse stato dato $\alpha > \frac{\pi}{2}$, ovviamente la seconda soluzione sarebbe da scartare. Nel caso $\alpha < \frac{\pi}{2}$ a priori possono essere scelte entrambe le soluzioni.

ESEMPIO 223. (Figura 23)

Siano $a = 18$, $b = 15$, $\alpha = 72^\circ$. Calcolare c , β , γ .

Sia $h = 15 \sin 72^\circ = 14,2658$. Poiché risulta $a > h$, il triangolo esiste; inoltre, essendo $a > b$, il triangolo è unico (vedi figura.)

Procedendo come nel precedente esercizio:

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha = 0,7925471 \Rightarrow \beta = 52^\circ 25' 27'',$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 55^\circ 34' 33'',$$

$$c = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} a = 15,612.$$

ESEMPIO 224. (Figura 24)

Siano $a = 9$, $b = 12$, $\alpha = 36^\circ$. Calcolare c , β , γ .

Poiché $h = 12 \sin 36^\circ = 7,053$, risulta $a > h$ e quindi il triangolo esiste, mentre dal fatto che $a < b$ si deduce che esistono due triangoli. Appliciamo il *teorema dei seni*:

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha = 0,7837137;$$

le soluzioni sono $\beta_1 = 51^\circ 36' 7''$ e $\beta_2 = 128^\circ 23' 53''$. Tenuto conto del *teorema della somma degli angoli interni di un triangolo*, possiamo calcolare il valore del terzo angolo $\gamma_1 = 92^\circ 23' 53''$ oppure $\gamma_2 = 15^\circ 36' 7''$.

Applicando di nuovo il *teorema dei seni* otteniamo il valore del terzo lato

$$c_1 = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \alpha} a = 15,298, \quad \text{oppure} \quad c_2 = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha} a = 4,118.$$

ESEMPIO 225. (Figura 25)

Siano $a = 8$, $b = 10$, $\alpha = 65^\circ$. Calcolare c , β , γ .

Osserviamo che poiché risulta:

$$h = 10 \sin 65^\circ = 9,063,$$

si ha $a < h$ e quindi il triangolo non esiste.

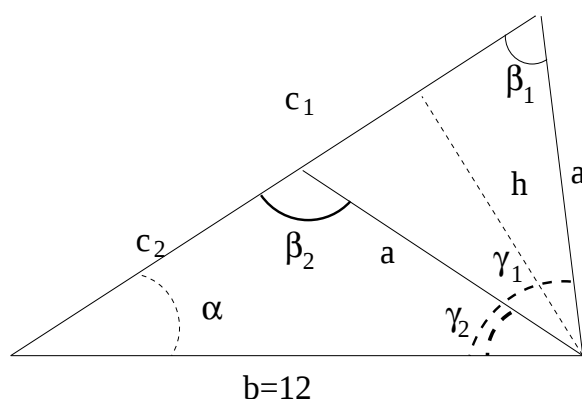


Figura 24

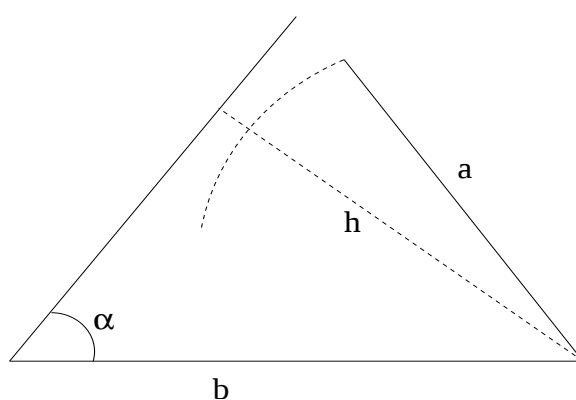


Figura 25

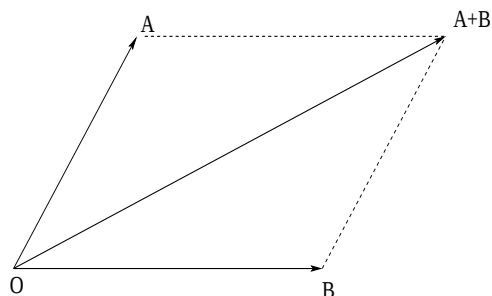
8.9 Trigonometria e vettori

I **vettori** sono segmenti rettilinei orientati, caratterizzati da una direzione, un verso e una lunghezza. Due vettori sono uguali quando hanno in comune questi elementi. Per semplicità prenderemo in considerazione solo i vettori del piano.

Fissato un punto O del piano, consideriamo i vettori il cui primo estremo sia questo punto: parleremo in questo caso di vettori applicati in O . La direzione, il verso e la lunghezza del vettore applicato lo individuano completamente. Poiché il vettore $\vec{OA}$ è individuato dall'estremo libero A , possiamo identificare i vettori applicati nell'origine con i punti del piano cartesiano e parlare del vettore A invece di $\vec{OA}$.

Per **lunghezza** (oppure ampiezza, intensità) del vettore A si intende la lunghezza del segmento OA , cioè la distanza del punto A da O .

Siano A, B due vettori; la loro **somma** $A + B$ è il vettore associato al quarto vertice del parallelogramma, avente gli altri vertici in O, A, B . La somma definita in questo modo si dice seguire la **regola del parallelogramma**.



Il prodotto di un vettore A per un numero c è il vettore cA che ha:

- la direzione di A ,
- il verso di A se $c > 0$, il verso opposto se $c < 0$,
- la lunghezza di A moltiplicata per $|c|$.

Se $c = 0$ si ottiene il vettore nullo O .



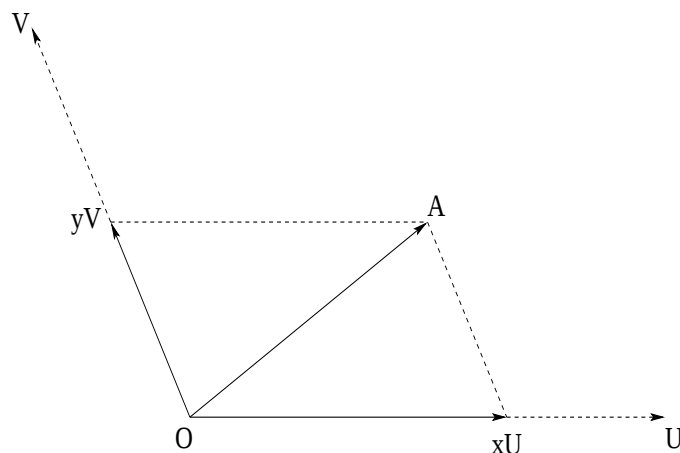
La **lunghezza** di un vettore A si indica $\|A\|$; dunque $\|cA\| = |c|\|A\|$.

Il **prodotto scalare** $A \cdot B$ di due vettori è il numero $\|A\|\|B\|\cos\theta$, essendo θ l'angolo formato dai due vettori (non è importante stabilire l'ordine con cui si scelgono, dato che $\cos\theta = \cos(-\theta)$).

Fissati due vettori U, V non paralleli (cioè i punti U, V non sono allineati con l'origine), scomporre un vettore A rispetto ai vettori dati significa trovare due numeri x, y tali che

$$A = xU + yV.$$

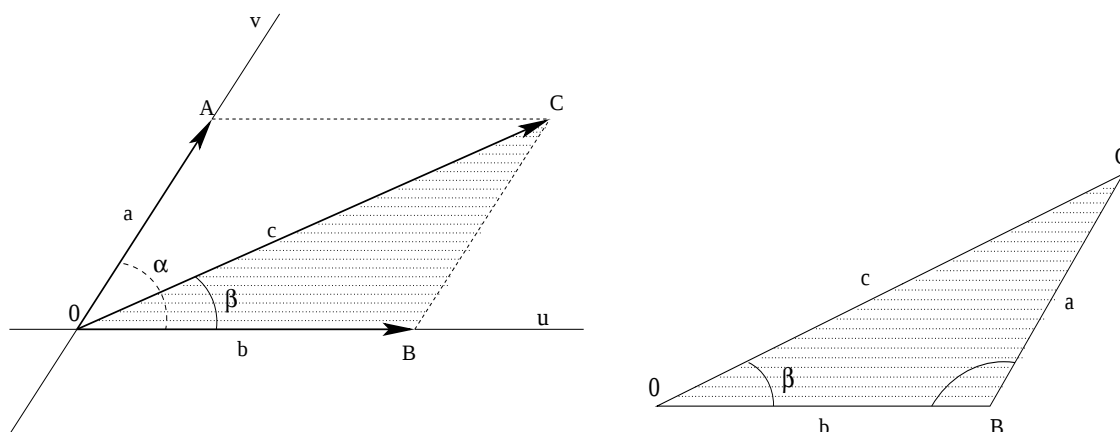
Questi due numeri si dicono componenti di A rispetto alle due direzioni assegnate. La costruzione geometrica della scomposizione secondo due direzioni è riportata nella figura sottostante.



Diamo alcuni esempi dei problemi relativi al calcolo vettoriale risolti con l'impiego della trigonometria.

PROBLEMA 1.

Siano uOv il sistema di riferimento individuato dalle due direzioni assegnate dal problema e α l'angolo orientato formato dai due assi. Sia poi C un vettore di lunghezza c che forma un angolo β con il semiasse positivo delle u . Vogliamo trovare i vettori A, B aventi le direzioni assegnate e tali che risulti $C = A + B$, secondo la regola del parallelogramma.



Consideriamo il triangolo OBC . Con semplici considerazioni geometriche si prova che $\widehat{OBC} = 180^\circ - \alpha$, $\widehat{OCB} = \alpha - \beta$.

Se a, b sono le lunghezze incognite dei due vettori A, B , per il teorema dei seni (e tenendo conto che $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$) si ha:

$$\frac{c}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Questa eguaglianza vale anche se $\beta > \alpha$ e anche in caso di angoli maggiori di 180° . Un valore negativo per a o per b indica che il vettore ha il verso negativo nel sistema di riferimento considerato e la sua lunghezza è il valore assoluto della quantità trovata.

ESEMPIO 226.

Siano i vettori U, V, F come nella Figura 26, con $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Noto il modulo F del vettore F , determinare il valore delle sue proiezioni F_v e F_u sui vettori U, V .

Applichiamo il *teorema dei seni*

$$F_u = F \frac{\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ} = F 0,297 \quad \text{nella direzione positiva di } u$$

$$F_v = F \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = F 0,816 \quad \text{nella direzione positiva di } v.$$

PROBLEMA 2.

Dati due vettori $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ di ampiezza U, V e formanti un angolo α , si vuole trovare la lunghezza F del vettore somma $\mathbf{F} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$ e gli angoli α_1, α_2 che questo forma con i due vettori dati (vedi Figura 27).

Applichiamo il **teorema dei coseni**:

$$F^2 = U^2 + V^2 - 2UV \cos(180^\circ - \alpha) = U^2 + V^2 + 2UV \cos \alpha$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{F^2 + U^2 - V^2}{2FU}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{F^2 + V^2 - U^2}{2FV}.$$

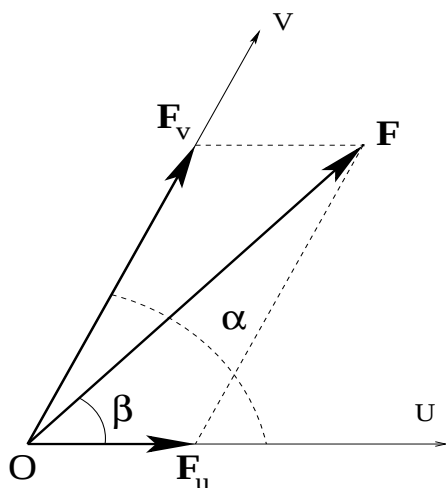


Figura 26

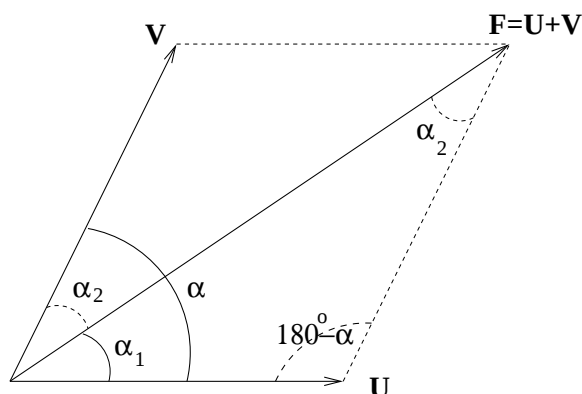
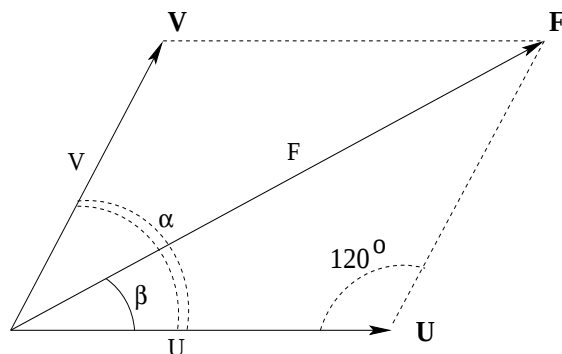


Figura 27

ESEMPIO 227.

Due vettori $\mathbf{U}, \mathbf{V}$, di lunghezza $U = 0,42$ e $V = 1,33$ rispettivamente, sono applicati ad uno stesso punto O e le loro direzioni formano un angolo di $\alpha = 60^\circ$. Trovare l'intensità F del vettore somma e l'angolo β che questo forma con $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ (vedi figura).



$$F^2 = 0,42^2 + 1,33^2 - 2 \cdot 0,42 \cdot 1,33 \cos 120^\circ = 2,503 \implies F = 1,582$$

mentre

$$\cos \beta = \frac{F^2 + U^2 - V^2}{2FU} \implies \cos \beta = \frac{2,503^2 + 0,42^2 - 1,33^2}{2 \cdot 1,582 \cdot 0,42} = 0,684$$

da cui $\beta = 46^\circ 1' 24''$.

I problemi trattati negli esempi precedenti possono essere semplificati mediante l'introduzione di un sistema di riferimento cartesiano centrato in O (che per semplicità di trattazione supponiamo costituito da due assi ortogonali). Infatti ad ogni vettore possiamo associare in modo unico una coppia ordinata di numeri reali

$$A = (a_1, a_2).$$

Se $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$ sono i due versori degli assi cartesiani (vettori di lunghezza unitaria, aventi la direzione ed il verso degli assi) allora

$$A = a_1 E_1 + a_2 E_2$$

e dunque (a_1, a_2) sono le due componenti del vettore dato. L'introduzione del riferimento cartesiano permette di riscrivere in forma algebrica le operazioni tra vettori $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$. Si può dimostrare che è

1. $A + B = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
2. $cA = (ca_1, ca_2)$
3. $A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

La verifica delle identità (1) e (2) segue da considerazioni di geometria elementare (vedi Figura 28).

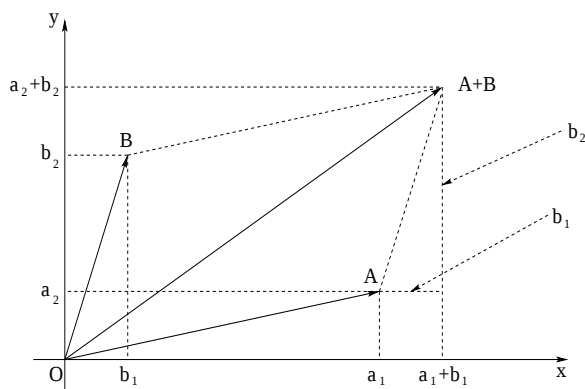


Figura 28

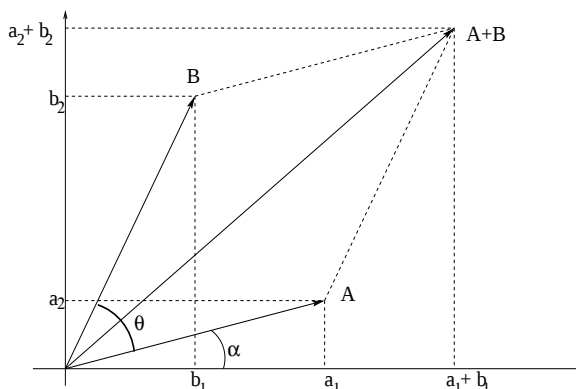


Figura 29

La formula del prodotto scalare (3) si dimostra considerando le relazioni seguenti (che si deducono dalla Figura 29):

$$\begin{cases} a_1 = \|A\| \cos \alpha \\ a_2 = \|A\| \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \|B\| \cos(\theta + \alpha) \\ b_2 = \|B\| \sin(\theta + \alpha) \end{cases}$$

Infatti utilizzando la *formula di addizione del coseno*

$$\begin{aligned} A \cdot B &= a_1 b_1 + a_2 b_2 = \\ &= \|A\| \|B\| [\cos \alpha \cos(\theta + \alpha) + \sin \alpha \sin(\theta + \alpha)] = \\ &= \|A\| \|B\| [\cos(\theta + \alpha - \alpha)] = \\ &= \|A\| \|B\| \cos \theta. \end{aligned}$$

L'introduzione di un sistema di riferimento cartesiano nel piano che contiene i vettori ci permette di affrontare in modo diverso e in qualche caso di semplificare la risoluzione dei problemi relativi al calcolo vettoriale. Vediamo come ciò avviene nei casi già visti nei Problemi 1 e 2.

PROBLEMA 1. (Metodo alternativo).

Siano date due direzioni u, v ed un vettore C ; siano inoltre

- $\|C\| = c$
- β l'angolo che C forma con u ,
- α l'angolo formato da u e v .

Determinare i vettori A, B , tali che

- la direzione di A coincide con v ,
- la direzione di B coincide con u ,
- $A + B = C$.

Associamo ai vettori assegnati un sistema di assi ortogonali xOy in modo che il vettore B sia posto sull'asse x . Quindi le coordinate dei vettori assegnati relative al sistema xOy sono date da

$(a_1, a_2) = (a \cos \alpha, a \sin \alpha)$, dove $a = \|A\|$;

$(b_1, b_2) = (b, 0)$, dove $b = \|B\|$

$(c_1, c_2) = (c \cos \beta, c \sin \beta)$.

Poiché (vedi Figura 30)

$$C = A + B \quad \Longleftrightarrow \quad (c_1, c_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (a \cos \alpha + b, a \sin \alpha),$$

deve essere

$$\begin{cases} a \cos \alpha + b = c \cos \beta \\ a \sin \alpha = c \sin \beta \end{cases}$$

da cui

$$a = \frac{c \sin \beta}{\sin \alpha} \quad \text{e} \quad b = c \cos \beta - a \cos \alpha.$$

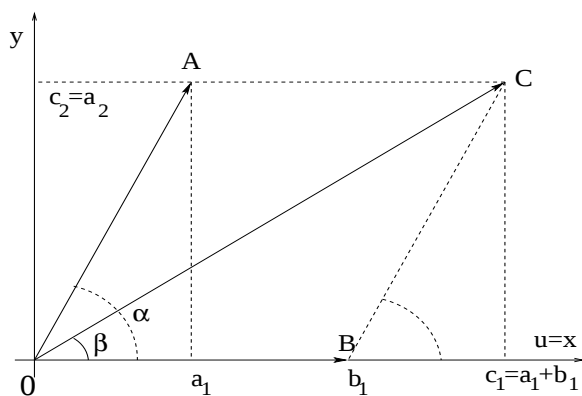


Figura 30

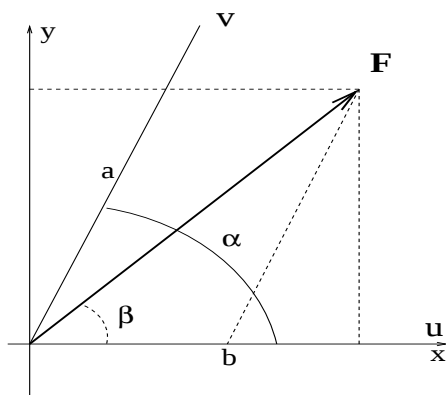


Figura 31

Vediamo ora come queste tecniche ci consentono di risolvere i problemi sui vettori esposti nelle pagine precedenti.

ESEMPIO 228. (Figura 31)

Stessi dati dell'esempio 226. Determinare la scomposizione del vettore $\mathbf{F}$ nelle direzioni u e v .

Facciamo coincidere la direzione u con l'asse x , ed applichiamo le formule trovate sopra.

$$\begin{aligned}a &= F \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = F 0,816 \\b &= F \cos 45^\circ - F \frac{\cos 45^\circ}{\sin 60^\circ} \cos 60^\circ = F 0,299\end{aligned}$$

PROBLEMA 2. (Metodo alternativo).

Dati due vettori A, B con $a = \|A\|$ e $b = \|B\|$ formanti un angolo α si determini il vettore $C = A + B$ e gli angoli α_1 e α_2 che questo forma con i due vettori dati (vedi Figura 32).

Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore B si trovi sull'asse x . Quindi $B = (b_1, b_2) = (b, 0)$ e $A = (a_1, a_2) = (a \cos \alpha, a \sin \alpha)$, da cui, posto $C = (c_1, c_2)$, si ha $c_1 = a \cos \alpha + b$ e $c_2 = a \sin \alpha$. In particolare

$$c = \sqrt{(a \cos \alpha + b)^2 + (a \sin \alpha)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$$

mentre da $c_2 = a_2$ e da $c_2 = c \sin \alpha_1$ otteniamo

$$\sin \alpha_1 = \frac{a \sin \alpha}{c} = \frac{a \sin \alpha}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}.$$

ESEMPIO 229. (Metodo alternativo per la risoluzione dell'Esempio 227).

Due vettori $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ di lunghezza $U = 0,42$ e $V = 1,33$ rispettivamente, sono applicati ad uno stesso punto O e le loro direzioni formano un angolo di $\alpha = 60^\circ$. Trovare l'intensità F e l'angolo β che il vettore somma forma con $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ (vedi Figura 33).

Risolviamo ora il problema associando un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore U si trovi sull'asse x (vedi Figura 33).

Calcoliamo le coordinate (V_x, V_y) del punto $\mathbf{V}$.

$$V_y = \frac{\sqrt{3}}{2} (1,33) = 1,1518; \quad V_x = \frac{1,33}{2} = 0,665$$

Osserviamo che $F_x = V_x + U_x = 0,665 + 0,42 = 1,085$, mentre $F_y = V_y = DH = 1,1518$.

La lunghezza del vettore $\mathbf{F}$ sarà data da

$$\|\mathbf{F}\|^2 = 1,085^2 + 1,152^2 = 2,503 \Rightarrow \|\mathbf{F}\| = 1,5823.$$

Determiniamo l'angolo β :

$$\tan \beta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1,152}{1,085} = 1,0615 \Rightarrow \beta = 46^\circ 1' 7''.$$

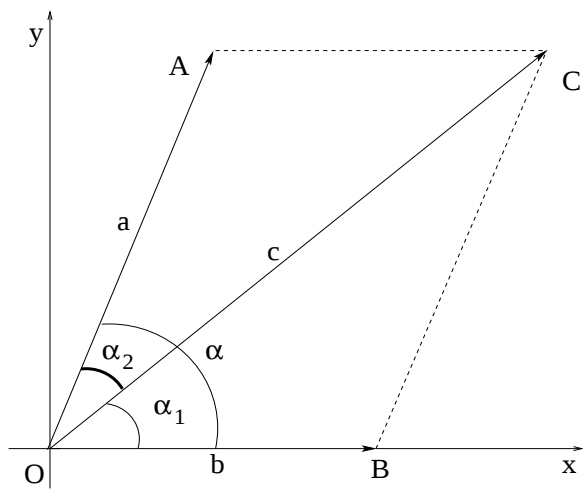


Figura 32

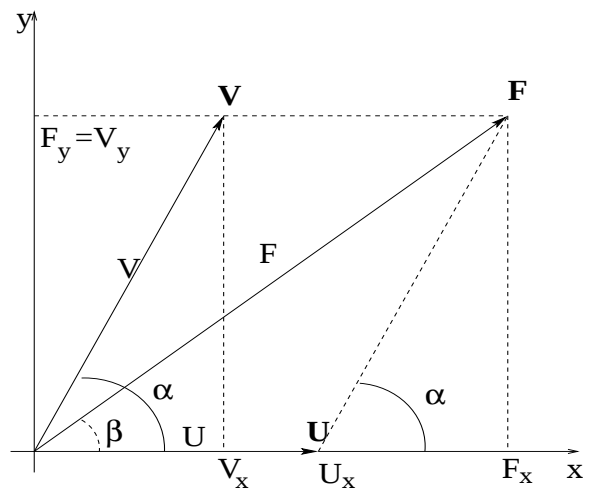


Figura 33

Parte II

ESERCIZI PROPOSTI

CENNI DI LOGICA E TEORIA ELEMENTARE DEGLI INSIEMI

(1.1) Dati gli insiemi $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, stabilire se sono vere le seguenti affermazioni:

- | | | |
|-----------------------------|---|---|
| (a) $a \in A$ | (b) $a \subset A$ | (c) $\{a\} \in A$ |
| (d) $\{a\} \subset A$ | (e) $A \in B$ | (f) $A \subset B$ |
| (g) $B \not\subset A$ | (h) $A \in \{A, B\}$ | (i) $A \setminus B = \emptyset$ |
| (l) $A \setminus B = \{c\}$ | (m) $A \setminus B = c$ | (n) $A \cap B = A$ |
| (o) $A \cup B = B$ | (p) $A \cap B = \{a, c, b\}$ | (q) $(a, c) \in A \times B$ |
| (r) $(a, c) \in B \times A$ | (s) $\forall x, x \in A \implies x \in B$ | (t) $\forall x, x \in A \implies x \in B$ |

(1.2) Dato un insieme A , si dice potenza o insieme delle parti di A e si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A (compresi $\emptyset$ e A). Ad esempio:

se $A = \{a\}$, allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$, mentre se $A = \{a, b\}$ allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$.

(a) Descrivere $\mathcal{P}(A)$ se $A = \{a, b, c\}$.

(b) Se $A = \{a, b\}$, dire quali delle seguenti scritte sono corrette:

- | | | |
|--|--|--|
| (b ₁) $a \in \mathcal{P}(A)$ | (b ₂) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ | (b ₃) $\{a\} \subset \mathcal{P}(A)$ |
| (b ₄) $A \in \mathcal{P}(A)$ | (b ₅) $A \subset \mathcal{P}(A)$ | (b ₆) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ |

(c) Provare per induzione che se A possiede n elementi, $\mathcal{P}(A)$ ne possiede 2^n .

(1.3) Trovare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ per i seguenti insiemi:

- | | |
|--|--|
| (a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -3 < x < 3\}$ | $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 5\}$ |
| (b) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -5 \leq x \leq 5\}$ | $B = \{x \in \mathbb{Z} : 2 \leq x \leq 7\}$ |
| (c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$ | $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$ |
| (d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x > -2 \text{ e } x < 2\}$ | $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \text{ o } x < -1\}$ |

(1.4) Ricordiamo che se A è una proposizione vera, allora $A \implies B$ (A implica B) se anche B lo è; in questo caso si dice che A è una *condizione sufficiente per* B (nel senso che basta che sia vera A per essere sicuri che lo è anche B) o anche che B è una *condizione necessaria per* A (nel senso che perché A sia vera deve esserlo preliminarmente B , cioè se B non è vera non lo è nemmeno A). La scrittura $A \iff B$ (doppia implicazione) significa che A è vera se e solo se lo è B , cioè le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false, ovvero A è *condizione necessaria e sufficiente per* B .

Trasformare le seguenti affermazioni in una corretta implicazione o viceversa.

- Condizione sufficiente perché un numero sia multiplo di 4 è che lo sia di 20.
- Condizione necessaria e sufficiente perché sia $\sqrt{x-1} = 1$ è $x = 2$.
- Condizione sufficiente (ma non necessaria) perché sia $x^2 > 1$ è $x > 1$.
- Condizione necessaria e sufficiente che sia $x^3 > 1$ è $x > 1$.
- Condizione necessaria (ma non sufficiente) perché una funzione sia derivabile è che sia continua. (Per svolgere l'esercizio non occorre conoscere il significato dell'affermazione)
- f continua in $[a, b] \implies f$ derivabile in $[a, b]$.
- Lo studente studia $\implies$ lo studente passa l'esame.
- $x \in A \cap B \implies x \in A$.
- $x = \sqrt{5} \implies \sqrt{x^2 - 1} = 2$.

(1.5) Date le seguenti coppie A, B di proposizioni, dire tra le implicazioni $A \implies B$, $B \implies A$, $A \iff B$ quali sono vere.

- | | | | |
|-------------------------|---|------------------------------|--|
| (a) $A: x(x-1) = 0$ | $B: x = 0$ | (f) $A: x \leq 0$ | $B: x = -x$ |
| (b) $A: x \leq 0$ | $B: x = 0$ | (g) $A: x \notin \mathbb{Q}$ | $B: x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ |
| (c) $A: x \in P \cap Q$ | $B: x \in P$ | (h) $A: x-1 \geq 2$ | $B: x \geq 3$ |
| (d) $A: x+y \geq 0$ | $B: x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$ | (i) $A: x^2 = 4$ | $B: x = 2$ |
| (e) $A: xy \geq 0$ | $B: x \text{ e } y \text{ hanno lo stesso segno}$ | (l) $A: x^2 = 4$ | $B: x = 2 \text{ oppure } x = -2$ |

- (m) $A: x^2 = 4$ $B: |x| = 2$ (r) $A: |x| > 1$ $B: x > 1$ oppure $x < -1$
 (n) $A: \sqrt{x^2} = 2$ $B: x = 2$ (s) $A: |x| > 1$ $B: x < 1$
 (o) $A: \sqrt{x^2} = 2$ $B: x = 2$ oppure $x = -2$ (t) $A: |x| > 1$ $B: x < 1$ oppure $x > -1$
 (p) $A: \sqrt{x^2} = 2$ $B: |x| = 2$ (u) $A: |x| > 1$ $B: x < 1$ e $x > -1$
 (q) $A: |x| > 1$ $B: x > 1$

(1.6) “Dato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, si ponga $a = n^2 + 1$, $b = n^2 - 1$, $c = 2n$. I numeri a , b , c formano una *terna pitagorica*, nel senso che $a^2 = b^2 + c^2$.”

Dire se le seguenti affermazioni sono corrette:

- (a) L'enunciato è falso, perché $a = 13$, $b = 12$, $c = 5$ è una terna pitagorica, ma non esiste alcun intero che risulti $13 = n^2 + 1$.
 (b) L'enunciato implica che se un triangolo è rettangolo, allora esiste un intero n tale che i cateti misurino $n^2 - 1$ e $2n$ e l'ipotenusa $n^2 + 1$.
 (c) L'enunciato è vero, perché $(n^2 + 1)^2 = (n^2 - 1)^2 + 4n^2$.
 (d) L'enunciato è falso, perché se b e c sono interi, non è detto lo sia $\sqrt{b^2 + c^2}$.

(1.7) Per ciascuna delle seguenti proposizioni scrivere la negazione:

- (a) Tutti gli studenti del corso abitano a Pisa.
 (b) Almeno uno studente del corso prenderà meno di 30 all'esame.
 (c) Tutte le studentesse del corso hanno gli occhi celesti e i capelli biondi.
 (d) Tutti i docenti del dipartimento svolgono almeno un corso oppure sono all'estero per motivi di studio.
 (e) $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in A \subset \mathbb{R}, x < M$.
 ($\mathbb{R}$ è l'insieme dei reali ed A un suo sottoinsieme. Spiegare il significato della proposizione, trovare un esempio di insieme A che la verifica ed uno che non la verifica).
 (f) $\forall x \in A \subset \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}: x < M$, (come sopra).
 (g) $\forall x', x'' \in A \subset \mathbb{R}$ con $x' \neq x''$ risulta $f(x') \neq f(x'')$,
 (qui f è una funzione definita su A . Spiegare il significato della proposizione e trovare due funzioni, una che la verifica e l'altra no).
 (h) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in A: f(x) = y$ (come sopra).

(1.8) Date le proposizioni p e s vere e le proposizioni q e r false, determinare quali delle seguenti espressioni logiche sono vere:

- (a) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s)$ (c) $[(\neg s \wedge (q \vee s))] \vee (p \wedge \neg r)$
 (b) $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg r \wedge p)$ (d) $(p \vee q) \implies (r \vee \neg s)$

(1.9) Stabilire la tavola di verità delle seguenti espressioni logiche (cioè il valore vero o falso in funzione delle possibili alternative di verità per p , q ed r):

- (a) $(p \vee \neg q) \implies (r \wedge q)$ (e) $(p \wedge q) \iff [(\neg p) \vee (\neg q)]$
 (b) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ (f) $(p \iff \neg q) \iff (q \implies \neg p)$
 (c) $(p \implies \neg q) \vee (\neg p \implies q)$ (g) $[(p \implies q) \wedge \neg q] \implies \neg p$
 (d) $(p \implies q) \iff (\neg p \implies r)$

(1.10) Stabilire se gli schemi di ragionamento sintetizzati dalle seguenti proposizioni sono corretti. Poiché i vari schemi non coincidono né con il ragionamento diretto né con quello per assurdo, possiamo costruire le tavole di verità delle proposizioni e controllare se il risultato è sempre vero, qualunque sia il valore di verità dei dati.

Il ragionamento sintetizzato in (a) si può, ad esempio, esplicitare in questo modo:

- Ipotesi 1 : se p è falsa allora q è falsa.
 Ipotesi 2 : p è vera.
 Tesi : q è vera.

- (a) $[(\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge p] \Rightarrow q$ (e) $[(\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$
 (b) $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge q] \Rightarrow \neg p$ (f) $[(\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge q] \Rightarrow p$
 (c) $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$ (g) $[(\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$
 (d) $[(\neg p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow \neg q$ (h) $[(\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$

(1.11) dati i seguenti enunciati definiti nell'insieme D indicato, determinare l'insieme di verità:

- (a) $P(x)$: x è numero primo $D = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$
 (b) $P(x)$: x è un multiplo di 3 $D = \{x \in \mathbb{N} : 10 \leq x \leq 20\}$
 (c) $P(x, y)$: $x < y$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x \leq 20) \wedge (y \leq 4)\}$
 (d) $P(x, y)$: $y = x + 2$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (-5 \leq x \leq 8) \wedge (0 \leq y \leq 10)\}$

(1.12) Dati gli enunciati $P(x) : x = 5n$, $Q(x) : x = 3n$ definiti in $D = \{x \in \mathbb{N} : 10 \leq x \leq 100\}$ e con $n \in \mathbb{N}$, stabilire l'insieme di verità di $P(x) \wedge Q(x)$ e quello di $P(x) \wedge \neg Q(x)$.

(1.13)

Dimostrare per induzione le seguenti identità:

- (a) $\sum_{k=0}^{n-1} (3k^2 + k) = n^2(n-1), \forall n \in \mathbb{N}.$
 (b) $\sum_{k=1}^n (2k \cdot 3^{k-1} + 3^k) = (3^n - 1)(n+1) + n, \forall n \in \mathbb{N}.$
 (c) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{9}{2} 10^k - 4 \cdot 5^k \right) = (2^n - 1) 5^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$

(1.14) Dimostrare le seguenti disuguaglianze.

- (a) $n! + 2^n \leq n^n, \forall n \geq 3.$
 (b) $2^n + 3^n \leq 4^n, \forall n \geq 2.$
 (c) $(1 - x^5)^{10} > (1 - x^4)^n, \forall n \geq 10, x \in (0, 1).$
 (d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$

RICHIAMI DI GEOMETRIA ANALITICA

Nota: nella maggior parte dei problemi che seguono è richiesto di saper risolvere equazioni o sistemi: per questo argomento rimandiamo al capitolo 5.

(2.1) Tracciare le rette di equazione:

- (a) $x - 2y + 1 = 0$, (b) $2x - y + 2 = 0$, (c) $-2x + y + 1 = 0$, (d) $x + y - 1 = 0$.

(2.2) Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P e avente coefficiente angolare m assegnato:

- (a) $P = (7, -3)$ $m = -1$ (b) $P = (0, 0)$ $m = -\frac{5}{2}$ (c) $P = (1, -2)$ $m = \frac{4}{3}$
 (d) $P = (-2, \frac{1}{16})$ $m = \frac{1}{2}$ (e) $P = (\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$ $m = 0$ (f) $P = (-4, 0)$ $m = -\frac{3}{4}$

(2.3) Verificare se i seguenti punti sono allineati e, in caso affermativo, scrivere l'equazione della retta che li unisce:

- (a) $A = (2, 1)$ $B = (-6, -3)$ $C = (5, \frac{5}{2})$ (b) $A = (-2, 3)$ $B = (1, -1)$ $C = (2, -3)$
(c) $A = (-1, -3)$ $B = (0, -2)$ $C = (1, -1)$ (d) $A = (1, 0)$ $B = (1, 5)$ $C = (1, \frac{5}{2})$
(e) $A = (-1, -1)$ $B = (0, 1)$ $C = (1, 2)$

(2.4) Individuare se tra le seguenti rette ve ne sono di parallele:

$$x - 5y + 1 = 0 \quad 2x - 4y + 3 = 0 \quad x - 2y = 0 \quad \frac{3}{4}x - 2y = 5 \quad y = \frac{8}{3}x - 6 \quad \frac{1}{5}x - y + 2 = 0$$

(2.5)

Individuare se tra le seguenti rette ve ne sono di perpendicolari:

$$x - y + 1 = 0 \quad x + y - 3 = 0 \quad 3x + y = 2 \quad 6x - 2y - 7 = 0 \quad 3x - y + 5 = 0 \quad x + 3y - 1 = 0$$

(2.6) Scrivere l'equazione della retta:

- (a) passante per $P = (1, 0)$ e parallela a quella di equazione $x - 2y + 1 = 0$
(b) che interseca l'asse y nel punto $(0, \frac{3}{4})$ ed è perpendicolare a quella di equazione $y = \frac{1}{2}x - 3$
(c) passante per $P = (-4, 3)$ e parallela a quella passante per i punti $A = (2, 0)$ e $B = (-1, 1)$
(d) passante per $P = (3, -2)$ e perpendicolare a quella di equazione $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$
(e) passante per $P = (3, -5)$ e perpendicolare alla bisettrice del primo e del terzo quadrante
(f) passante per $P = (1, -\frac{2}{5})$ e formante un angolo di 135° con la direzione positiva dell'asse delle x .

(2.7) Trovare il valore del parametro k in modo che

- (a) le rette di equazioni $x - 3y + 2 = 0$, $2x + ky - 1 = 0$ siano parallele
(b) le rette di equazioni $\sqrt{2}x - 3y = 0$, $kx + y - 1 = 0$ siano perpendicolari.

(2.8) Dati i punti $A = (5, -2)$, $B = (-1, -2)$, $C = (4, 1)$:

- (a) descrivere il triangolo da essi individuato servendosi di un sistema di disequazioni
(b) determinare l'equazione dell'altezza relativa alla base AB e la sua lunghezza
(c) provare che le altezze si intersecano in un punto di cui si chiedono le coordinate
(d) trovare la lunghezza del perimetro del triangolo
(e) trovare l'area del triangolo
(f) verificare che il segmento che unisce i punti medi dei due lati AB e AC è parallelo al lato BC e che la sua lunghezza è metà di quella del lato BC .

(2.9) Un rettangolo ha due vertici opposti nei punti $P = (5, 3)$ e $Q = (0, -2)$ e la retta di uno dei lati uscenti da P ha equazione $y = 2x - 7$. Scrivere le equazioni delle altre rette dei lati del rettangolo e indicare gli altri vertici.

(2.10) Stabilire la posizione reciproca delle seguenti coppie di rette e, nel caso di rette incidenti, trovare le coordinate del punto di intersezione:

- (a) $3x - 1 = 0$ $5 + 2x = 0$ (e) $5x - 3y - 4 = 0$ $5x - y - 2 = 0$
(b) $2x - 7 = 0$ $y + 3 = 0$ (f) $4x - 3y - 2 = 0$ $3x + 4y - 1 = 0$
(c) $x - y + 2 = 0$ $y = 3x + 1$ (g) $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ $y = 2x + \frac{7}{2}$
(d) $y = \frac{2}{3}x - 1$ $4x - 6y - 6 = 0$ (h) $5x - 7y + 11 = 0$ $15x - 21y + 10 = 0$

(2.11) Data la retta di equazione $2x - 5y + 1 = 0$, scrivere l'equazione di una retta

- (a) ad essa parallela (b) ad essa incidente (c) ad essa perpendicolare

(2.12) Un triangolo isoscele ha per base il segmento AB di estremi $A = (1, 3)$ e $B = (-3, 5)$, mentre il suo vertice si trova sull'asse x . Calcolare le coordinate di C e l'area del triangolo.

(2.13) Un trapezio $ABCD$, rettangolo in A e di base maggiore AB , ha tre vertici nei punti $A = (0, 2)$, $B = (8, 4)$, $C = (2, 7)$; calcolare le coordinate del quarto vertice.

(2.14) Un triangolo isoscele ha vertice in $A = (3, 2)$; il punto medio M della base BC ha coordinate $(-3, 0)$ e la retta del lato AB passa per $P = (-1, 4)$. Calcolare perimetro e area del triangolo.

(2.15) Determinare un punto P sulla retta di equazione $y = -\frac{1}{3}x + 2$ in modo che, tracciata per P la retta di coefficiente angolare 2, il triangolo che le due rette formano con l'asse delle y abbia area $\frac{21}{2}$.

(2.16) Calcolare la distanza del punto P dalla retta r

- (a) $P = (4, 0)$ $r : x - 2y + 6 = 0$ (c) $P = (5, \frac{3}{2})$ $r : 3x + 4y + 4 = 0$
 (b) $P = (1, 0)$ $r : x + y - 1 = 0$ (d) $P = (6, -2)$ $r : y = \frac{3}{2}x + 2$

(2.17) Date due rette parallele, la distanza di un qualunque punto della prima dalla seconda si mantiene costante; questo numero misura la distanza tra le due rette. Trovare questa distanza per le seguenti coppie di rette:

- (a) $y = 2x$, $2x - y + 6 = 0$ (b) $2x + y + 4 = 0$, $4x + 2y - 7 = 0$.

Stabilire il risultato nel caso generale per le rette $ax + by + c = 0$, $ax + by + c' = 0$.

(2.18) Dire quali delle seguenti equazioni individua un fascio di rette proprio (cioè le rette passano tutte per uno stesso punto) o improprio (cioè le rette sono tra loro parallele):

- (a) $y - 2x = k$ (c) $y = -3x + k + 1$ (e) $y - 2 = k(x + 1)$
 (b) $y = kx + 2$ (d) $2y - k + 3 = 0$ (f) $2ky + 1 = 2(k - x)$

(2.19) Scrivere l'equazione del fascio di rette

- (a) parallele alla retta di equazione $y - 2x + 6 = 0$
 (b) passanti per $P = (-3, -1)$

(2.20) Date due rette di equazioni $ax + by + c = 0$ $a'x + b'y + c' = 0$, il fascio da esse generato ha equazioni $s(ax + by + c) + t(a'x + b'y + c') = 0$, dove s e t sono parametri non contemporaneamente nulli. Posto $k = \frac{t}{s}$, possiamo riscrivere l'equazione nella forma $(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0$, che non è equivalente alla precedente, perché nel passaggio dalla prima alla seconda dobbiamo supporre $s \neq 0$ (in questo modo si perde l'equazione $a'x + b'y + c' = 0$). Il fascio di rette è proprio se le due rette di partenza sono incidenti, improprio altrimenti.

Scrivere l'equazione del fascio generato dalle rette di equazione $x - y - 2 = 0$, $x - 3y - 1 = 0$. Tra le rette di questo fascio trovare quella che passa per $A = (-1, 1)$.

(2.21) Trovare il centro dei fasci propri (cioè il punto per cui passano tutte le rette) e la direzione di quelli impropri.

- (a) $2x - 3y + 5k - 1 = 0$ (c) $3x - 2y + k(6x - 4y - 1) = 0$
 (b) $2kx - y + 3 + 2k = 0$ (d) $(2 + 3k)x + (1 - 2k)y + 4 + 6k = 0$

(2.22) Dato il fascio di equazione $(2 + k)x + (3k - 1)y + 7 = 0$, determinare:

- (a) le caratteristiche del fascio e le sue generatrici
 (b) la retta passante per $P = (1, 4)$ e quella passante per l'origine
 (c) la retta che dista 1 dall'origine.

(2.23) Scrivere l'equazione del fascio generato dalle rette di equazione $3x - y = 0$ e $5x + 9y = 0$; successivamente determinare:

- (a) la retta del fascio per $P = (7, -2)$

- (b) la retta perpendicolare a quella passante per i punti $A = (0, 3)$ e $B = (4, 4)$
 (c) l'area del triangolo ABC , essendo C il centro del fascio.

(2.24) Dati due punti distinti A e B , l'asse del segmento AB può essere caratterizzato in due modi equivalenti

- come la retta perpendicolare ad AB passante per il punto medio del segmento
- come l'insieme dei punti equidistanti da A e B .

Usando prima l'una e poi l'altra caratterizzazione, trovare l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A = (1, 0)$, $B = (2, 2)$. Ripetere i calcoli per il caso generale $A = (a, b)$, $B = (a', b')$.

(2.25) Due rette r , s incidenti in un punto P individuano quattro angoli a due a due uguali e opposti al vertice. Le bisettrici sono due rette passanti per P , caratterizzate dall'essere l'insieme dei punti equidistanti dalle due rette date. Trovare le bisettrici nel caso

(a) $r: 3x - 4y + 1 = 0$ $s: 12x + 5y - 1 = 0$ (b) $r: y = x + 4$ $s: y = -\frac{1}{7}x + \frac{3}{7}$

(2.26) Dato il triangolo di vertici $O = (0, 0)$, $A = (4, 0)$, $B = (1, 2)$, trovare il punto di incontro dalle bisettrici, quello delle altezze, quello degli assi, quello delle mediane.

(2.27) Trovare al variare del parametro k la posizione reciproca delle rette di equazione

$$x + ky + 2 - k = 0 \quad 2x + (k - 2)y + 5 = 0$$

(2.28) Un triangolo isoscele ABC ha la base AB i cui estremi sono $A = (1, 1)$ e $B = (7, 5)$. Trovare le coordinate del terzo vertice, in modo che l'area sia 26.

(2.29) Verificare se le seguenti equazioni rappresentano una circonferenza; in caso affermativo, determinare centro e raggio:

(a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (c) $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$
 (d) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$ (e) $3x^2 + 3y^2 + x + y + 3 = 0$

(2.30) Verificare per quali valori del parametro reale k le seguenti equazioni rappresentano una circonferenza; di queste determinare centro e raggio:

(a) $x^2 + y^2 - 2x + 3y + k = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + k = 0$ (c) $x^2 + y^2 + kx + 3ky - 2 = 0$.

(2.31) Stabilire la posizione dei seguenti punti rispetto alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ (si ricordi che un punto è esterno ad una circonferenza se la sua distanza dal centro è maggiore del raggio, interno se è minore, appartenente se è uguale):

(a) $(0, 0)$ (b) $(3, 2)$ (c) $(1, 5)$ (d) $(-3, 0)$ (e) $(1, 1)$ (f) $(\sqrt{5}, 4)$.

(2.32) Stabilire per quali valori di k l'equazione $x^2 + y^2 + 2kx - 3(1 + k)y + 2k - 1 = 0$ rappresenta una circonferenza e in quale caso questa circonferenza:

- (a) passa per il punto $A = (2, -1)$
- (b) ha raggio uguale a 2
- (c) ha centro di ascissa $\frac{1}{2}$
- (d) ha centro sull'asse delle ordinate
- (e) è tangente alla retta $y = x$
- (f) è tangente esternamente alla circonferenza $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$
- (g) è tangente internamente alla circonferenza $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

(2.33) Scrivere l'equazione della circonferenza che soddisfa le seguenti condizioni:

- (a) ha centro in $C = (2, 0)$ e passa per $P = (0, 2)$
- (b) ha per diametro il segmento di estremi $A = (-2, 4)$, $B = (0, 2)$
- (c) passa per i punti $A = (-1, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (-7, 7)$
- (d) ha centro sulla retta $y = x + 1$ e passa per i punti $A = (3, 2)$, $B = (1, 0)$.

(2.34) Stabilire se la retta r è esterna, secante o tangente alla circonferenza γ : nel caso di una retta secante o tangente trovare i punti di intersezione:

- (a) $r : y = x + 3$ $\gamma : x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$
- (b) $r : x + y = 0$ $\gamma : x^2 + y^2 + 6x + 6y = 0$
- (c) $r : x + 3y - 3 = 0$ $\gamma : x^2 + y^2 + 12x + 32 = 0$
- (d) $r : y = x + 3$ $\gamma : x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$

(2.35) Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P e tangente alla circonferenza γ :

- (a) $P = (2, 2)$ $\gamma : x^2 + y^2 + 2x - 2y = 8$
- (b) $P = (1, 0)$ $\gamma : x^2 + y^2 - 8x - 2y = -12$
- (c) $P = (-2, 1)$ $\gamma : x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$

(2.36) Scrivere l'equazione della circonferenza tangente alle rette di equazione:

$$y = 1, \quad 3x - 4y = 0 \quad 3x + 4y + 32 = 0$$

(2.37) Scrivere le equazioni delle circonferenze tangenti alle rette $y = x$, $y = x + 8$ e passanti per $P = (0, 4)$.

(2.38) Calcolare la lunghezza della corda intercettata dalla circonferenza $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$ sulla retta $x - 3y + 2 = 0$.

(2.39) Trovare i vertici e fuochi delle seguenti ellissi:

$$(a) \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (b) 4x^2 + 9y^2 = 36 \quad (c) \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{81} = 1$$

(2.40) Trovare per quali valori di k le seguenti equazioni rappresentano un'ellisse, stabilire la posizione dei fuochi e precisare in quali casi si ottengono delle circonferenze:

$$(a) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{k^2 - 1} = 1 \quad (c) \frac{x^2}{3k + 1} + \frac{y^2}{k^2 + 3} = 1$$

(2.41) Scrivere l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine e tale che:

- (a) ha due vertici in $P = (3, 0)$ e $Q = (0, 1)$
- (b) ha semiassi di lunghezza 5 e 3
- (c) ha un fuoco in $F = (0, 1)$ e un vertice in $V = (0, 2)$
- (d) passa per $A = (4, 1)$ e $B = (2, 2)$
- (e) passa per $A = (1, 2)$ ed ha vertice in $V = (0, 3)$

(2.42) Scrivere le equazioni delle rette tangenti all'ellisse γ uscenti dal punto P :

- (a) $\gamma : \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ $P = (0, 4)$
- (b) $\gamma : 4x^2 + 3y^2 = 12$ $P = (-\frac{3}{2}, 1)$
- (c) $\gamma : \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ $P = (-3, 1)$

(2.43) Scrivere l'equazione dell'ellisse tale che:

- (a) ha centro in $(-4, 6)$, i fuochi su una parallela all'asse x , i semiassi di lunghezza 5 e 3
- (b) ha i fuochi in $(-10, 2)$ e $(-2, 2)$ e il semiasse maggiore uguale a 8.

(2.44) Scrivere i vertici, i fuochi e gli asintoti delle seguenti iperboli

- (a) $4x^2 - y^2 = 1$ (d) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ (g) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 3$
- (b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1$ (e) $y^2 - x^2 = 1$ (h) $4x^2 - 5y^2 = 20$
- (c) $2x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (f) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ (i) $xy = 1$

(2.45) Scrivere l'equazione dell'iperbole che ha un vertice in A e un fuoco in F :

- (a) $A = (2, 0)$ $F = (3, 0)$ (b) $A = (-2, 0)$ $F = (\frac{5}{2}, 0)$ (c) $A = (0, 1)$ $F = (0, 2)$

(2.46) Scrivere l'equazione dell'iperbole con centro in $O = (0, 0)$ tale che:

- (a) ha un vertice in $V = (-2, 0)$ e passa per $P = (-3, 2)$
- (b) ha i fuochi sull'asse y e passa per $P = (3, 3)$ e $Q = (-2, 1)$
- (c) è equilatera ed ha un fuoco in $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
- (d) ha per asintoti le rette $y = \pm 2x$ e passa per $P = (\frac{\sqrt{5}}{2}, 3)$.

(2.47) Scrivere le equazioni delle rette tangenti all'iperbole γ uscenti da P

- (a) $\gamma: 8x^2 - y^2 = 1$ $P = (\frac{1}{2}, -1)$
- (b) $\gamma: y^2 - 8x^2 = 2$ $P = (0, 1)$
- (c) $\gamma: xy = 3$ $P = (-3, -1)$

(2.48) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = -\sqrt{16 + x^2}$ nel punto in cui questa interseca la retta $x - y = 2$.

(2.49) Disegnare le curve individuate dalle seguenti equazioni:

- (a) $y = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}$ (e) $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ (i) $\frac{x|x|}{4} + \frac{y|y|}{16} = 1$
- (b) $y = -\sqrt{1 + 4x^2}$ (f) $y = -2\sqrt{1 - x^2}$ (l) $y^2 = x^2 - 2|x| + 1$
- (c) $x = \sqrt{1 + 9y^2}$ (g) $|x|y = 1$ (m) $x^2 - 2|x| + y^2 - 2y = -1$
- (d) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ (h) $x|x| + y^2 = 1$ (n) $|xy| = 1$

(2.50) Trovare l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti tale che:

- (a) passa per $P = (1, 2)$
- (b) ha vertice in $(2, 2)$
- (c) è tangente alla retta di equazione $x - 2y + 1 = 0$
- (d) stacca sulla retta $2x + y - 8 = 0$ una corda di lunghezza $2\sqrt{10}$.

(2.51) Disegnare l'iperbole equilatera traslata e indicarne vertici, fuochi e asintoti:

$$(a) \quad y = \frac{2x - 1}{1 - x} \qquad (b) \quad y = \frac{1 - x}{1 + 2x}$$

(2.52) Studiare al variare di k le seguenti iperboli equilateri traslate, trovandone centro e asintoti; precisare per quali valori degenerano in una retta:

$$(a) \quad y = \frac{kx + 1}{(k - 6)x + (k - 4)} \qquad (b) \quad y = \frac{kx - 3}{(3 - k)x + 2}$$

(2.53) Trovare l'equazione dell'iperbole equilatera traslata, tale che

- (a) ha centro in $C = (1, -3)$ e passa per $P = (-1, -1)$
- (b) ha come asintoti le rette $x = -8$, $y = -5$ e passa per $P = (4, -\frac{7}{6})$
- (c) ha come asintoto la retta $y = \frac{1}{2}$ e passa per i punti $P = (0, -7)$, $Q = (\frac{1}{2}, 8)$.
- (d) passa per i punti $O = (0, 0)$, $P = (-1, -\frac{1}{2})$, $Q = (4, 12)$
- (e) passa per il punto $P = (-\frac{1}{3}, -4)$ ed è tangente alla retta $y = 4x - 2$ nel punto $P = (0, -2)$.

(2.54) Scrivere l'equazione della parabola avente vertice in $O = (0, 0)$ e fuoco in $F = (0, -\frac{1}{2})$.

(2.55) Data la parabola di equazione $y = \frac{x^2}{4}$, trovare le coordinate del suo fuoco e l'equazione della sua direttrice.

(2.56) Trovare vertice, fuoco e direttrice della parabola di equazione $y = -2x^2 + 4x - 3$ e disegnarla.

(2.57) Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y , che verifica le seguenti condizioni:

- (a) passa per i punti $A = (0, -6)$, $B = (2, -4)$, $C = (1, -6)$
- (b) ha vertice in $V = (0, -1)$ e passa per $P = (1, 2)$
- (c) ha vertice in $V = (1, 3)$ e fuoco in $F = (1, \frac{5}{2})$
- (d) ha vertice in $V = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ e direttrice $y = -\frac{5}{8}$.

(2.58) Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x , che verifica le seguenti condizioni:

- (a) ha vertice in $V = (3, -1)$ e fuoco in $F = (2, 0)$
- (b) ha vertice in $V = (1, -2)$ e fuoco in $F = (\frac{3}{2}, -2)$
- (c) ha vertice in $V = (4, 2)$ e direttrice $x = \frac{17}{4}$.

(2.59) Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y , che verifica le seguenti condizioni:

- (a) passa per $A = (0, 3)$, $B = (3, 0)$ ed ha vertice sulla retta di equazione $y = 5 - x$
- (b) ha come asse la retta $x = -1$ e passa per $A = (0, 2)$ e $B = (-3, 5)$
- (c) ha come fuoco in $F = (2, \frac{3}{4})$ e passa per $A = (3, 0)$
- (d) ha fuoco in $F = (0, \frac{7}{6})$ e vertice di ordinata 1.

(2.60) Determinare la posizione reciproca della parabola γ e della retta r :

- | | | | |
|---|-------------------------------------|---|------------------------|
| (a) $\gamma: y = \frac{x^2}{2} - x - 2$ | $r: y = -\frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ | (c) $\gamma: y = \frac{x^2}{3} - x + 2$ | $r: x - 3y + 2 = 0$ |
| (b) $\gamma: y = -2x^2 + 3x + 1$ | $r: y = 7 - x$ | (d) $\gamma: x = -y^2 - 8y - 11$ | $r: x - 2y - 14 = 0$. |

(2.61) Trovare le rette tangenti alla parabola γ condotte dal punto P e le coordinate dei punti di tangenza:

- (a) $\gamma: y = x^2 + 2x + 2$ $P = (-\frac{3}{2}, -1)$
- (b) $\gamma: y = -x^2 + 2x + 4$ $P = (\frac{1}{2}, 7)$
- (c) $\gamma: y = -x^2 + 5x + 1$ $P = (0, 1)$.

(2.62) Determinare l'equazione di una retta parallela all'asse x , in modo che la corda staccata su di essa dalla parabola di equazione $y = \frac{1}{3}(-x^2 - 2x + 8)$ sia lunga 2.

(2.63) Dopo aver trovato l'equazione della parabola avente fuoco in $F = (3, 4)$ e direttrice $y = 6$, calcolare la lunghezza del lato del quadrato inscritto nel segmento parabolico delimitato dall'asse x , avente un lato su tale asse.

(2.64) Trovare due numeri tali che la somma sia 60 e il loro prodotto sia massimo

(2.65) (a) Nell'equazione $y = kx^2 - 4x + 5$ determinare il valore del parametro k in modo che la funzione corrispondente assuma valore minimo per $x = 4$.

(b) Nell'equazione $y = -2x^2 + 3kx + 1$ determinare il valore del parametro k in modo che la funzione corrispondente assuma valore massimo per $x = 6$.

(2.66) Trovare l'equazione della parabola che ha per asse la retta $x = 2$, passa per l'origine ed ha vertice sulla retta di equazione $x + 2y = 14$. detta A l'ulteriore intersezione della parabola con l'asse delle x , trovare il punto della parabola di ordinata positiva tale che l'area del triangolo OPA sia 9.

(2.67) Trovare la retta parallela all'asse delle y che intercetta corde uguali sulle due parabole

$$x = 2y^2 - 4y - 1 \qquad x = \frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{4}y + \frac{27}{16}.$$

(2.68) Scrivere l'equazione della retta che è tangente contemporaneamente alle parabole di equazione

$$y = \frac{1}{4}x^2 \qquad y = x^2 - 2x - 2.$$

(2.69) Provare che due punti $P = (a, b)$, $P' = (a', b')$ sono simmetrici rispetto alla retta $y = mx$ se

$$a' = \frac{(1 - m^2)a + 2mb}{1 + m^2} \qquad b' = \frac{2ma + (m^2 - 1)b}{1 + m^2}.$$

Più in generale, che i punti sono simmetrici rispetto alla retta $y = mx + p$ se:

$$a' = \frac{(1 - m^2)a + 2mb - 2mp}{1 + m^2} \qquad b' = \frac{2ma + (m^2 - 1)b + 2p}{1 + m^2}.$$

(2.70) Determinare le curve simmetriche rispetto all'asse x delle seguenti curve:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x^3 - 2y^2 = 0 & \text{(c)} \quad y = 3x^2 \qquad \text{(e)} \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \\ \text{(b)} & x + y - 1 = 0 & \text{(d)} \quad 4y^2 - x - 1 = 0 \end{array}$$

(2.71) Lo stesso per le seguenti curve rispetto all'asse y :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & 3x - 2y + 1 = 0 & \text{(c)} \quad x^2 + y^2 - x - y = 0 \qquad \text{(e)} \quad 4x^2 + y^2 = 25 \\ \text{(b)} & x - 5y^2 = 0 & \text{(d)} \quad x^3 - y = 0 \qquad \text{(f)} \quad x^3 - y^2 = 0 \end{array}$$

(2.72) Lo stesso per le seguenti curve per la simmetria rispetto all'origine:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & 3x + 2y + 4 = 0 & \text{(c)} \quad x^2 + y^2 + x + y = 7 \qquad \text{(e)} \quad xy = 1 \\ \text{(b)} & 4x^2 - y^2 + 6 = 0 & \text{(d)} \quad x - 3y^2 = 0 \end{array}$$

(2.73) Lo stesso per le seguenti curve per la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x + y = 0 & \text{(c)} \quad x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{(e)} \quad x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 0 \\ \text{(b)} & 4x^2 - y = 0 & \text{(d)} \quad x - y^3 = 0 \qquad \text{(f)} \quad y^2 = x \end{array}$$

(2.74) Trovare l'eventuale centro di simmetria delle seguenti curve:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & 4x^2 - y^2 = 4 & \text{(c)} \quad x^2 + 9y^2 + 2x + 18y + 9 = 0 \qquad \text{(e)} \quad 3x^2 + y^2 + 2y = 0 \\ \text{(b)} & 4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0 & \text{(d)} \quad xy - 2y - 4 = 0 \end{array}$$

(2.75) Trovare la curva simmetrica di quella data rispetto al punto P_0 :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & 2x + 1 = 0 & P_0 = (3, 1) \qquad \text{(d)} \quad x^2 + y^2 = 1 \quad P_0 = (1, 1) \\ \text{(b)} & x + y = 4 & P_0 = (1, 2) \qquad \text{(e)} \quad 4x^2 - y^2 = 1 \quad P_0 = (0, -3) \\ \text{(c)} & 4x^2 - y = 0 & P_0 = (1, 0) \end{array}$$

FUNZIONI

Per presentare l'argomento sin dall'inizio in una prospettiva più ampia, in alcuni esercizi compaiono funzioni che saranno introdotte in capitoli successivi a quello preso in esame (ad esempio le funzioni radici o quelle logaritmiche); è inoltre richiesta una certa abilità nella risoluzione di equazioni o disequazioni di vario tipo. Il lettore che ha già sufficiente familiarità con questi argomenti può affrontare gli esercizi in questa prima fase (eventualmente verificando le proprie conoscenze con le definizioni e le proprietà esposte nei vari capitoli) oppure riprenderli in un secondo momento. Quest'ultima possibilità è inevitabile per chi sull'argomento non ha ancora una sufficiente preparazione.

(3.1)

- (a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Provare che non esiste alcuna funzione $f(x)$ di cui A è il grafico, ma ne esistono due, l'unione dei cui grafici è A ; di queste funzioni indicare l'espressione, il dominio e l'immagine.
- (b) Lo stesso per gli insiemi $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$ e $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$.
- (c) Provare che C è grafico di una funzione $f(y)$: anche di questa indicare espressione, dominio e immagine.

(3.2) Trovare l'immagine B_k della funzione $f(x)$ definita sull'insieme A_k :

- (a) $f(x) = x^2$
 $A_1 = (0, 2), \quad A_2 = (-2, 0), \quad A_3 = (-2, 0) \cup (0, 2), \quad A_4 = [-2, 2], \quad A_5 = (-1, 2), \quad A_6 = [-2, 1].$
- (b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 4 - 2x & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
 $A_1 = [0, 1), \quad A_2 = [0, 1], \quad A_3 = \{1\}, \quad A_4 = [\frac{1}{2}, 2], \quad A_5 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \quad A_6 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}].$
- (c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
 $A_1 = [-1, 2], \quad A_2 = [-2, 2], \quad A_3 = [-2, 0] \cup (1, 2), \quad A_4 = (-\infty, \sqrt{2}), \quad A_5 = [\sqrt{2}, +\infty),$
 $A_6 = \{x : |x| > 3\}.$
- (d) $f(x) = \frac{x-1}{x}$
 $A_1 = [1, 3], \quad A_2 = (0, 1), \quad A_3 = (-1, 0), \quad A_4 = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad A_5 = (0, +\infty), \quad A_6 = (-1, 0) \cup (0, 1).$

(3.3) Dati la funzione e alcuni sottoinsiemi B_k del suo codominio, trovare le immagini inverse, cioè gli insiemi A_k contenuti nel dominio tali che $f(A_k) = B_k$

- (a) $f(x) = x^2$
 $B_1 = (2, 9), \quad B_2 = [0, 25], \quad B_3 = (-\infty, 1), \quad B_4 = [1, +\infty].$
- (b) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } -3 \leq x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{se } 1 < x \leq 4 \end{cases}$
 $B_1 = [0, 1], \quad B_2 = [-1, 2], \quad B_3 = [0, 17], \quad B_4 = (-4, 3).$
- (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{1 - (x-3)^2} & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$
 $B_1 = [1, +\infty], \quad B_2 = [\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty], \quad B_3 = [-1, 1], \quad B_4 = [0, 2].$

(3.4) Trovare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $\frac{x+1}{x^2-1}$ | (b) $\sqrt{(x-2)(x^2+2x+1)}$ | (c) $\frac{1}{\sqrt{ x^2-1 }}$ |
| (d) $\frac{1}{x^3+2}$ | (e) $\sqrt[3]{x^2-1}$ | (f) $\sqrt{\frac{4 x -x^2}{x^2}}$ |
| (g) $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$ | (h) $\sqrt{\left \frac{x-2}{x+3}\right }$ | (i) $\sqrt[3]{\frac{1}{e^x-1}}$ |
| (l) $\log(x^2-2x+1)$ | (m) $\log x^2-1 $ | (n) $\log(x+\sqrt{x^2-1})$ |
| (o) $\log^2 x$ | (p) $\log \log x$ | (q) $\log \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2$ |
| (r) $2 \log \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)$ | (s) $\log \log (x-\sqrt{x^2-1})$ | (t) $\left(\frac{x-1}{x-3}\right)^{2x+5}$ |
| (u) $\begin{cases} \log x-1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{e^x+2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ | (v) $\begin{cases} \log x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{e^x-2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ | |
| (w) $\log x-\sqrt{x^2-1} $ | (z) $\log x-\sqrt{1-x^2} $ | |

(3.5) Date le funzioni f e g , scrivere le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, precisamente il dominio

- | | | | |
|---|--|--|---------------------|
| (a) $f(x) = e^{3x},$ | $g(x) = x+5$ | (b) $f(x) = 2x-3,$ | $g(x) = \sqrt{x-1}$ |
| (c) $f(x) = x^2,$ | $g(x) = \sqrt{x}$ | (d) $f(x) = e^x,$ | $g(x) = \log x$ |
| (e) $f(x) = \log x,$ | $g(x) = -1$ | (f) $f(x) = x^2+3x-2,$ | $g(x) = \log(x-1)$ |
| (g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$ | $g(x) = \sin x$ | (h) $f(x) = x^3+1,$ | $g(x) = 2-x$ |
| (i) $f(x) = \sqrt[3]{3-x},$ | $g(x) = x+1$ | (l) $f(x) = \frac{1}{x},$ | $g(x) = x^2$ |
| (m) $f(x) = x ,$ | $g(x) = \log x$ | (n) $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = \sqrt{x}$ | |
| (o) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ 1-x & \text{se } x \geq 4 \end{cases},$ | $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases},$ | | |
| (p) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ 1-x & \text{se } x \geq 1 \end{cases},$ | $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ | | |

(3.6) Trovare le funzioni elementari che compongono le funzioni:

- | | | | |
|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------|--|
| (a) $\frac{3}{\log(x^2+x)}$ | (b) $\frac{1}{\sqrt{ x^2-1 }}$ | (c) $e^{\sqrt{ x^2-1 }}$ | (d) $\sin \left(\frac{1}{\log x^2}\right)$ |
|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------|--|

(3.7) Trovare due funzioni f, g tali che la funzione $g \circ f$ sia definita in

- | | | | |
|------------------|--------------------|---------------|--|
| (a) $\mathbb{R}$ | (b) $[0, +\infty)$ | (c) $[-1, 1]$ | (d) $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. |
|------------------|--------------------|---------------|--|

(3.8) Data $f(x) = 1+x$, trovare $g(x)$ tale che la funzione $g \circ f$ sia

- (a) $\cos x^2$ (b) $e^{|x|}$ (c) 2^x (d) $x^2 + 2x + 2$ (e) $1 + x^4$.

(3.9) Date due funzioni f e g definite nello stesso dominio I ed untrambi crescenti (decrecenti).

- (a) provare che la funzione somma $f + g$ è crescente (decrecente) in I .
 (b) provare che se la due funzioni sono anche positive, la funzione prodotto $f g$ è crescente (decrecente).

Stabilire se le proprietà sul prodotto continua a valere se:

- (c) f e g sono negative
 (d) f e g hanno segno opposto.

(3.10) Dare un esempio di funzione non costante a tratti che nel suo dominio non sia né crescente né decrescente.

(3.11) Dare un esempio di funzione che sia crescente in A e in B , ma non in $A \cup B$.

(3.12)

- (a) Provare che se una funzione è crescente (decrecente) in A , allora è anche iniettiva in A .
 (b) Provare che esistono funzioni iniettive in A che in A non sono né crescenti né decrescenti.

(3.13) Studiare crescita o decrescenza delle funzione $f \circ g$ nel caso in cui:

- (a) f e g sono crescenti (b) f e g sono decrescenti
 (c) f è sono crescenti, g decrescente (d) f è decrescente, g crescente.

(3.14) Trovare il campo di esistenza delle seguenti funzioni e stabilire gli intervalli in cui sono crescenti o decrescenti, a partire dai risultati sulle funzioni elementari e sulla composizione di funzioni crescenti o decrescenti:

- (a) $e^{\sqrt{x-1}}$ (b) $\sqrt{x^2 - 2x}$ (c) $\log \frac{1}{1+x^2}$ (d) $\sin \frac{x}{1+x^2}$
 (e) $(\tan x)^2$ (f) $(-x^2 + x + 2)^3$ (g) $\sqrt[3]{x^2 + 2x - 1}$ (h) $\sqrt{1 + \log_{10} |x|}$
 (i) $\cos \frac{1}{(x-1)^2 + \frac{2}{\pi}}$ (l) $\frac{x-1}{x-2}$ (m) $\frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}}$ (n) $\log \left(\frac{3}{2} - \sqrt{1-x^2} \right)$

(3.15) Date due funzioni f e g definite in $\mathbb{R}$, si consideri la funzione composta $g \circ f$. Dimostrare che valgono le seguenti proprietà:

- (a) se f è pari, allora $g \circ f$ è pari
 (b) se f è dispari e g è pari, allora $g \circ f$ è pari
 (c) se f è dispari e g è dispari, allora $g \circ f$ è dispari
 (d) se f è periodica, allora $g \circ f$ è periodica.

(3.16) Date due funzioni f e g definite in $\mathbb{R}$, si consideri la funzione composta $g \circ f$. Dimostrare con un controesempio che le seguenti affermazioni sono **false**:

- (a) se g è pari, allora $g \circ f$ è pari
 (b) se g è periodica, allora $g \circ f$ è periodica
 (c) se f è periodica di periodo T , allora $g \circ f$ è periodica di periodo T .

(3.17) Trovare (se esiste) l'inversa della funzione data:

- (a) $2x + 4$ (b) $x^2 + 3x - 2$ (c) $x^2 + 3x - 2$, con $x \geq -\frac{3}{2}$
 (d) $x^2 + 3x - 2$, con $x \leq -\frac{3}{2}$ (e) $\log(x - 1)$ (f) $\frac{x}{x - 4}$
 (g) $\sqrt{2x - 6}$ (h) $\log \sqrt{x} - \log \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ (i) $10^{\sqrt[3]{x}}$
 (l) $2^{\frac{x-1}{x+1}}$ (m) $\log x^2$, $x > 0$ (n) $\sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 0$.

(3.18) Studiare il segno e gli zeri delle seguenti funzioni nel loro campo di esistenza:

- (a) $\frac{x - 1}{1 - 2x}$ (b) $\frac{2 - |x|}{1 + |x|}$ (c) $x^5 - 1$ (d) $3x^4 - 1$
 (e) $x^3 - 6x^2 - 2x + 7$ (f) $\frac{\sqrt[3]{x^2 - 4}}{x}$ (g) $\sqrt[3]{1 + x^3} - 1 - x$ (h) $\sqrt[3]{1 + 3x} - \sqrt{1 - 3x}$
 (i) $\log \frac{x - 1}{x + 2}$ (l) $\log(x - 1) - \log(x + 2)$ (m) $\log \log |x - 1|$ (n) $4^x - 2^x - 6$
 (o) $\sqrt{2 - \log_2(1 + x)}$ (p) $\log(x - \sqrt{x^2 - 2x})$ (q) $\frac{1}{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 1}}$ (r) $\frac{1 - |x^2 - x|}{1 - x^2}$.

POLINOMI

(4.1) Dati i polinomi $P(x)$, $Q(x)$, trovare la somma $P + Q$, la differenza $P - Q$, il prodotto PQ e la composizione $P \circ Q$:

- (a) $P(x) = x^2 + 4x$, $Q(x) = x^3 + x$ (b) $P(x) = x^4 + 1$, $Q(x) = x - 1$.

(4.2) Trovare due polinomi di grado 3 la cui somma sia un polinomio:

- (a) di grado 3 (b) di grado 2 (c) di grado 1 (d) di grado 0.

(4.3) Dire se nello sviluppo della potenza $(a^2b - 2c^2)^5$ compaiono termini della forma

- (a) $a^4 b^2 c^6$ (b) $a^8 b^4 c^2$ (c) $a^2 b c^4$,
 ed eventualmente con quale coefficiente.

Stesso problema per la potenza $\left(\frac{a}{c} + cb^2\right)^4$ e i termini

- (d) $\frac{a^3 b^2}{c^2}$ (e) $a c^3 b^6$ (f) $a^2 b^4$.

(4.4) Trovare quoziente e resto nella divisione di $P(x)$ per $Q(x)$:

- | | |
|--|--------------------|
| (a) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 12x - 15$ | $Q(x) = x^2 + 1$ |
| (b) $P(x) = x^3 - x^2 - 22x + 20$ | $Q(x) = x^2 - 5x$ |
| (c) $P(x) = x^4 - x$ | $Q(x) = x^2 - 2$ |
| (d) $P(x) = 2x^3 + 1$ | $Q(x) = x^3 + x$ |
| (e) $P(x) = x^3 - ax + a^2$ | $Q(x) = x - a$ |
| (f) $P(x) = x^4 + a^2 x^2 + a^4$ | $Q(x) = x^2 + a^2$ |

(4.5) Trovare per quali valori dei parametri i polinomi $P(x)$, $Q(x)$ coincidono:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P(x) &= (a+c)x^2 - (a-b+2c)x + c \\ Q(x) &= x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad P(x) &= (a+b+c)x^3 + (-a+b+d)x^2 + (a+b-c)x + (-a+b-d) \\ Q(x) &= x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad P(x) &= (a+c+d)x^4 + (-a+b-d+e)x^3 + (a-b+c-e)x^2 + (-a+b)x - b \\ Q(x) &= x+1. \end{aligned}$$

Al lettore è richiesto di saper risolvere semplici sistemi lineari; su questo argomento può fare riferimento ai richiami proposti nel capitolo 5.

(4.6) Date le seguenti funzioni razionali, scomporle nella somma di un polinomio con una funzione razionale in cui il grado del polinomio al numeratore sia minore di quello del polinomio al denominatore:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{x^4+1}{x^4+x} \quad \text{(b)} \quad \frac{x^4+2x^3}{x^4+2x+4} \quad \text{(c)} \quad \frac{x^4+2x^3-14x^2+2x-15}{x^2+1} \quad \text{(d)} \quad \frac{x^3-x^2-5x}{x-5}. \end{aligned}$$

(4.7) Dire se i seguenti polinomi sono divisibili per $x-2$, $x-\frac{1}{2}$, x^2-4 :

$$\text{(a)} \quad 2x^2-5x+2 \quad \text{(b)} \quad x^5-4x^3+2x^2-8 \quad \text{(c)} \quad 2x^3-7x^2+7x-2.$$

(4.8) Applicando il teorema di Ruffini, trovare il quoziente ed il resto della divisione di $P(x)$ per $x-c$:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P(x) &= x^3+3x+1 & c &= 2 \\ \text{(b)} \quad P(x) &= 2x^5-2x^4+x-1 & c &= 1 \\ \text{(c)} \quad P(x) &= x^4-5x^3+9x^2-7x+2 & c &= 1 \\ \text{(d)} \quad P(x) &= x^5+1 & c &= -1 \\ \text{(e)} \quad P(x) &= x^6-1 & c &= 1 \\ \text{(f)} \quad P(x) &= x^4+a^2x^2+a^4 & c &= a \\ \text{(g)} \quad P(x) &= x^3-a(b+1)x^2+a^2bx & c &= ab \\ \text{(h)} \quad P(x) &= ax^3+abx-b^3 & c &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

(4.9) Trovare (se esiste) un polinomio di grado 5 che abbia:

$$\text{(a)} \quad 5 \text{ radici reali} \quad \text{(b)} \quad 4 \text{ radici reali} \quad \text{(c)} \quad 3 \text{ radici reali} \quad \text{(d)} \quad 2 \text{ radici reali} \quad \text{(e)} \quad \text{una radice reale}.$$

In ogni caso si intende che le radici siano distinte (cioè con molteplicità 1) e che il polinomio non abbia altre radici reali oltre quelle indicate.

(4.10) Trovare (se esiste) un polinomio di grado 4 che abbia:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \text{una radice reale doppia e una semplice} \\ \text{(b)} \quad & 2 \text{ radici reali doppie} \\ \text{(c)} \quad & 3 \text{ radici reali distinte} \\ \text{(d)} \quad & \text{nessuna radice reale.} \end{aligned}$$

In ogni caso si intende che il polinomio non abbia altre radici reali oltre a quelle richieste.

(4.11) Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili, precisando le radici reali e le loro molteplicità:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x^4-3x^3+3x^2-3x+2 & \text{(b)} \quad & x^4-6x^3+13x^2-12x+4 \\ \text{(c)} \quad & 6x^4-19x^3+22x^2-11x+2 & \text{(d)} \quad & 3x^2+6x+3 \\ \text{(e)} \quad & x^4-3x^2-4 & \text{(f)} \quad & x^3+3x^2 \\ \text{(g)} \quad & x^8-17x^4+16 & \text{(h)} \quad & 16x^4-81 \\ \text{(i)} \quad & x^6-1 & \text{(l)} \quad & x^4-(a^2-1)x^2-a^2 \\ \text{(m)} \quad & x^4-(a+3)x^3+(3a+1)x^2-(a+3)x+3a & \text{(n)} \quad & x^4-2ax^3+2a^2x^2-2a^3x+a^4. \end{aligned}$$

EQUAZIONI, DISEQUAZIONI, SISTEMI

(5.1) Data l'equazione $\frac{x+1}{x-1} = 2$, stabilire quali delle seguenti equazioni sono ad essa equivalenti:

- (a) $\frac{x+1}{x-1} + x = 2 + x$ (b) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$
(c) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x-3} = 2 + \frac{1}{x-3}$ (d) $\frac{x+1}{x-1}(x-1) = 2(x-1)$
(e) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = 4$ (f) $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x^2+1}$.

(5.2) Data una funzione $f(x)$, con $x \in A \subset \mathbb{R}$, stabilire sotto quali ipotesi le seguenti equazioni sono equivalenti a $f(x) = 0$:

- (a) $f(x) + x = x$ (b) $f(x) + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ (c) $(x-1)f(x) = 0$
(d) $\frac{f(x)}{1-x^2} = 0$ (e) $[f(x)]^2 = 0$ (f) $f(x^2) = 0$

(5.3) Data l'equazione $\frac{x+1}{x-1} < 2$, stabilire quali delle seguenti disequazioni sono ad essa equivalenti:

- (a) $\frac{x+1}{x-2} + 2 < 0$ (b) $\frac{1}{2} \frac{x+1}{x-2} < 0$ (c) $1 - \frac{x+1}{x-2} < -1$
(d) $\left[\frac{x+1}{x-2}\right]^2 < 4$ (e) $(x^2+1)\frac{x+1}{x-2} < 2(x^2+1)$ (f) $(x^2-1)\frac{x+1}{x-2} < 2(x^2-1)$.

(5.4) Date due funzioni $f(x)$, $g(x)$, con $x \in A \subset \mathbb{R}$, stabilire quali delle seguenti disequazioni sono equivalenti a $f(x) < g(x)$:

- (a) $f(x) + g(x) < 0$ (b) $f(x)g(x) < 0$ (c) $1 - f(x) < 1 - g(x)$
(d) $(x-1)f(x) < (x-1)g(x)$ (e) $(x^2+1)f(x) < (x^2+1)g(x)$ (f) $f(x)g(x) < [g(x)]^2$
(g) $[f(x)]^2 < [g(x)]^2$ (h) $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$

(5.5) Risolvere le seguenti equazioni e darne un'interpretazione geometrica:

- (a) $-x+1 = 2x+3$ (b) $\frac{x}{2} - 1 = -x+2$ (c) $2x-1 = 1-x$.

(5.6) Risolvere al variare dei parametri reali k , h :

- (a) $kx+1-h=0$ (b) $(k-1)x+h^2-1=0$ (c) $\frac{k^2-1}{k}x+h=0$.

(5.7) Risolvere le seguenti disequazioni e darne un'interpretazione geometrica:

- (a) $-x+1 \leq 2x+3$ (b) $\frac{x}{2} - 1 > -x+2$ (c) $2x-1 \geq 1-x$.

(5.8) Risolvere al variare dei parametri reali k , h :

(a) $kx \geq 1$ (b) $k(k-1)x < k$ (c) $kx + 1 \leq x + h$ (d) $(h^2 + k^2)x > hk$.

(5.9) Risolvere al variare dei parametri reali a, b, c, d la disequazione $ax + b < cx + d$.

(5.10) Risolvere le seguenti equazioni e darne un'interpretazione geometrica:

(a) $x^2 - 2x + 3 = 2x$ (b) $x^2 + x - 2 = -x^2 - x + 2$
(c) $x^2 + 4x - \frac{2}{3} = x^2 - 3x + 1$ (d) $2x^2 - 4x + 3 = -3x^2 + 12x - 13$.

(5.11) Risolvere al variare del parametro k :

(a) $kx^2 + x + 1 = 0$ (b) $x^2 + kx - k^2 = 0$ (c) $x^2 + kx - k = 0$ (d) $kx^2 + x + k = 0$.

(5.12) Risolvere le seguenti disequazioni:

(a) $x^2 + x + 1 < 0$ (b) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ (c) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$
(d) $4x^2 - 4x + 1 > 0$ (e) $-x^2 - 1 \geq 0$ (f) $-x^2 + x + 2 < 0$.

(5.13) Risolvere al variare del parametro reale k :

(a) $kx^2 + 1 \geq 0$ (b) $x^2 - 2kx + k^2 \leq 0$ (c) $x^2 + (1-k)x - k > 0$ (d) $x^2 - 3kx + 2k^2 < 0$.

(5.14) Risolvere:

(a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$ (b) $4x^4 - 37x^2 + 9 < 0$
(c) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$ (d) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 \geq 0$
(e) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (f) $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$
(g) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$ (h) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \leq 0$
(i) $x^7 - x \geq 0$ (l) $x^8 - 1 \geq 0$.

(5.15) Dopo aver tracciato i grafici delle funzioni

$2x + 1$ $x^2 - 1$ $x^2 - 3x + 2$ $\frac{x+1}{x-1}$

dedurre quello delle funzioni

(a) $|2x + 1|$ (b) $2|x| + 1$ (c) $|x^2 - 1|$
(d) $|x^2 - 3x + 2|$ (e) $x^2 - 3|x| + 2$ (f) $\frac{|x+1|}{x-1}$
(g) $\frac{x+1}{|x-1|}$ (h) $\left| \frac{x+1}{x-1} \right|$

(5.16) Tracciare i grafici delle funzioni

(a) $2|x - 1|$ (b) $|x^2 - x| + 1$ (c) $x^2 + |x - 1|$
(d) $\frac{1}{|x - 1|}$ (e) $\frac{1}{|x| - 1}$ (f) $\frac{1}{|x^2 - 1|}$

(5.17) Risolvere

(a) $|x + 1| = 2$ (b) $|x + 2|^2 = 0$ (c) $|x - 2| = -2$
(d) $|x + 1| - |x - 1| = 1$ (e) $|x^2 - 1| - |x| - |x - 1| = 0$ (f) $x^2 - |x| - 2 = 0$
(g) $|x^2 - 1| - |x^2 - 5| = 3$ (h) $4x^4 - 37x|x| + 9 = 0$ (i) $|x^2 - 1| = |x + 5|$
(l) $|x^2 - 1| = |x| + 2$ (m) $|x^2 - 1| = x + 2$ (n) $|2 - x| = |x - 1|$

(5.18) Risolvere

- (a) $x^2 - |x| - 2 < 0$ (b) $|x^2 - x| - 1 \geq 0$ (c) $x^2 - |x + 1| \leq 0$
(d) $|x - 1| > x^2 - 4$ (e) $|x + 1| \leq x^2 - 4$ (f) $|x - 1| \geq |2x - 1|$
(g) $|x^2 - 1| < |x - 2|$ (h) $|x + 1| > |2 - x|$ (i) $|x| \leq |x - k|$
(l) $x^2 \leq |x^2 - k|$ (m) $\frac{|x - 1|}{x + 4} \geq \frac{|x - 4|}{x - 2}$ (n) $|x^2 - x - 6| \geq |5x + 10|$

(5.19) Risolvere

- (a) $\frac{2x - 5}{6x + 1} \geq 3$ (b) $\frac{x - 4}{x - 1} > 2$ (c) $\frac{4x + 6}{3x + 1} \geq 0$
(d) $\frac{-2x + 3}{|x - 5|} \leq 1$ (e) $\frac{x^2 - 1}{x} < x$ (f) $\frac{3 - 2|x|}{x - 5} > -1$
(g) $\frac{2x + 3}{x^2 + 1} > 1$ (h) $\frac{3x^3 + 2x - 1}{x^2 - 1} \geq 3x$ (i) $\frac{(|x| - x)(x + 1)}{x - 1} \geq x$
(l) $\frac{1}{2x - 1} - 4 < \frac{1}{2x - 2}$ (m) $\frac{x}{x^2 - 16} > \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 24}$ (n) $\frac{x^4 - 5x^2 - 36}{x - 5} > 0$
(o) $1 + \frac{1}{x} > 0$ (p) $\frac{1}{x + 1} > \frac{x}{x^2 - 1}$ (q) $\frac{|x^2 - 4| + 3}{3x + 1} \geq 1$
(r) $x^2 + 1 - \frac{|x|}{|x| + 1} \geq 0$ (s) $\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{3x^2 + 5}{x^2 + x + 1} \geq 0$ (t) $\frac{kx - 1}{x + 1} \geq x - 1$
(u) $\frac{x + |x|}{2x} \leq 1$ (v) $\frac{x^2 - |x|}{2x} \geq x$ (w) $\frac{|x| - 2x}{x + 1} \leq |x|$
(z) $\frac{|x|}{x} + \frac{x}{|x|} \leq k$

(5.20) Provare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}.$$

(5.21) Provare che per ogni $a \geq 1$, per ogni $b \in [0, 1]$

$$(a + b) - ab \geq 1.$$

(5.22) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la disequazione

$$\frac{k|x| + 1}{|x| + 1} \geq \frac{1}{x^4 + 1}$$

è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(5.23) Risolvere i seguenti sistemi:

$$(a) \quad \begin{cases} 6x - 3 < 2x + 1 \\ 4x + 4 \leq x - 6 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} 3x + 1 > 2x - 3 \\ 4x - 6 \leq 3x - 10 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} \frac{x}{x-1} > 2 \\ \frac{x-1}{x-2} \geq 0 \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} 2|x-1| - 2 < 4|x| \\ 3x - 2 > x - 7 \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} -x^2 + 3x + 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$(f) \quad \begin{cases} \frac{x-1}{2x+1} \leq 2 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$(g) \quad \begin{cases} \frac{x(x+16)}{36} + \frac{x+1}{3} < \frac{x}{2} + 1 \\ \frac{x^2}{8} - \frac{4 - \frac{x^2}{4}}{3} + \frac{1}{12} > \frac{1 - \frac{3}{2}x^2}{12} + \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

$$(h) \quad \begin{cases} x^2 - 5x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \\ x + |x^2 - 1| \geq 1 \end{cases}$$

$$(i) \quad \begin{cases} 3x + 1 > x - 2 \\ 1 - x \leq x^2 + 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$(l) \quad \begin{cases} \frac{4x+6}{3x+1} \leq 1 \\ (x+1)(x-k) = 0 \end{cases}$$

$$(m) \quad \begin{cases} kx^2 + x + 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$(n) \quad \begin{cases} x^2 + x + k = 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases}$$

$$(o) \quad \begin{cases} x^2 - x - 1 \geq 0 \\ x \geq k \end{cases}$$

$$(p) \quad \begin{cases} kx \leq \frac{1}{k} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$(q) \quad \begin{cases} \frac{3x-1}{x+2} \leq 4 \\ x^2 + (1-k)x - k = 0 \end{cases}$$

$$(r) \quad \begin{cases} kx \geq 1 \\ x \geq k \end{cases}$$

(5.24) Tracciare il grafico di una funzione $f(x)$ tale che l'equazione $f(x) = k$

- non ha soluzioni qualunque sia il valore di k
- per qualche valore di k non ha soluzioni
- per ogni valore di k ha una e una sola soluzione
- per qualche valore di k ha almeno due soluzioni
- non ha soluzioni per $k = 0$, ma ne ha tre per $k = 3$
- per ogni valore di k ha due soluzioni
- ha almeno una soluzione se e solo se $k \in (0, 1)$
- per qualche valore di k ha infinite soluzioni
- ammette soluzioni solo per $k = 1$ e per $k = 0$.

(5.25) Risolvere i seguenti sistemi, facendo uso di tutti i metodi noti:

$$(a) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

(5.26) Studiare i seguenti sistemi, scegliendo uno dei metodi noti:

$$(a) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - y = 0 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ x - 5y + 5z = 2 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$$

LE FUNZIONI POTENZA

(6.1) Utilizzando la proprietà $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$ (se n è pari, valida per $a \geq 0$), ridurre le radici allo stesso ordine minimo:

$$(a) \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3} \quad (b) \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[10]{3}.$$

(6.2) Indicare sotto quali condizioni le seguenti radici sono definite contemporaneamente e ridurle allo stesso ordine minimo:

$$(a) \sqrt{a}, \sqrt[12]{a^5}, \sqrt[4]{a^3} \quad (b) \sqrt[3]{x-y}, \sqrt[3]{x+y}, \sqrt{x^2-y^2}.$$

(6.3) Utilizzando la proprietà $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ (se n è pari, valida in questa forma per $a, b \geq 0$, con il segno negativo a secondo membro per $a < 0, b \geq 0$), riscrivere le seguenti espressioni, eventualmente precisandone le condizioni di esistenza:

$$(a) \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (b) 2\sqrt[3]{4} \quad (c) \frac{\sqrt[3]{2xy^2}}{x^2y}$$

$$(d) (a^2 - b^2)\sqrt[4]{\frac{a+b}{a-b}} \quad (e) x\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \quad (f) x\sqrt{\frac{y}{x^2}}$$

(6.4) Utilizzando la proprietà $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ (se n è pari, valida in questa forma per $a, b \geq 0$, con il segno negativo al secondo membro per $a < 0, b \geq 0$), riscrivere le seguenti espressioni

$$(a) \sqrt[3]{81a^5b^7} \quad (b) \sqrt{28\pi^3x^5} \quad (c) \sqrt[3]{x^3y} \quad (d) \sqrt{x^3y} \quad (e) \sqrt[5]{729xy^{13} - 243xy^{11}} \quad (f) \sqrt[4]{64(x+y)^5z^8}$$

(6.5) Svolgere i seguenti prodotti, eventualmente dopo aver indicato sotto quali condizioni hanno senso le varie espressioni:

$$(a) (5 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2}) \quad (b) (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4 \quad (c) 2^{-\frac{1}{3}} 4^5 2^{\frac{2}{7}}$$

$$(d) \sqrt{(1+a)\sqrt{a} + 2a(\sqrt{a} - 1)} \quad (e) (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 \quad (f) \sqrt{x^n \sqrt[3]{x^{2n+1}} \sqrt[5]{x^{n-1}}}$$

$$(g) \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \right)^2$$

(6.6) Se nel denominatore di una frazione vi sono delle radici, si parla di *razionalizzazione* quando questi radicali sono eliminati moltiplicando e dividendo la frazione per un'opportuna espressione.

Ad esempio, l'espressione $\frac{3}{\sqrt{5}}$ può essere razionalizzata moltiplicando e dividendo per $\sqrt{5}$, in modo da ottenere $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, mentre l'espressione $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ si razionalizza moltiplicando e dividendo per $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$.

Razionalizzare le seguenti frazioni:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \frac{5}{\sqrt[3]{54}} & \text{(b)} & \frac{1}{3-\sqrt{2}} \\ \text{(c)} & \frac{1-\sqrt{\pi+1}}{1+\sqrt{\pi+1}} & \text{(d)} & \frac{a+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\ \text{(e)} & \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} & \text{(f)} & \frac{2}{\sqrt[2]{5}-\sqrt[3]{3}} \\ \text{(g)} & \frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} & \text{(h)} & \frac{1}{\sqrt[4]{3}-1}. \end{array}$$

(6.7) Considerare il seguente ragionamento:

$$\sqrt{x^2-1} > x \implies x^2-1 > x^2 \implies -1 > 0$$

che è ovviamente **falsa**; dunque l'equazione data non ammette soluzioni.

Questo risultato è **sbagliato**: ad esempio, $x = -1$ è una soluzione. Trovare l'errore e risolvere la disequazione in modo corretto.

(6.8) Considerare il seguente ragionamento:

$$\sqrt{(x^2-1)^2} = 1 \implies x-1 = 1 \implies x = 2;$$

dunque $x = 2$ è l'unica soluzione dell'equazione data.

Questo risultato è **sbagliato**: ad esempio, $x = 0$ è una soluzione. Trovare l'errore e risolvere l'equazione in modo corretto.

(6.9) Dire per quali valori di x le seguenti uguaglianze sono corrette:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \sqrt[4]{(x^2-7x+10)^4} = (x-2)(x-5) \\ \text{(b)} & \sqrt{(x^2-x)^2} = -x(x-1) \\ \text{(c)} & \sqrt[3]{(x^2+4x+3)^3} = (x+3)(x+1) \\ \text{(d)} & \sqrt[5]{(x^2+x)^5} = |x(x+1)|. \end{array}$$

(6.10) Trovare il campo di esistenza delle funzioni al primo membro e stabilire in quale sottoinsieme vale l'uguaglianza scritta:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x} \\ \text{(b)} & \sqrt[4]{x(x-5)} = \sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x-5} \\ \text{(c)} & \sqrt[4]{x(x-5)} = \sqrt[4]{|x|}\sqrt[4]{|x-5|} \\ \text{(d)} & \sqrt{x^2(x+1)} = x\sqrt{1+x} \\ \text{(e)} & \sqrt{x^2(x+1)} = |x|\sqrt{1+x} \\ \text{(f)} & \sqrt[3]{(1+x)^3} = |x+1| \\ \text{(g)} & \sqrt[3]{x^2-4} = \sqrt[3]{|x+2|}\sqrt[3]{|x-2|} \\ \text{(h)} & \sqrt{x^2-x^4} = -x\sqrt{1-x^2} \\ \text{(i)} & \sqrt{x^2-x^4} = |x|\sqrt{1-x^2} \\ \text{(l)} & \sqrt{(x-1)^2(x+1)^2} = (x-1)(x+1) \end{array}$$

(6.11) Risolvere le seguenti equazioni:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & 3x = 2\sqrt{3x-1} & \text{(b)} \quad 5x-1 = \sqrt{10x+6} & \text{(c)} \quad \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 5 \\
\text{(d)} & \sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5} & \text{(e)} \quad 5x-1 = \sqrt{|10x+6|} & \text{(f)} \quad 3x = 2\sqrt{|3x-1|} \\
\text{(g)} & \sqrt{4-3x} = -x-7 & \text{(h)} \quad \sqrt{x+2} = x+3 & \text{(i)} \quad \sqrt{2x^4+1} = x^2-1 \\
\text{(l)} & \sqrt[3]{x^3-4x} = x-1 & \text{(m)} \quad \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 3 & \text{(n)} \quad \sqrt{x-x^2} = \sqrt{7-2x} \\
\text{(o)} & 4\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+2x+1}} = \frac{3x}{x+1} & \text{(p)} \quad \frac{2-x}{\sqrt{x-3}} = -2 & \text{(q)} \quad \sqrt{x+\sqrt{x-1}} = \sqrt{3}
\end{array}$$

(6.12) Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \sqrt{x^2-2x+1} < 4 & \text{(b)} \quad x+1 < \sqrt{2x-5} & \text{(c)} \quad \sqrt{3-2x} \leq x+2 \\
\text{(d)} & \sqrt{6x-x^2} < 3-2x & \text{(e)} \quad \sqrt{x^2-9} - \sqrt{2x+1} \leq 0 & \text{(f)} \quad \sqrt[3]{x^3-1} < x+3 \\
\text{(g)} & \sqrt[3]{x^3-2x} \geq 1 & \text{(h)} \quad \sqrt{|x^2-1|} \geq x & \text{(i)} \quad \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} > 3 \\
\text{(l)} & \frac{\sqrt{2x-x^2}}{1-x} \geq 1 & \text{(m)} \quad \frac{3x-1-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+2}} \leq 0 & \text{(n)} \quad \frac{x-\sqrt[3]{x^3-x+1}}{\sqrt{x(x-2)}-x+3} \leq 0 \\
\text{(o)} & \frac{3x+5}{\sqrt{4x-1}-3} > 2 & \text{(p)} \quad \frac{3-4x-\sqrt{1-x}}{4-2x-\sqrt{x+3}} \leq 0 & \text{(q)} \quad \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} > \sqrt{x+5} \\
\text{(r)} & \sqrt{\left|\frac{x+2}{x-1}\right|} > 1 & \text{(s)} \quad \sqrt{x+3} > |x| & \text{(t)} \quad \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}} < -1 \\
\text{(u)} & -3\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x+4} & \text{(v)} \quad \sqrt[3]{x-2} \leq \sqrt{x}
\end{array}$$

(6.13) Disegnare il grafico delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} & \sqrt{x-1} & \text{(b)} & \sqrt{1-x} \\
\text{(c)} & \sqrt{|x|} & \text{(d)} & \sqrt{x^2-1} \\
\text{(e)} & \sqrt{|x^2-1|} & \text{(f)} & \sqrt{x^2-2x+1} \\
\text{(g)} & \sqrt{(x-3)(x-2)} & \text{(h)} & \sqrt[3]{|x|}
\end{array}$$

(6.14) Risolvere le seguenti equazioni o disequazioni e darne un'interpretazione geometrica, riconducendole alla forma $f(x) = g(x)$ oppure $f(x) < g(x)$ (o analoghe), dove $f(x)$, $g(x)$ sono funzioni di cui si è in grado di tracciare il grafico con considerazioni elementari:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & 3x = 2\sqrt{3x-1} & \text{(b)} \quad |x| - 5 < \sqrt{x^2-5} & \text{(c)} \quad \frac{1}{x+2} > -\sqrt{4-x^2} \\
\text{(d)} & 5x-1 = \sqrt{10x+6} & \text{(e)} \quad x^2 \geq 4\sqrt{x^2-1} & \text{(f)} \quad \sqrt{|x^2-1|} > x \\
\text{(g)} & x^2 = \sqrt{1-x^2} & \text{(h)} \quad |x-5| < \sqrt{x^2-5}
\end{array}$$

(6.15) Provare che per ogni $a, b > 0$ valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\text{(a)} \quad |\sqrt{a} - \sqrt{b}| < \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{(b)} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}.$$

ESPONENZIALI E LOGARITMI

(7.1) Trasformare le forme esponenziali in forme logaritmiche e viceversa (ad esempio, l'uguaglianza $2^3 = 8$ può essere scritta nella forma $\log_2 8 = 3$ e viceversa):

- (a) $3^4 = 81$ (b) $5^0 = 1$ (c) $16^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{64}$ (d) $4^{-2} = \frac{1}{16}$
(e) $25^{\frac{3}{2}} = 125$ (f) $\sqrt[3]{27} = 3$ (g) $\log_{10} 1000 = 3$ (h) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$
(i) $\log_5 125 = 3$ (l) $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ (m) $\log_{16} 64 = \frac{3}{2}$ (n) $\log_7 7 = 1$.

(7.2) Calcolare il valore dei seguenti logaritmi (occorre riscrivere l'argomento come potenza della base, in modo che il logaritmo assuma la forma $\log_a a^b$; il valore trovato per b è quello richiesto dal problema. Ad esempio $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$).

- (a) $\log_3 \frac{1}{27}$ (b) $\log_3 \sqrt[3]{3}$ (c) $\log_{\frac{1}{7}} 49$ (d) $\log_8 2$
(e) $\log_{0,5} 32$ (f) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[5]{16}$ (g) $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[3]{7}$ (h) $\log_2 \sqrt[5]{8}$
(i) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} \frac{1}{3}$ (l) $\log \sqrt{e^3}$ (m) $\log_{\sqrt{e}} e$ (n) $\log_{\frac{1}{e}} e$

(7.3) Determinare l'argomento o la base dei seguenti logaritmi:

- (a) $\log x = 4$ (b) $\log_{\frac{2}{5}} x = 2$ (c) $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{1}{2}$ (d) $\log_{\frac{7}{2}} x = -3$
(e) $\log_{\frac{1}{8}} x = 1$ (f) $\log_{\frac{27}{8}} x = -\frac{1}{3}$ (g) $\log_{\sqrt{3}} x = 3$ (h) $\log_{\frac{1}{e}} x = 0$
(i) $\log_{\frac{1}{25}} x = -\frac{1}{2}$ (l) $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{3}{2}$ (m) $\log_{\sqrt[4]{3}} x = 4$ (n) $\log_{0,8} x = -1$
(o) $\log_x 9 = -2$ (p) $\log_x \frac{1}{100} = 2$ (q) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ (r) $\log_x \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = -3$
(s) $\log_x \sqrt[4]{3} = \frac{1}{2}$ (t) $\log_x \frac{1}{25} = \frac{2}{3}$ (u) $\log_x e = -1$ (v) $\log_x \sqrt[3]{5} = \frac{4}{3}$
(z) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{4}$

(7.4) Applicare le proprietà dei logaritmi, per trasformare le seguenti espressioni in somme o differenze di logaritmi in ciascuno dei quali compaia una sola variabile, elevata alla potenza 1; le quantità x , y , z e t si suppongono positive. (Poiché il procedimento non dipende dalla particolare base, anche in questo caso abbiamo scelto i logaritmi naturali.)

- (a) $\log x^2 y^3$ (b) $\log \sqrt{\frac{xy}{z}}$ (c) $\log x^2 \sqrt[3]{y}$
(d) $\log \sqrt[3]{\frac{x^2 \sqrt{yz^3}}{t^4}}$ (e) $\log \frac{\sqrt[4]{xyz} \sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[3]{x^3 y^3 z^4} \sqrt[4]{xy}}$ (f) $\log \frac{x^3 y^2}{\sqrt{t} \sqrt{z}}$

(7.5) Applicare le proprietà dei logaritmi, per trasformare le seguenti espressioni in un unico logaritmo.
(Poiché il procedimento non dipende dalla particolare base, anche in questo caso abbiamo scelto i logaritmi naturali:)

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \log x - \log y + 2 \log z \\ \text{(b)} & 3 \log x + \frac{1}{2} \log y - \frac{1}{4} \log z \\ \text{(c)} & 2 + \log x - \frac{1}{2} \log y - \frac{1}{2} \log z \\ \text{(d)} & \frac{1}{4} \log x - 3 \log 5 + 7 \log y - 2 \log z. \end{array}$$

(7.6) Trasformare in logaritmi naturali:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \log_2 x & \text{(b)} & \log_{\frac{1}{2}} x \\ \text{(c)} & \log_{e^2} x & \text{(d)} & \log_{\sqrt{e}} x \\ \text{(e)} & \log_{\frac{2}{e}} x & \text{(f)} & \log_x 2 \\ \text{(g)} & \log_{x^2} x & \text{(h)} & \log_x x \end{array}$$

(7.7) Dopo aver stabilito il campo di esistenza delle seguenti funzioni, utilizzare le proprietà dei logaritmi per semplificare l'espressione:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \log x^2 & \text{(b)} & \log x^3 \\ \text{(c)} & \log e^x & \text{(d)} & \log_x x \\ \text{(d)} & \log [x(x-1)^2] & \text{(e)} & \log \sqrt{x+1} \\ \text{(f)} & x^{\log_x 3} & \text{(g)} & x^{\frac{1}{\log x}} \end{array}$$

(7.8) Semplificare le seguenti espressioni:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x \right]^2 & \text{(b)} \quad \frac{3^{2x+1} + 3^{2x} - 1}{2(3^x) + 1} \\ \text{(c)} & \frac{9^{x^2} - 9^x}{3^{x^2-1} + 3^{x-1}} \end{array}$$

(7.9) Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & (\sqrt{7})^x = 49 & \text{(b)} \quad \left(\frac{1}{2} \right)^x = 2 \\ \text{(c)} & 7^x = 9 & \\ \text{(d)} & 3^{2x+1} = 1 & \text{(e)} \quad \left(\frac{1}{2} \right)^{x-2} = 4 \\ \text{(f)} & 7^{2x+5} = 7^{\frac{x-1}{2}} & \\ \text{(g)} & 4^{\frac{3+x}{x-1}} = 2^{5x} & \text{(h)} \quad (2^{x+3})^{x-4} = 1 \\ \text{(i)} & \left(\frac{1}{5} \right)^{|x+4|} = 5^{2x} & \\ \text{(l)} & 3^{1-x} - 3^{2+x} = 1 & \text{(m)} \quad 2^{2-x} - 2^{3-x} + 2^x = 0 \\ \text{(n)} & |3^{2x} - 2| = 3^x & \\ \text{(o)} & 3^{3x} - 3^{2x+1} + 2 = 0 & \text{(p)} \quad e^{2x} + e^x - 2 = 0 \\ \text{(q)} & 5^{x+1} + 5^{x-1} = 2^x & \\ \text{(r)} & 3 \cdot 3^{2x} + 7^{2x+1} = 3^{2x+2} + 7^{2x} & \text{(s)} \quad e^{2x} + e^{\frac{7}{3}} = e^{2+x} + e^{\frac{3x+1}{3}} \\ \text{(t)} & e^{\frac{3x+8}{2}} - e^{\frac{x+2}{2}} + e^{x+3} = 1 & \\ \text{(u)} & 3^{x+1} = 5^{1-x} & \text{(v)} \quad 2^{2(2^x+1)} = (2^x+1)^{2^{2x}} \\ \text{(w)} & \begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 2^x 3^y = 18 \end{cases} & \\ \text{(z)} & \begin{cases} x^y = 81 \\ x^{3-y} = \frac{1}{3} \end{cases} & \end{array}$$

(7.10) Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x < \frac{1}{9} & \text{(b)} \quad 16^x \leq 64 & \text{(c)} \quad 3^x \geq 7 \\
\text{(d)} & 3^{x^2-3x} \geq 9^{x-2} & \text{(e)} \quad 5^{x^2-6x+5} \geq 7^{x^2-6x+5} & \text{(f)} \quad 3^{9x^2-1} \geq 2^{9x^2-1} \\
\text{(g)} & \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 9 & \text{(h)} \quad 2^{\frac{x^2-x}{x+1}} \leq 1 & \text{(i)} \quad \left|\frac{5^{2x}-1}{5^{2x}+1}\right| < 1 \\
\text{(l)} & \frac{5^{|x+2|}-5}{e^x-\sqrt{e}} \leq 0 & \text{(m)} \quad 2^{3x-1} + (2^{x-1})^3 \geq 5 \cdot 2^x & \text{(n)} \quad \sqrt{5-e^x} \leq e^x - 3 \\
\text{(o)} & \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} & \text{(p)} \quad |2^x - 1| < 2 & \text{(q)} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{1-5x} \geq 2 \\
\text{(r)} & 4^{2x+1} - \frac{7}{3} 9^x > 7 \cdot 3^{2x} + 16^{x-1} & \text{(s)} \quad e^{x+1} > x^{x+1} & \text{(t)} \quad \begin{cases} 3^{1-x} + 3^{1+x} > 6 \\ \left(\frac{1}{9}\right)^x - 8\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9 \end{cases} \\
\text{(u)} & 4^{\sqrt{x-1}} 2^x > 8 & &
\end{array}$$

(7.11) Verificare per quali valori della variabile sono valide le seguenti uguaglianze:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \log(x^2 - 9) = \log(x - 3) + \log(x + 3) \\
\text{(b)} & \log(9 + 6x + x^2) = 2 \log(x + 3) \\
\text{(c)} & \log x^2 = 2 \log |x| \\
\text{(d)} & \log x^2 = 2 \log x \\
\text{(e)} & \log x^2 = 2 \log(-x) \\
\text{(f)} & \log x^3 = 3 \log x \\
\text{(g)} & \log(3x - 1)^4 = 4 \log |3x - 1| \\
\text{(h)} & \log(3x - 1)^4 = 4 \log(3x - 1) \\
\text{(i)} & \log(x^3 + x^2 - 2x) = \log x + \log(x + 2) + \log(x - 1) \\
\text{(l)} & \log \sqrt{\frac{2x-1}{4x+1}} = \frac{1}{2} [\log(2x-1) - \log(4x+1)] \\
\text{(m)} & \log \sqrt[3]{\frac{5+x}{4+x}} = \frac{1}{3} [\log(5+x) - \log(4+x)]
\end{array}$$

(7.12) Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & 2 \log(x + 4) = \log(2 - x) \\
\text{(b)} & \log \sqrt{x-3} = \frac{1}{2} \log(3x - 4) \\
\text{(c)} & \log(x - 5) + \log(x - 7) + \log 3 = 0 \\
\text{(d)} & \log(3x - 5) + \log(x - 2) = \log 2 \\
\text{(e)} & \frac{\log_{10} x + 1}{\log_{10} x - 1} - \frac{\log_{10} x + 3}{2 - 2 \log_{10} x} = \frac{11}{2} \\
\text{(f)} & \frac{\log x + 3}{\log x - 3} - \frac{\log x - 3}{\log x + 3} = \frac{5 \log x}{\log^2 x - 9} \\
\text{(g)} & |\log_2 x + 3| = 5 \\
\text{(h)} & \sqrt{1 + \log_{\sqrt{2}} x} = 3 \\
\text{(i)} & \log x = \log_{10} x \\
\text{(l)} & \log(e^x + e) = 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(m)} & \log^2 x + 2 \log |x| - 15 = 0 \\
\text{(n)} & \sqrt{\log x} = 1 - \log x \\
\text{(o)} & \log_{\frac{2}{5}} x = \log_x \frac{2}{5} \\
\text{(p)} & \log |\log |\log x|| = 0 \\
\text{(q)} & \log_2 \sqrt{1-x^2} = \log_4 |x| \\
\text{(r)} & \log_2 \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{2x} = \log_{\frac{1}{2}} x \\
\text{(s)} & \log_2 (4 - \log_{\frac{1}{2}}) = \log_{\frac{1}{4}} 16 \\
\text{(t)} & \log_2 |\log_{\frac{1}{2}} x| = 1 \\
\text{(u)} & \begin{cases} x + y = 3 \\ \log_4 x + \log_4 y = \frac{1}{2} \end{cases} \\
\text{(v)} & \begin{cases} \log_{10} y = 2 \log_{10} x \\ \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + y^2) = -1 \end{cases}
\end{array}$$

(7.13) Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \log_4 x < \frac{1}{2} & \text{(b)} \quad \log_{\frac{1}{2}} x < 4 \\
\text{(c)} & \log_{\frac{1}{10}} x > \frac{1}{2} & \\
\text{(d)} & \frac{1}{2} < \log_3 x < 2 & \text{(e)} \quad -\frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{49}} x < \frac{1}{2} \\
\text{(f)} & \log_3 |x+2| > -3 & \\
\text{(g)} & \log_{\frac{1}{2}} (3x-5) > 2 & \text{(h)} \quad \log_{\frac{1}{2}} (3x-5) < \log_{\frac{1}{4}} (2x-1) \\
\text{(i)} & \log_2 \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{2x} > 1 & \\
\text{(l)} & 3 \log_2 x - \frac{12}{\log_2 x} < 5 & \text{(m)} \quad \log_2 (4 - \log_{\frac{1}{2}} x) \leq \log_{\frac{1}{4}} 16 \\
\text{(n)} & \log_2 \frac{|x|-1}{2-|x+3|} \leq 2 & \\
\text{(o)} & \log_x (9-8x-x^2) > 0 & \text{(p)} \quad \log_x 2 < 3 \\
\text{(q)} & \log_4 x^2 - \log_8 \sqrt{x} < \frac{5}{3} & \\
\text{(r)} & \log \frac{x+3}{x-3} \leq 1 & \text{(s)} \quad \frac{\log(x+3)}{\log(x-3)} \leq 1 \\
\text{(t)} & \log(x - \sqrt{x^2 - 1}) > 0 & \\
\text{(u)} & x^{\frac{1}{x}} > 1 & \text{(v)} \quad x^{4x-6} \geq x^{x^2-x} \\
\text{(w)} & \log_2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+4} \geq \log_4 \frac{(x+4)^2}{x^2-1} & \text{(z)} \quad \log_2 \frac{x+1}{x-1} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-3x+2}{x^2+1}
\end{array}$$

(7.14) Provare che per ogni $a, b > 0$ si ha $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log \left(\frac{a+b}{2} \right)$

(7.15) Provare che per ogni a, b si ha $\frac{e^a + e^b}{2} \geq e^{\frac{a+b}{2}}$

(7.16) Trovare il campo di esistenza e il segno delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \log(x^2 - 2x + 1) & \text{(b)} \quad \log |x^2 - 1| \\
\text{(c)} & \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) & \\
\text{(d)} & \log |\log x| & \text{(e)} \quad \left(\frac{x-1}{x-3} \right)^{2x+5} \\
\text{(f)} & \log |x - \sqrt{1-x^2}| & \\
\text{(g)} & \begin{cases} \log |x-1| & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{e^x + 2} & \text{se } x > 0 \end{cases} & \text{(h)} \quad \begin{cases} \log |x+1| & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{e^x - 2} & \text{se } x > 0 \end{cases}
\end{array}$$

(7.17) Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, deducendolo da quello di opportune funzioni elementari:

- (a) $\log(x+2)$ (b) $\log_{\frac{1}{2}}|x-1|$ (c) $|\log x|$ (d) $\log|x|$ (e) $\log_{\frac{1}{2}}|x^2-1|$
 (f) $\frac{1}{\log|x|}$ (g) $\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ (h) $e^{-|x|}$ (i) $e^{\frac{1}{\log|x|}}$ (l) $e^{\left|\frac{x}{x-1}\right|}$

TRIGONOMETRIA

(8.1) Trasformare da gradi sessagesimali a radianti o viceversa.

- (a) 30^0 ; (b) 270^0 ; (c) 360^0 ; (d) 1^0 ; (e) 45^0 ; (f) 135^0 ; (g) 245^0 ; (h) 15^0 ; (i) $10^030'$;
 (j) $13^09''$; (k) $14^030'9''$;
 (l) $\frac{\pi}{8}$; (m) 2π ; (n) $\frac{3}{2}\pi$; (o) $\frac{2}{3}\pi$; (p) 1; (q) $\frac{\pi}{12}$; (r) $\frac{3}{8}\pi$; (s) $\frac{11}{6}\pi$; (t) $\frac{7}{5}\pi$; (u) $\frac{11}{24}\pi$;
 (v) $\frac{13}{45}\pi$.

(8.2) Stabilire in quale quadrante cade il secondo estremo dei seguenti archi di cui si conosce l'ampiezza (il primo estremo è sempre fissato nel punto $(1, 0)$):

- (a) -110^0 ; (b) -330^0 ; (c) 225^0 ; (d) 175^0 ; (e) -220^0 ; (f) 375^0 ;
 (g) $\frac{5}{6}\pi$; (h) $-\frac{\pi}{6}$; (i) $-\frac{13}{6}\pi$; (j) $\frac{5}{4}\pi$; (k) $-\frac{4}{3}\pi$; (l) $-\frac{8}{3}\pi$; (m) $\frac{7}{3}\pi$; (n) 1.

(8.3) Studiare la periodicità delle seguenti funzioni.

- (a) $\cos(x-2)$ (b) $\sin(3x+\frac{\pi}{8})$ (c) $\cos(\frac{\pi}{4}x-2)$
 (d) $2\tan 3x$ (e) $\sin x + \cos \frac{x}{3}$ (f) $\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}$
 (g) $\cos 3x \cos 5x$ (h) $\tan x \tan 2x$ (i) $\sin x + \sin \pi x$

(8.4) Tracciare il grafico delle seguenti funzioni.

- (a) $\sin 2x$ (b) $\sin(x-1)$ (c) $\sin \frac{x}{2}$ (d) $\sin|x|$
 (e) $\cos|x|$ (f) $|\tan x|$ (g) $\sin x + \cos x$ (h) $\cos x - \sqrt{3}\sin x$
 (i) $2 + \sin x + 3\cos x$ (j) $\sin 2x + \cos 2x$ (k) $|\sin x + \cos x|$ (l) $|1 - \sin x - \cos x|$
 (m) $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ (n) $|\sin|x||$ (o) $3 + \cos x$ (p) $\tan(x - \frac{\pi}{3})$
 (q) $|\cos(x + \frac{\pi}{4})|$ (r) $\cos 4x$ (s) $\tan \frac{x}{3}$ (t) $\sin \frac{3}{2}x$

(8.5) Risolvere i seguenti triangoli rettangoli (con le notazioni standard, in particolare, c indica l'ipotenusa).

- (a) $\begin{cases} c = 10 \\ \beta = 30^0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} c &= 16 \\ \sin \beta &= \frac{1}{4} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} c &= 0,6 \\ \tan \beta &= 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} c = 5 \\ a = 4 \end{cases}$
 (e) $\begin{cases} a = 18 \\ \alpha = 75^0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} b &= 8 \\ \sin \beta &= \frac{1}{3} \end{cases}$ (g) $\begin{cases} a = 3 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$ (h) $\begin{cases} b = 72,5 \\ \beta = 36^020' \end{cases}$

(8.6) Risolvere i seguenti triangoli.

$$(a) \begin{cases} c = 10 \\ \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \cos \beta = \frac{3}{5} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} c = 39 \\ \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \beta = 2\alpha \end{cases} \quad (c) \begin{cases} c = 20\sqrt{2} \\ \beta = \frac{\pi}{4} \\ b = 20\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} c = 20\sqrt{2} \\ \beta = \frac{\pi}{4} \\ b = 40 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} c = 12 \\ \tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ b = 4 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} c = 14 \\ \cos \beta = \frac{3}{7}\sqrt{5} \\ b = 3 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} c = 1 \\ \beta = 2\alpha \\ \cos 2\alpha = -\frac{1}{9} \end{cases} \quad (h) \begin{cases} c = 3 \\ b = 2 \\ \tan \alpha = 2\sqrt{2} \end{cases} \quad (i) \begin{cases} c = 4 \\ b = 6 \\ \cos \alpha = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

(8.7) Calcolare gli angoli formati dalle coppie di rette di equazione:

$$(a) \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x - 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

(8.8) Determinare il valore delle funzioni trigonometriche *seno*, *coseno* e *tangente* a partire dai seguenti dati:

$$(a) \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{3} \\ \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases} \quad (c) \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{4}{5} \\ \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{24}{25} \\ \alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi) \end{cases} \quad (e) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{7}{8} \\ \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases} \quad (f) \begin{cases} \tan \alpha = 2 \\ \alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

(8.9) Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P e formante con la direzione positiva dell'asse x l'angolo α indicato:

$$(a) \begin{cases} P = (1, 0) \\ \alpha = \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} P = (\frac{4}{3}, 2) \\ \alpha = \frac{3}{4}\pi \end{cases} \quad (c) \begin{cases} P = (0, -4) \\ \sin \alpha = \frac{3}{5}, \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases} \quad (d) \begin{cases} P = (\frac{1}{4}, -3) \\ \cos \alpha = \frac{24}{25}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

(8.10) Verificare le seguenti identità.

$$(a) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (b) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$(c) \sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (d) \cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$$

(8.11) Sviluppare e semplificare le seguenti espressioni.

$$(a) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \quad (b) \sin\left(\frac{5}{3}\pi - \alpha\right) + \cos\left(\frac{5}{6}\pi + \alpha\right)$$

$$(c) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) \quad (d) 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - 2 \sin\left(\alpha - \frac{3}{4}\pi\right) \cos\left(\frac{5}{4}\pi - \alpha\right)$$

$$(e) \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(f) \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} - 1$$

$$(g) \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{5}{3}\pi - \alpha\right)}{\tan\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right) \tan\left(\frac{3}{4}\pi + \alpha\right)}$$

$$(h) \frac{\cos 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha}$$

$$(i) \frac{(1 + \cos 2\alpha) \tan \alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$(l) (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$$

$$(m) \tan 2\alpha + \sin 2\alpha$$

$$(n) \cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha - 1$$

$$(o) \tan 2\alpha \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(p) \frac{2(\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha)}{2 + \sin 2\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha(1 + \tan \alpha)}$$

$$(q) \tan 2\alpha(1 - \tan^2 \alpha) + \sin 2\alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)$$

$$(r) \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha$$

$$(s) \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$(t) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha - \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(u) \sin \alpha \tan \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(v) \tan \frac{\alpha}{2} \tan \alpha + 1$$

$$(z) 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \cos 2\alpha - \sin^2 \alpha + 1$$

(8.12) Trasformare le seguenti espressioni utilizzando le formule parametriche.

$$(a) \cos \alpha - \sin \alpha - 1$$

$$(b) \sin 2\alpha - \cos \alpha + 1$$

$$(c) \tan 2\alpha$$

$$(d) \cos \alpha - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(e) \frac{2(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos \alpha + \sin \alpha + 1} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$(f) \left(\tan \alpha - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \right) \cos \alpha$$

(8.13) Trasformare le somme in prodotti (utilizzando le formule di prostaferesi) o viceversa (utilizzando le formule di Werner).

$$(a) \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$$

$$(b) \sin 5\alpha - \sin 3\alpha$$

$$(c) \sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin \alpha$$

$$(d) \cos(\alpha - 2\beta) + \cos(\alpha + 2\beta)$$

$$(e) \sin \alpha - \cos \beta$$

$$(f) \sin 3\alpha \cos 2\alpha$$

$$(g) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$(h) \sin(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \cos \beta$$

(8.14) Provare che l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il *seno* dell'angolo compreso:

$$S = \frac{1}{2} a b \sin \gamma.$$

(Sugg.: se γ è retto il risultato è immediato. Distinguere due casi a seconda che γ sia acuto oppure ottuso, e tracciare l'altezza dal vertice A al lato BC.)

(8.15) Risolvere le seguenti equazioni.

(a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$

(b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$

(c) $\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 1$

(d) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

(e) $\cos 2x = \cos x$

(f) $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{4}{3}\pi - x\right)$

(g) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$

(h) $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

(i) $\sqrt{\tan^2 x + 1} = -1 + \sqrt{2} + \tan x$

(j) $|\sin^2 x - \sin x| = 2$

(k) $\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1 = 0$

(l) $\sqrt{4 + \cos^2 x} = \sin x - 1$

(m) $\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \tan x} = \sqrt{2}$

(n) $|\sin x| = |\cos x - 1|$

(o) $\sin x + \cos x = 0$

(p) $\sin x - \cos x + 1 = 0$

(q) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \sqrt{3}\sin x + \frac{1}{2} = 0$

(r) $\sin x \cos x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$

(s) $2\sin x \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \sqrt{3}\sin x \cos x - 1 = 0$

(t) $(3 + \sqrt{3})\sin^2 x + 2\cos^2 x + (\sqrt{3} - 1)\sin x \cos x = 3$

(u) $\begin{cases} \sin(x - y) = 0 \\ \tan(x + y) = \sqrt{3} \end{cases}$

(v) $\begin{cases} 3\sin x = \sqrt{3}\sin y \\ \tan x \tan y = 1 \end{cases}$

(w) $\sin^4 x - 4\sin^2 x \cos^2 x + 3\cos^4 x = 0$

(x) $\sin 2x - \frac{3}{2} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x + \sin^2 x}}$

(y) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} + \frac{1}{1 + x^2}$

(z) $\sin^2 x + 4\cos 2x = \alpha$

(8.16) Dimostrare che:

(a) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} \leq \sin \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \forall \alpha, \beta \in [0, \pi];$

(b) $\frac{\cos \alpha + \sin \beta}{2} \leq \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \forall \alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$

(c) $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{2} \geq \tan \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \forall \alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$

(8.17) Risolvere le seguenti disequazioni.

(a) $2\sin x - 1 < 0;$

(b) $\cos x < -\frac{1}{2};$

(c) $\sqrt{2}\sin^2 x - \sin x > 0;$

(d) $2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0;$

(e) $2\sin^2 x + 4\cos^2 x > 5\cos x;$

(f) $\sqrt{\tan^2 x - 1} \geq \sqrt{2};$

- (g) $\sin x + \cos x > 0$; (h) $\sin x + \cos x - 1 < 0$;
- (i) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 0$; (j) $\sin^2 - \cos^2 > 0$;
- (k) $\sin^3 x + \cos^3 x > 0$; (l) $2\cos^3 + 2\cos^2 x \sin x - \sin x - \cos x < 0$;
- (m) $\tan \frac{x}{2} - \tan x > 0$; (n) $\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x - \frac{1}{2}\right) \cot x \geq 0$;
- (o) $1 - \frac{1}{\tan x} > 0$; (p) $\tan^2 \frac{x}{2} + \cos x > 1$;
- (q) $\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} > \cot^2 x$; (r) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} < \frac{2}{\sin 2x}$;
- (s) $\frac{\tan 2x (1 - \cos 2x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} \geq 0$; (t) $\frac{\sin x + \tan x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} < 0$;
- (u) $\frac{(\sin x - \cos 2x) \tan x}{\sin x - \sqrt{3} \cos x + 1} \geq 0$; (v) $\frac{\tan^2 2x - 1}{\sin 2x + \cos^2 x} \leq 0$;
- (w) $\begin{cases} \tan x > \sqrt{3} \\ \sin x > \frac{1}{2} \end{cases}$ (x) $\sin x + (\sqrt{2} - 1) \cos x > \sqrt{2} - 1$.

(8.18) Con le notazioni standard, dimostrare che un triangolo è isoscele nei lati a, b se e solo se

$$a + b = \tan \frac{\gamma}{2} (a \tan \alpha + b \tan \beta).$$

(8.19) Nel triangolo ABC si ha $c = 3$, $b = 1$, $\alpha = 120^\circ$. Prolungare il lato AC dalla parte di A e considerare su tale prolungamento il punto C' tale che $AC' = 1$. Calcolare il perimetro del triangolo BCC' .

(8.20) Sia $CD = \sqrt{2}$ una corda di una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2$ (con C più vicino a B). Dette H e K le proiezioni ortogonali di C e D sul diametro, e posto $\widehat{BOC} = x$, si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{V_1 + V_2}{V_3},$$

essendo V_1 il volume del cilindro avente raggio di base 1 e altezza HK , V_2 il volume della sfera di raggio 1 e V_3 il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del triangolo COD attorno ad AB . Determinare per quali valori di x risulta $f(x)$ minimo.

(8.21) Detto P un punto della semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$, condurre la bisettrice t dell'angolo $\widehat{PAB}$ e indicare con C e D rispettivamente i punti di incontro di t con la semicirconferenza e con la semiretta di origine B parallela ad AP . Posto $\widehat{PAB} = 2x$, scrivere la funzione

$$f(x) = \text{area } \triangle PAD$$

e tracciarne il grafico. Trovare per quali valori di x l'area è massima e per quali valori il triangolo $\triangle PAD$ è equivalente al triangolo $\triangle ACB$.

(8.22) Dato il settore circolare $\widehat{AOB}$ di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ e raggio r , considerare i rettangoli in esso inscritti, aventi un lato su OA . Indicato con P il vertice appartenente all'arco $\widehat{AOB}$ ed assumendo come variabile x l'angolo $\widehat{AOP}$, trovare l'area del rettangolo al variare di P . Dire per quali valori di x quest'area è massima.

Sugg.: provare che l'area vale

$$\frac{r^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \sin^2 x \right) = \frac{r^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \right) = \frac{r^2}{\sqrt{3}} \left[\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} \right].$$

(8.23) Dimostrare l'identità

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \alpha \neq k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(se $\alpha = k2\pi$, la somma al primo membro è banalmente nulla).

(8.24) Data la funzione

$$f(x) = \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

trovarne *campo di esistenza*, immagine, segno e zeri. Provare che non è invertibile, ma lo diventa se ristretta all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Scrivere l'inversa di questa restrizione precisandone il dominio.

(8.25) Data la funzione

$$f(x) = \arccos \frac{1}{2x},$$

trovarne *campo di esistenza*, immagine, segno e zeri. Provare che è invertibile e trovare la funzione inversa.

(8.26) Dati i vettori A e B , di lunghezza rispettivamente $A = \|9\|$, $B = \|7\|$ e l'angolo tra essi compreso $\beta = 135^\circ$, determinare il vettore somma $C = A + B$ nonché l'angolo α che questo forma con B .

(8.27) Dato il vettore C di lunghezza $\|C\| = 9$ determinare i vettori A , B tali che $C = A + B$, sapendo che l'angolo compreso tra C e B misura 40° mentre l'angolo compreso tra C e A misura 95° .

(8.28) Dati i vettori A , B , C di lunghezza rispettivamente 10, 12, 15, Si determini il vettore somma $D = A + B + C$ sapendo che l'angolo compreso tra A e B misura 30° mentre l'angolo compreso tra B e C misura 75° .

(8.29) Dati i vettori A , B , C di lunghezza rispettivamente 6, 8, 10, Si determini il vettore somma $D = A + B + C$ sapendo che l'angolo compreso tra A e B misura 120° mentre l'angolo compreso tra A e C misura 130° , in verso opposto al precedente.

Parte III

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

CENNI DI LOGICA E TEORIA ELEMENTARE DEGLI INSIEMI

(1.1) Si ricordi che a destra e a sinistra del simbolo $\subset$ devono comparire sempre degli insiemi, a destra del simbolo $\in$ un insieme, a sinistra un elemento dell'insieme. Si presti però attenzione al fatto che un insieme può avere come elementi altri insiemi. Si ricordi infine che la notazione $\mathbf{a}$ indica un elemento, $\{\mathbf{a}\}$ un insieme, precisamente quello che ha come unico elemento $\mathbf{a}$.

Sono vere: (a), (d), (f), (g), (h), (i), (n), (o), (p), (q), (s).

Sono false: (b), (c), (e), (l), (m), (r), (t).

(1.2)

(a) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$.

(b) Sono vere: (b₂), (b₄), (b₆); sono false: (b₁), (b₃), (b₅).

(c) Per $n = 1$ l'affermazione è vera: $\mathcal{P}(A)$ contiene due oggetti, cioè $\emptyset$ ed A .

Supponiamo l'affermazione vera per n e proviamola per $n+1$. L'insieme di $n+1$ elementi si può scrivere nella forma $A_{n+1} = A_n \cup \{x_{n+1}\}$, dove A_n ha n elementi. Ogni sottoinsieme di A_n si fa diventare sottoinsieme di A_{n+1} in due modi: lasciandolo invariato oppure unendogli l'elemento x_{n+1} . In definitiva ogni elemento di $\mathcal{P}(A_n)$ genera due elementi di $\mathcal{P}(A_{n+1})$ e quindi i 2^n elementi di $\mathcal{P}(A_n)$ diventano $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ elementi di $\mathcal{P}(A_{n+1})$.

Si osservi che il risultato vale anche per $n = 0$: l'unico insieme che non ha elementi è l'insieme vuoto $\emptyset$ e $\mathcal{P}(\emptyset)$ ha come unico elemento proprio $\emptyset$.

(1.3)

(a) $A \cup B = A \cup \{3, 4\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \setminus B = \{1, 2\}$.

(b) $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} : -5 \leq x \leq 7\}$, $A \cap B = \{2, 3, 4, 5\}$, $A \setminus B = \{x \in \mathbb{Z} : -5 \leq x \leq 1\}$.

(c) $A \cup B = \{1, -1\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = \emptyset$.

(d) $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = (-2, -1) \cup (1, 2)$, $A \setminus B = [-1, 1]$.

(1.4)

(a) x multiplo di 20 $\implies x$ multiplo di 4.

(b) $\sqrt{x-1} = 1 \iff x = 2$.

(c) $x > 1 \implies x^2 > 1$.

(d) $x > 1 \iff x^3 > 1$

(e) f derivabile $\implies f$ continua.

(f) Condizione sufficiente perché una funzione sia integrabile in $[a, b]$ è che sia continua.

(g) Condizione sufficiente perché lo studente passi l'esame è che studi.

(h) Condizione sufficiente perché x appartenga ad A è che appartenga ad $A \cap B$;
condizione necessaria (ma non sufficiente) perché appartenga ad $A \cap B$ è che appartenga a B .

(1.5)

(a) $B \implies A$ (f) $A \iff B$ (m) $A \iff B$ (r) $A \iff B$

(b) $A \iff B$ (g) $A \iff B$ (n) $B \implies A$ (s) $A \implies B$

(c) $A \implies B$ (h) $B \implies A$ (o) $A \iff B$ (t) $A \implies B$

(d) $B \implies A$ (i) $B \implies A$ (p) $A \iff B$ (u) $A \iff B$

(e) $A \iff B$ (l) $A \iff B$ (q) $B \implies A$

(1.6) L'affermazione corretta è la (c), che fornisce una dimostrazione dell'enunciato. Le altre affermazioni sono sbagliate, perché interpretano l'enunciato come una condizione necessaria e sufficiente a che una terna sia pitagorica, mentre la condizione è solo sufficiente.

(1.7) (a) Almeno uno studente del corso non abita a Pisa.

(b) Tutti gli studenti del corso prenderanno all'esame non meno di 30. (Auguri!!).

- (c) Almeno una studentessa del corso ha occhi che non sono celesti oppure capelli che non sono biondi.
- (d) Almeno un docente non svolge alcun corso e non è all'estero per motivi di studio.
- (e) La frase afferma che l'insieme A è costituita da numeri minori di un dato M . Ad esempio, $A = [0, 1]$, ovvero l'insieme di tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1: tutti i numeri di questo insieme sono minori di 2 (ovviamente 2 non è l'unica scelta: possiamo prendere al suo posto un qualunque numero maggiore di 1). Un insieme così fatto si dice limitato superiormente: nella rappresentazione sulla retta cartesiana M è un limite che i numeri dell'insieme non possono scavalcare a destra. La negazione della proposizione si scrive: $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A: x \geq M$. Un insieme con queste proprietà si dice non limitato superiormente: qualunque sia il numero M che scegliamo, c'è almeno un numero di A che lo scavalca sulla destra, cioè è più grande di M . Come ad esempio, possiamo considerare $A = [1, +\infty)$, ovviamente l'insieme di tutti i numeri reali che sono maggiori o uguali di 1.
- (f) Anche se apparentemente analoga alla proposizione in (e), questa non caratterizza alcuna particolare proprietà di A (se non quella di non essere l'insieme vuoto): qualunque sia il numero $x \in A$ evidentemente si può trovare un altro numero (non necessariamente appartenente ad A) che sia più grande di questo (ad esempio: $x + 1$).
- La negazione è: $\exists x \in A: \forall M \in \mathbb{R}, x \geq M$.
- Questa è una proprietà che non può essere verificata da nessun insieme (non vuoto): infatti afferma l'esistenza di un numero maggiore o uguale di tutti i numeri reali. Questo non è possibile, perché l'insieme dei reali non è limitato superiormente: per ogni reale fissato ne esistono infiniti più grandi di questo.
- (g) In corrispondenza a valori diversi della variabile x la funzione assume valori diversi (una funzione con questa proprietà si dice *iniettiva*). Un esempio ovvio è dato dalla funzione $f(x) = x$. Più in generale possiamo considerare $f(x) = x^p$, con p intero dispari.
- La negazione è: $\exists x', x'' \in A, x' \neq x'': f(x') = f(x'')$, cioè esistono due valori diversi di x per i quali la funzione assume lo stesso valore. Un esempio è dato dalla funzione $f(x) = x^p$, con p pari, che assume lo stesso valore per $x' = k$ e per $x'' = -k$.
- (h) La funzione assume almeno una volta tutti i valori reali (funzione surgettiva); ad esempio, la funzione $f(x) = x^p$, con p dispari.
- La negazione è: $\exists y \in \mathbb{R}: \forall x \in A, f(x) \neq y$, cioè esiste almeno un valore reale che non è mai assunto dalla funzione; ad esempio la funzione $f(x) = x^p$, con p intero pari, assume solo valori maggiori o uguali a 0.

(1.8) Le espressioni (a), (b), (d) sono false; l'espressione (c) è vera.

(1.9) In ognuna delle seguenti tabelle la P che compare nell'ultima colonna si riferisce alla proposizione che stiamo esaminando.

(a)	p	q	r	$p \vee \neg q$	$r \wedge q$	P	(d)	p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\neg p \iff r$	P	
	v	v	v	v	v	v		v	v	v	v	v	f	f
	v	v	f	v	f	f		v	v	v	f	v	v	v
	v	f	v	v	f	f		v	f	v	v	f	f	v
	v	f	f	v	f	f		v	f	f	f	f	v	f
	f	v	v	f	v	v		f	f	v	v	v	v	v
	f	v	f	f	f	v		f	v	f	v	f	f	f
	f	f	v	v	f	f		f	f	v	v	v	v	v
	f	f	f	v	f	f		f	f	f	f	v	f	f

(b)	p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	P	(c)	p	q	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg p \Rightarrow q$	P
	v	v	f	f	f		v	v	f	v	v
	v	f	f	f	f		v	f	v	v	v
	f	v	f	f	f		f	v	v	v	v
	f	f	v	v	v		f	f	v	f	v

p	q	$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	P
v	v	v	f	f
v	f	f	v	f
f	v	f	v	f
f	f	f	v	f

(e)

Potevamo attenderci questo risultato perché:

$$\neg p \vee \neg q \iff \neg(p \wedge q)$$

(formula di De Morgan)

p	q	$p \iff \neg q$	$q \Rightarrow \neg p$	P
v	v	f	f	v
v	f	v	v	v
f	v	v	v	v
f	f	f	v	f

(f)

(g)

p	q	$p \implies q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$	P
v	v	v	f	v
v	f	f	f	v
f	v	v	f	v
f	f	v	v	v

(1.10) Poiché i ragionamenti non coincidono né con lo schema della dimostrazione diretta (modus ponens) né con lo schema della dimostrazione per assurdo (modus tollens), non è possibile controllare la loro correttezza con queste regole. Possiamo costruire le tavole di verità delle varie proposizioni equivalenti ai ragionamenti e controllare se il risultato è sempre vero, qualunque siano i dati.

Come esempio di procedimento consideriamo il ragionamento (a); la relativa tabella è la seguente (la P che compare nell'ultima colonna indica la proposizione presa in esame):

p	q	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$(\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge p$	P
v	v	v	v	v
v	f	v	v	f
f	v	f	f	v
f	f	v	f	v

Dunque il ragionamento non è corretto.

Procedendo come sopra si trova che sono corretti i ragionamenti in (b), (e), (f), (g), (h), non corretti quelli in (a), (c), (d).

(1.11)

(a) $D = \{2, 3, 5, 7\}$

(b) $D = \{12, 15, 18\}$

(c) $D = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

(d) $D = \{(8, 10), (7, 9), (6, 8), (5, 7), (4, 6), (3, 5), (2, 4), (1, 3), (0, 2), (-1, 1), (-2, 0)\}$.

(1.12)

(a) x è multiplo di 15; $D = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$. (b) x è multiplo di 5 ma non di 3;
 $D = \{10, 20, 25, 35, 40, 50, 55, 65, 70, 80, 85, 95, 100\}$.

(1.13)

(a) Per $n = 1$ è banalmente vera. Proviamo l'induttività della proposizione, ossia $\forall n > 1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + k) = n^2(n-1) \implies \sum_{k=1}^n (3k^2 + k) = (n+1)^2 n.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3k^2 + k) &= \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + k) + 3n^2 + n = \\ & \text{(per l'ipotesi induttiva)} \\ &= n^2(n-1) + 3n^2 + n = n^3 - n^2 + 3n^2 + n = \\ &= n^3 + 2n^2 + n = (n^2 + 2n + 1)n = (n+1)^2 n. \end{aligned}$$

Che è quanto si doveva dimostrare.

(b) Per $n = 1$ é banalmente verificata perché $2 \cdot 3^0 + 3^1 = (3^1 - 1)(1 + 1) + 1$.

Verifichiamo l'induttività della proposizione, ovvero deduciamo dall'identità (ipotesi induttiva)

$$\sum_{k=1}^n (2k \cdot 3^{k-1} + 3^k) = (3^n - 1)(n + 1) + n.$$

la seguente identità

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k \cdot 3^{k-1} + 3^k) = (3^{n+1} - 1)(n + 2) + n + 1.$$

Per questo, nel primo membro della sommatoria precedente esplicitiamo il termine $(n + 1)$ -esimo e utilizziamo l'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k \cdot 3^{k-1} + 3^k) + 2(n + 1)3^n + 3^{n+1} &= (3^n - 1)(n + 1) + n + 2(n + 1)3^n + 3^{n+1} = \\ &= 3^n(n + 1) - n - 1 + n + 2(n + 1)3^n + 3^{n+1} = 3 \cdot 3^n(n + 1) + 3^{n+1} - 1 = 3^{n+1}(n + 2) - 1. \end{aligned}$$

Il secondo membro dell'identità diventa invece

$$(3^{n+1} - 1)(n + 2) + n + 1 = 3^{n+1}(n + 2) - n - 2 + n + 1 = 3^{n+1}(n + 2) - 1.$$

L'identità é quindi verificata.

(c) Per $k = 1$ risulta

$$\frac{9}{2} \cdot 10 - 4 \cdot 5 = (2 - 1)25$$

che é banalmente vera.

Verifichiamo l'induttività della proposizione.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{9}{2} 10^k - 4 \cdot 5^k \right) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{9}{2} 10^k - 4 \cdot 5^k \right) + \frac{9}{2} 10^{n+1} - 4 \cdot 5^{n+1} = \\ &\quad \text{(per l'ipotesi induttiva)} \\ &= (2^n - 1)5^{n+1} + \frac{9}{2} 2^{n+1} \cdot 5^{n+1} - 4 \cdot 5^{n+1} = 5^{n+1} (2^n - 1 + 9 \cdot 2^n - 4) = \\ &= 5^{n+1} (10 \cdot 2^n - 5) = 5^{n+1} 5 (2 \cdot 2^n - 1) = 5^{n+2} (2^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

(1.14)

(a) Per $n = 3$ é vera: $14 \leq 27$.

Supponiamola vera per n e verifichiamola per $n + 1$:

$$(n + 1)! + 2^{n+1} = n!(n + 1) + 2 \cdot 2^n \leq (n + 1)(n! + 2^n) \leq (n + 1)n^n \leq (n + 1)(n + 1)^n = (n + 1)^{n+1}.$$

(b) Per $n = 2$ é vera: $13 \leq 16$.

Supponiamola vera per n e verifichiamola per $n + 1$:

$$2^{n+1} + 3^{n+1} = 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n \leq 4(2^n + 3^n) \leq 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}$$

(c) Per $n = 10$ é vera, perché $(1 - x^5)^{10} > (1 - x^4)^{10} \iff 1 - x^5 > 1 - x^4 \iff x^4 > x^5 \iff x \in (0, 1)$.

Supponiamola vera per n e verifichiamola per $n + 1$:

$$(1 - x^4)^{n+1} = (1 - x^4)(1 - x^4)^n < (1 - x^5)^{10}, \text{ perché } 1 - x^4 < 1.$$

(d) Per $n = 1$ è vera: $1 \leq 1$.

Supponiamola vera per n e verifichiamola per $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \stackrel{?}{\leq} 2 - \frac{1}{n+1}.$$

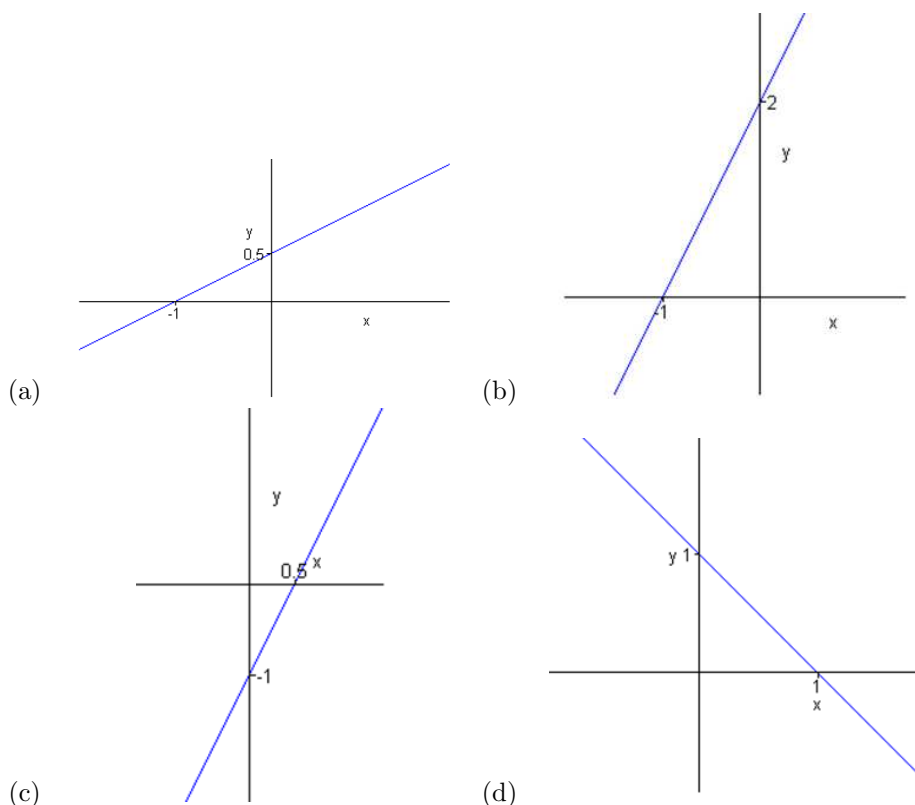
La diseuguaglianza che rimane da verificare equivale a:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{(n+1)^2} \iff \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2} \iff n+1 \geq n.$$

Nell'ultima forma in cui l'abbiamo scritta, la diseuguaglianza è immediata.

RICHIAMI DI GEOMETRIA ANALITICA

(2.1)



(2.2) Basta applicare l'equazione della retta nella forma $y - y_0 = m(x - x_0)$.

(a) $y = 4 - x$ (b) $y = -\frac{5}{2}x$ (c) $y = \frac{2}{3}(2x - 5)$

(d) $y = \frac{x}{2} + \frac{7}{6}$ (e) $y = -\frac{5}{4}$ (f) $y = -\frac{3}{4}x - 3$

(2.3) Si può scrivere l'equazione della retta passante per due punti e controllare se le coordinate del terzo punto la verificano. Un altro metodo di risoluzione consiste nello scrivere il coefficiente angolare della retta passante per A e B e quello della retta passante per B e C : i tre punti sono allineati se questi coefficienti sono uguali; se ciò accade, l'equazione della retta è quella passante per uno qualunque dei punti e avente per coefficiente angolare quello trovato. Come terzo metodo si può imporre il passaggio della retta $ax + by + c = 0$ per i tre punti e risolvere il sistema di tre equazioni nelle tre incognite a , b e c ; nel caso in cui il sistema ammetta

una soluzione con a , b e c non contemporaneamente nulli, i tre punti sono allineati e l'equazione della retta cercata è quella ottenuta sostituendo ad a , b e c i valori trovati.

- (a) Allineati sulla retta di equazione $x - 2y = 0$ (b) Non allineati
 (c) Allineati sulla retta di equazione $x - y = 2$ (d) Allineati sulla retta di equazione $x = 1$
 (e) Non allineati

(2.4) Occorre controllare se ci sono rette con lo stesso coefficiente angolare.

Le rette $x - 5y + 1 = 0$ e $\frac{x}{5} - y + 2 = 0$ sono parallele, avendo lo stesso coefficiente angolare $\frac{1}{5}$; lo stesso accade per le rette $2x - 4y + 3 = 0$ e $x - 2y = 0$, che hanno coefficiente angolare $\frac{1}{2}$. Le altre due rette non sono parallele, perché hanno coefficiente $\frac{3}{8}$ una e $\frac{8}{3}$ l'altra.

(2.5) Occorre controllare se ci sono rette il prodotto dei cui coefficienti angolari vale -1 .

Le rette $x - y + 1 = 0$ e $x + y - 3 = 0$ sono perpendicolari, perché i loro coefficienti angolari sono rispettivamente 1 e -1 .

Le rette $6x - 2y - 7 = 0$ e $3x - y + 5 = 0$ sono tra loro parallele, perché hanno coefficiente 3 , e sono perpendicolari alla retta $x + 3y - 1 = 0$, che ha coefficiente $-\frac{1}{3}$.

(2.6)

- (a) $y = \frac{x-1}{2}$ (b) $y = -2x + \frac{3}{4}$ (c) $y = \frac{5-x}{3}$
 (d) $y = 2 - \frac{4}{3}x$ (e) $y = -x - 2$ (f) $y = \frac{3}{5} - x$

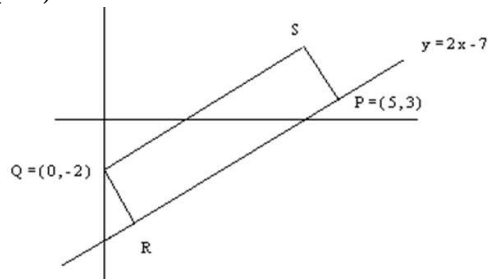
(2.7) (a) $k = -6$ (b) $k = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

(2.8)

- (a) Una volta scritta l'equazione della retta che passa per una coppia di punti, occorre considerare il semipiano che contiene il rimanente punto; si ricordi che il passaggio da una retta ad uno dei due semipiani da essa generati consiste nel sostituire l'equazione $ax + by + c = 0$ con la disequazione $ax + by + c \geq 0$ in un caso oppure la disequazione $ax + by + c \leq 0$ nell'altro. Il triangolo dato è individuato dalle disequazioni $y \geq -2$, $y \leq \frac{3x-7}{5}$, $y \leq 13 - 3x$.
 (b) L'altezza è individuata dalla retta di equazione $x = 4$; se vogliamo limitarci al solo segmento, dobbiamo aggiungere la condizione che risulti $-1 \leq y \leq 1$. La lunghezza vale 3 .
 (c) Per ciascun vertice occorre scrivere l'equazione della retta uscente da esso e perpendicolare alla retta passante per gli altri due vertici: $y = \frac{19}{3} - \frac{5}{3}x$ è l'equazione della retta per A , $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ quella per B , $x = 4$ quella per C . Risolvendo il sistema formato da queste equazioni, si trova la soluzione $x = 4$, $y = -\frac{1}{3}$, che fornisce le coordinate del punto di intersezione.
 (d) Occorre calcolare la distanza tra le coppie di vertici e sommare i valori ottenuti; il risultato che si trova è $6 + \sqrt{10} + \sqrt{34}$.
 (e) La base AB misura 6 , l'altezza ad essa relativa 3 ; l'area vale 9 .

- (f) Il punto medio del lato AB è $(2, -2)$, quello di AC è $(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$, la retta che unisce questi punti ha coefficiente angolare $\frac{3}{5}$ uguale a quella della retta per BC . La lunghezza del segmento dei punti medi è $\frac{\sqrt{34}}{2}$, che è appunto metà di quella del segmento BC .

(2.9)



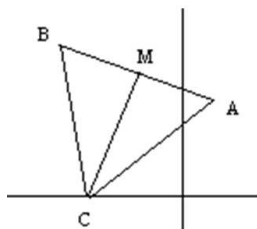
Retta per Q perpendicolare alla retta PR : $y = -2 - \frac{1}{2}x$
 Coordinate del punto R : $R = (2, -3)$
 Retta per Q parallela alla retta PR : $y = 2x - 2$
 Retta per P perpendicolare alla retta PR : $y = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}x$
 Coordinate del punto S : $S = (3, 4)$

(2.10)

- (a) parallele (b) incidenti in $(\frac{7}{2}, -3)$ (perpendicolari)
 (c) incidenti in $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ (d) parallele
 (e) incidenti in $(\frac{1}{5}, -1)$ (f) incidenti in $(\frac{11}{25}, -\frac{2}{25})$ (perpendicolari)
 (g) incidenti in $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ (h) parallele

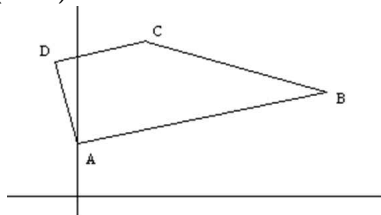
(2.11) (a) $2x - 5y + 3 = 0$ (b) $x - y - 1 = 0$ (c) $5x + 2y - 12 = 0$.

(2.12)



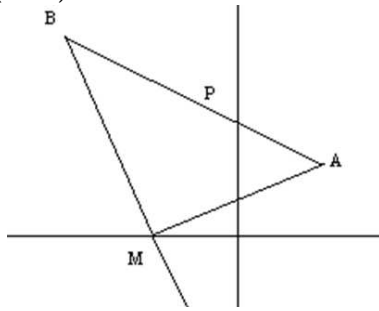
retta per AB : $x + 2y - 7 = 0$ punto di mezzo AB : $M = (-1, 4)$
 asse AB : $2x - y + 6 = 0$ intersezione asse x : $C = (-3, 0)$
 altezza $CM = 2\sqrt{5}$ base $AB = 2\sqrt{5}$
 area 10

(2.13)



retta per AB : $y = \frac{1}{4}x + 2$
 retta per A perpendicolare ad AB : $y = 2 - 4x$
 retta per C parallela ad AB : $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{2}$
 $D = (-\frac{18}{17}, \frac{106}{17})$.

(2.14)



retta per AM : $y = \frac{1}{3}x + 1$
 retta per BM : $y = -3x - 9$
 retta per AB : $y = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x$
 $B = (-5, 6)$
 $C = (-1, -6)$
 $AM = BM = 2\sqrt{10}$
 area = 40
 perimetro = $4\sqrt{10} + 8\sqrt{5}$

(2.15)

Il generico punto P sulla retta data ha coordinate $(a, 2 - \frac{a}{3})$.

La retta per P di coefficiente 2 ha equazione $y = 2x + 2 - \frac{7}{3}a$ e interseca l'asse y in $A = (0, 2 - \frac{7}{3}a)$.

La retta $y = 2 - \frac{1}{3}x$ interseca l'asse in y in $B = (0, 2)$.

La base AB misura $\frac{7}{3}|a|$, l'altezza uscente da P misura $|a|$; l'area vale $\frac{7}{6}a^2$ ed assume il valore $\frac{21}{3}$ per $a = \pm 3$. Esistono dunque due punti che risolvono il problema: $P = (3, 1)$ e $P = (-3, 3)$.

(2.16) (a) $2\sqrt{5}$ (b) 0 (c) 5 (d) $2\sqrt{13}$

(2.17) (a) $\frac{6}{5}\sqrt{5}$ (b) $\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

La distanza di un punto (x, y) della prima retta dalla seconda vale $\frac{|ax + by + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Poiché il punto appartiene alla prima retta, risulta $ax + by = -c$; dunque, sostituendo nel precedente risultato, si ottiene $\frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(2.18)

- (a) improprio: le rette sono parallele a quelle di equazione $y = 2x$
- (b) proprio: le rette escono dal punto $(0, 2)$ (rimane esclusa $x = 0$)
- (c) improprio: le rette sonoparallele a quella di equazione $y = -3x$
- (d) improprio: le rette sono parallele a quella di equazione $y = 0$
- (e) proprio: le rette escono dal punto $(-1, 2)$ (rimane esclusa $x = -1$)
- (f) proprio: le rette escono dal punto $(-\frac{1}{2}, 1)$ (rimane esclusa $y = 1$)

(2.19) (a) $y - 2x + k = 0$ (b) $y + 1 = k(x + 3)$, cioè $kx - y + (3k - 1) = 0$

(2.20) $x - y - 2 + k(x - 3y - 1) = 0$, cioè $(1 + k)x - (1 + 3k)y - (2 + k) = 0$ (si perde la retta $x - 3y - 1 = 0$). La retta passante per A si ottiene per $k = -\frac{4}{5}$.

(2.21) (a) $2x - 3y = 0$ (b) $C = (-1, 3)$ (c) $3x - 2y = 0$ (d) $C = (-2, 0)$

(2.22)

- (a) È generato dalle rette $2x - y + 7 = 0$, $x + 3y = 0$; ha centro in $C = (-3, 1)$.
- (b) La retta per $P = (1, 4)$ si trova per $k = -\frac{5}{13}$. Sostituendo nell'equazione del fascio le coordinate dell'origine, si trova che l'equazione non è verificata. La retta $x + 3y = 0$ (che rimane esclusa dal fascio) è quella richiesta.
- (c) Per $k = -2$ si trova la retta $y = 1$, per $k = \frac{11}{5}$ la retta $3x + 4y + 5 = 0$.

(2.23) L'equazione del fascio è $3x - y + k(5x + 9y) = 0$ ovvero $(3 + 5k)x + (9k - 1)y = 0$; l'equazione esclude la retta $5x + 9y = 0$.

(a) Per $k = -\frac{23}{17}$

(b) La retta deve avere coefficiente angolare uguale a -4 ; questo si ottiene per $k = \frac{7}{41}$.

(c) Il centro del fascio è $C = (0, 0)$; l'area del triangolo vale 6.

(2.24) Consideriamo dapprima il caso particolare.

Il coefficiente angolare della retta per AB è 2; dunque l'asse deve avere coefficiente $-\frac{1}{2}$.

Il punto medio del segmento AB è $(\frac{3}{2}, 1)$.

L'equazione dell'asse è dunque dato da $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - \frac{3}{2})$, cioè $2x + 4y = 7$.

Procedendo con il secondo metodo, si trova l'equazione $(x - 1)^2 + y^2 = (x - 2)^2 + (y - 2)^2$; sviluppando i quadrati e semplificando, si ritrova l'equazione $2x + 4y = 7$.

Nel caso generale, il coefficiente della retta AB vale $\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ e dunque il coefficiente dell'asse deve valere $-\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}$. L'espressione perde significato se $a_2 = b_2$: in questo caso la retta AB è orizzontale e dunque l'asse è la retta verticale passante per il punto di mezzo, di equazione $x = \frac{a_1 + b_1}{2}$.

Escludendo questo caso, il punto medio ha coordinate $(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2})$. L'equazione dell'asse è data da $2(b_1 - a_1)x + 2(b_2 - a_2)y = b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 - a_2^2$. Si osservi come l'equazione contenga anche il caso $a_2 = b_2$ che avevamo esaminato a parte.

Procedendo con il secondo metodo, si ottiene $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = (x - b_1)^2 + (x - b_2)^2$; svolgendo i calcoli, si ritrova la precedente equazione.

(2.25) Per la prima coppia di rette, procedendo come indicato si ottiene:

$$\frac{|3x - 4y + 1|}{5} = \frac{|12x + 5y - 1|}{13}$$

da cui

$$\frac{3x - 4y + 1}{5} = \frac{12x + 5y - 1}{13} \iff 21x + 77y = 18$$

oppure

$$\frac{3x - 4y + 1}{5} = -\frac{12x + 5y - 1}{13} \iff 99x - 27y + 8 = 0$$

che sono le due bisettrici richieste.

Per la seconda coppia, si ottiene

$$|x - y + 4| = \frac{|x + 7y - 3|}{5},$$

da cui, procedendo come sopra, si deducono le equazioni

$$4x - 12y + 23 = 0, \quad 6x + 2y + 17 = 0.$$

(2.26)

(a) Per le bisettrici, si ha:

retta OB : $y = 2x$	retta OA : $y = 0$
retta OA : $y = 0$	retta AB : $2x + 3y = 8$
retta OB : $y = 2x$	retta AB : $2x + 3y = 8$

bisettrice angolo in O :	$2x - (1 + \sqrt{5})y = 0$
bisettrice angolo in A :	$2x - (3 + \sqrt{13})y = 8$
bisettrice angolo in B :	$2(\sqrt{13} + \sqrt{5})x + (3\sqrt{5} - \sqrt{13})y = 8\sqrt{5}$

punto di intersezione	$P = \left(\frac{4(1 + \sqrt{5})}{4 + \sqrt{5} + \sqrt{13}}, \frac{8}{4 + \sqrt{5} + \sqrt{13}} \right)$
-----------------------	---

(b) Per le altezze:

$$\begin{array}{ll} \text{altezza per } B: & x = 1 \\ \text{altezza per } A: & x + 2y = 4 \\ \text{altezza per } O: & 3x - 2y = 0 \\ \text{punto di intersezione} & P = (1, \frac{3}{2}) \end{array}$$

(c) Per gli assi:

$$\begin{array}{ll} \text{asse } OA: & x = 2 \\ \text{asse } OB: & 2x + 4y = 5 \\ \text{asse } AB: & 6x - 4y = 11 \\ \text{punto di intersezione} & P = (2, \frac{1}{4}) \end{array}$$

(d) Per le mediane:

$$\begin{array}{llll} \text{punto medio di } OA: & (2, 0) & \text{mediana per } B: & 2x + y - 4 = 0 \\ \text{punto medio di } OB: & (\frac{1}{2}, 1) & \text{mediana per } A: & 2x + 7y - 8 = 0 \\ \text{punto medio di } AB: & (\frac{5}{2}, 1) & \text{mediana per } O: & 2x - 5y = 0 \\ \text{punto di intersezione } P: & (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}) \end{array}$$

(2.27) Riscritto il sistema nella forma equivalente

$$\begin{cases} x + ky = k - 2 \\ 2x + (k - 2)y = -5 \end{cases}$$

l'esistenza di una soluzione è legata al determinante della matrice dei coefficienti $\det A = (k-2) - 2k = -k-2$.

Se $k \neq -2$, il sistema ha un'unica soluzione e dunque le due rette sono incidenti.

Se $k = -2$ le due rette sono parallele (le loro equazioni diventano $x - 2y = -4$ e $2x - 4y = -5$).

(2.28) La retta AB ha equazione $2x - 3y + 1 = 0$; l'asse del segmento AB ha equazione $3x + 2y - 18 = 0$. Il vertice C che stiamo cercando ha coordinate della forma $C = (x, \frac{18-3x}{2})$; la sua distanza dalla retta AB vale $\frac{\sqrt{13}|x-4|}{2}$ e questa è dunque l'altezza del triangolo uscente da C . Poiché la base AB misura $2\sqrt{13}$, l'area del triangolo vale $\frac{13|x-4|}{2}$, che coincide con il valore richiesto se $x = 0$ oppure $x = 8$. Esistono dunque due possibili scelte per il punto P : $P = (0, 9)$ o $P = (8, -3)$.

(2.29)

(a) $C = (0, 0)$, $r = 2$

(b) $C = (-3, 2)$, $r = \sqrt{13}$

Negli altri casi l'equazione rappresenta l'insieme vuoto.

(2.30)

(a) $k < \frac{13}{4}$; $C = (1, -\frac{3}{2})$, $r = \frac{\sqrt{13-4k}}{2}$

(b) $k < 5$; $C = (-2, -1)$, $r = \sqrt{5-k}$

(c) per ogni valore di k ; $C = (-\frac{k}{2}, -\frac{3k}{2})$, $r = \sqrt{\frac{5k^2}{2} + 2}$

(2.31) La circonferenza data ha centro in $C = (0, 2)$ e raggio $r = 3$.

- (a) è interno: la sua distanza d dal centro vale 2 ed è minore del raggio; sostituendo le sue coordinate nell'equazione il primo membro diventa minore di 0.
- (b) appartiene alla circonferenza: la sua distanza d dal centro vale 3 ed è uguale al raggio; le sue coordinate verificano l'equazione.
- (c) è esterno: la sua distanza dal centro vale $\sqrt{10}$ ed è maggiore del raggio; sostituendo le sue coordinate nell'equazione il primo membro diventa maggiore di 0.
- (d) è esterno: $d = \sqrt{13}$
- (e) è interno: $d = \sqrt{2}$
- (f) appartiene alla circonferenza.

(2.32) La condizione perché l'equazione rappresenti una circonferenza ($13k^2 + 10k + 13 > 0$) è sempre verificata.

La circonferenza ha centro $C = (-k, \frac{3(1+k)}{2})$ e raggio $r = \frac{\sqrt{13k^2 + 10k + 13}}{2}$.

- (a) $k = -\frac{7}{9}$
- (b) $k = -1$ oppure $k = \frac{3}{13}$
- (c) $k = -\frac{1}{2}$
- (d) $k = 0$
- (e) $k = 5 \pm \sqrt{8}$

(f) Perché le due circonferenze siano tangenti esternamente, la distanza dei centri deve essere uguale alla somma dei raggi:

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 + \frac{9}{4}(1+k)^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{13k^2 + 10k + 13} + \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \\ \iff 2k - \frac{3}{2} &= \sqrt{\frac{13k^2 + 10k + 13}{2}} \iff \begin{cases} k > \frac{3}{4} \\ 10k^2 + 44k + 17 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il sistema non ha soluzioni: l'equazione ha per radici i valori $k = \frac{-22 \pm \sqrt{314}}{10}$ e nessuno dei due verifica la condizione $k > \frac{3}{4}$.

(g) Perché le due circonferenze siano tangenti internamente, la distanza dei centri deve essere uguale al valore assoluto della differenza dei raggi:

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 + \frac{9}{4}(1+k)^2} &= \left| \frac{1}{2}\sqrt{13k^2 + 10k + 13} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \iff \frac{3}{2} - 2k = \sqrt{\frac{13k^2 + 10k + 13}{2}} \iff \\ &\iff \begin{cases} k < \frac{3}{4} \\ 10k^2 + 44k + 17 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il sistema ammette due soluzioni: $k = \frac{-22 \pm \sqrt{314}}{10}$.

(2.33)

- (a) Deve avere raggio $2\sqrt{2}$; la sua equazione è $(x-2)^2 + y^2 = 8$, ovvero $x^2 + y^2 - 4x = 4$.
- (b) Il centro è il punto di mezzo del segmento e il raggio metà della sua lunghezza: $C = (-1, 3)$, $r = \sqrt{2}$; l'equazione è $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 2$, ovvero $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$.

- (c) Il centro è il punto di intersezione tra l'asse del segmento AB e quello del segmento AC , il raggio è la distanza del centro da uno qualunque dei punti dati.

Asse AB : $x + y = 2$, asse AC $x - y = -8$, centro: $P = (-3, 5)$, raggio r : $\sqrt{20}$. L'equazione della circonferenza è $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 20$, ovvero $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 14 = 0$.

- (d) Il centro è l'intersezione tra la retta data e l'asse del segmento AB , il raggio la distanza del centro da uno qualunque dei punti dati.

Asse AB : $x + y = 3$, centro: $C = (1, 2)$, raggio: $r = 2$.

L'equazione è $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$, ovvero $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

(2.34) Per risolvere il problema, possiamo studiare il sistema formato dall'equazione della circonferenza e quella della retta: se non ha soluzioni la retta è tangente, se ha due soluzioni la retta è secante. Più semplicemente, possiamo calcolare la distanza d della retta dal centro della circonferenza e confrontarla con il raggio r : se $d > r$ la retta è esterna, se $d = r$ la retta è tangente, se $d < r$ la retta è secante.

- (a) secante: $d = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$, $r = \sqrt{8}$; punti di intersezione: $\left(\frac{1 + \sqrt{7}}{2}, \frac{7 + \sqrt{7}}{2}\right), \left(\frac{1 - \sqrt{7}}{2}, \frac{7 - \sqrt{7}}{2}\right)$.
- (b) tangente: $d = r = 3\sqrt{2}$; punto di tangenza: $(0, 0)$
- (c) esterna: $d = \frac{9}{\sqrt{10}}$, $r = 2$
- (d) tangente: $d = r = \sqrt{2}$; punto di tangenza: $(-2, 1)$.

(2.35) Per risolvere il problema, possiamo studiare il sistema formato dalla circonferenza e dal fascio di rette uscenti dal punto: nell'equazione di secondo grado in x che si ottiene eliminando y , il discriminante deve essere nullo.

Alternativamente, possiamo imporre che il fascio di rette abbia dal centro della circonferenza distanza uguale al raggio.

Si ricordi che se il punto appartiene alla circonferenza esiste un'unica retta tangente, se il punto è esterno ne esistono due, se è interno non ne esiste nessuna.

- (a) La circonferenza γ ha centro $C = (-1, 1)$ e raggio $r = \sqrt{10}$; il punto P appartiene a γ . Equazione del fascio di rette: $y - 2 = k(x - 2)$, cioè $kx - y + 2 - 2k = 0$. Distanza da C : $\frac{|1 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$.

$$\frac{|1 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 10 \iff (3k - 1)^2 = 10(k^2 + 1) \iff k = -3$$

Equazione della retta tangente: $y = 8 - 3x$.

- (b) La circonferenza γ ha centro $C = (4, 1)$ e raggio $r = \sqrt{5}$; il punto P è esterno a γ . Equazione del fascio di rette: $y = k(x - 1)$, cioè $kx - y - k = 0$.

Distanza da C : $\frac{|1 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$.

$$\frac{1 - 3k}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5} \iff (3k - 1)^2 = 5(k^2 + 1) \iff k = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Equazioni delle rette tangenti: $y = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}(x - 1)$.

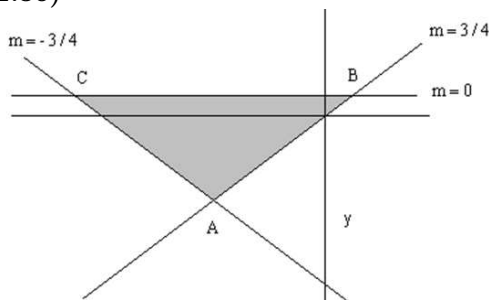
- (c) La circonferenza γ ha centro $C = (-1, 2)$ e raggio $r = \sqrt{2}$; il punto P appartiene a γ . Equazione del fascio di rette $y - 1 = k(x + 2)$, cioè $kx - y + 1 + 2k = 0$.

Distanza da C : $\frac{|k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$.

$$\frac{|k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{2} \iff (k - 1)^2 = 2(k^2 + 1) \iff k = -1$$

Equazione della retta tangente: $y = -x - 1$.

(2.36)



Il centro della circonferenza è il punto di incontro delle bisettrici del triangolo ABC , il raggio è la distanza del centro da uno qualunque dei lati.

Bisettrice per A :

$$\frac{|3x - 4y|}{5} = \frac{|3x + 4y + 32|}{5} \iff x = -\frac{16}{3} \text{ oppure } y = -4.$$

Delle soluzioni quella che interessa è $x = -\frac{16}{3}$.

Bisettrice per B :

$$\frac{|3x - 4y|}{5} = |y - 1| \iff 3x - 9y + 5 = 0 \text{ oppure } 3x + y - 5 = 0.$$

Delle due soluzioni quella che interessa è $3x - 9y + 5 = 0$ (ha coefficiente angolare positivo).

Centro della circonferenza:

$$\begin{cases} x = -\frac{16}{3} \\ 3x - 9y + 5 = 0 \end{cases} \iff C = \left(-\frac{16}{3}, -\frac{11}{9}\right)$$

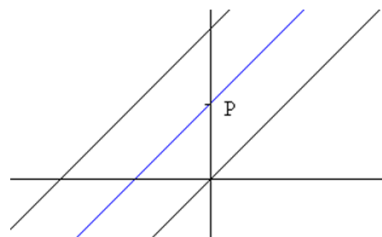
Raggio della circonferenza (distanza di C dalla retta $y = 1$):

$$r = \left| -\frac{11}{9} - 1 \right| = \frac{20}{9}.$$

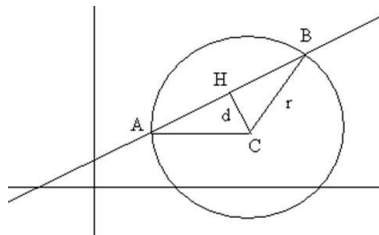
Equazione della circonferenza: $9x^2 + 9y^2 + 96x + 22y + 225 = 0$.

(2.37) Il centro della circonferenza sta sulla bisettrice della striscia individuata dalle due rette, cioè sulla retta $y = x + 4$, e dunque è un punto della forma $(a, a + 4)$; il raggio è la distanza di un qualunque punto di questa retta (ad esempio $P = (0, 4)$) da una delle due rette date e vale $2\sqrt{2}$. L'equazione della circonferenza è dunque: $(x - a)^2 + (y - a - 4)^2 = 8$

Imponendo il passaggio per P , si ottengono per a i valori ± 2 ; esistono dunque due circonferenze che risolvono il problema: $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 8$, $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.



2.37



2.38

(2.38)*I metodo:*

cerchiamo le intersezioni tra la circonferenza e la retta, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $A = (1, 1)$, $B = \left(\frac{32}{5}, \frac{14}{5}\right)$; la lunghezza della corda è $9\frac{\sqrt{10}}{5}$.

II metodo

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo BHC in figura. $C = (4, 1)$, $r = 3$, $d =$ distanza di C dalla retta $= 3\frac{\sqrt{10}}{10}$, $HB = 9\frac{\sqrt{10}}{10}$, $l = 9\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(2.39)

- | | | | | |
|--------------|----------------------|--------------|---------|----------------------|
| (a) vertici: | $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$ | $(0, \pm 4)$ | fuochi: | $(\pm 2, 0)$ |
| (b) vertici: | $(\pm 3, 0)$ | $(0, \pm 2)$ | fuochi: | $(\pm \sqrt{5}, 0)$ |
| (c) vertici: | $(\pm 7, 0)$ | $(0, \pm 9)$ | fuochi: | $(0, \pm 4\sqrt{2})$ |

(2.40)

- (a) Deve essere $k^2 - 1 > 0$ cioè $k < -1$ oppure $k > 1$. I vertici sono i punti $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm \sqrt{k^2 - 1})$.

Se $4 > k^2 - 1$, cioè se $-\sqrt{5} < k < -1$ oppure $1 < k < \sqrt{5}$ i fuochi appartengono all'asse x e sono i punti $(\pm \sqrt{5 - k^2}, 0)$.

Se $4 < k^2 - 1$, cioè se $k < -\sqrt{5}$ oppure $k > \sqrt{5}$, i fuochi appartengono all'asse y e sono i punti $(0, \pm \sqrt{k^2 - 5})$.

Se $4 = k^2 - 1$, cioè se $k = \pm \sqrt{5}$ l'ellisse si riduce alla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2.

- (b) Deve essere $3k + 1 > 0$, cioè $k > -\frac{1}{3}$. I vertici sono i punti $(\pm \sqrt{3k + 1}, 0)$, $(0, \pm \sqrt{k^2 + 3})$.

Se $3k + 1 > k^2 + 3$, cioè se $1 < k < 2$, i fuochi appartengono all'asse x e sono i punti $(\pm \sqrt{-k^2 + 3k - 2}, 0)$.

Se $3k + 1 < k^2 + 3$, cioè se $-\frac{1}{3} < k < 1$ oppure $k > 2$, i fuochi appartengono all'asse y e sono i punti $(0, \pm \sqrt{k^2 - 3k + 2})$.

Se $3k + 1 = k^2 + 3$, cioè se $k = 1$ oppure $k = 2$, l'ellisse si riduce alla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2 oppure $\sqrt{7}$.

(2.41)

(a) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

(b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ oppure $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

- (c) I fuochi sono nei punti $(0, \pm 1)$ e due vertici sono nei punti $(0, \pm 2)$. Per trovare gli altri due vertici $(x, 0)$ utilizziamo la definizione $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 4$; l'equazione diventa $2\sqrt{x^2 + 1} = 4$ e fornisce $x = \pm\sqrt{3}$.

L'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

- (d) Imporre all'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ il passaggio per i punti dati porta al sistema:

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases}$$

che ha per soluzioni $a^2 = 20$, $b^2 = 5$. L'equazione dell'ellisse è dunque $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ cioè $x^2 + 4y^2 = 20$.

- (e) L'informazione sul vertice porta a scrivere l'equazione dell'ellisse nella forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Imponendo il passaggio per il punto dato, si deduce che deve essere $a^2 = \frac{9}{5}$; l'equazione dell'ellisse è dunque

$$\frac{5x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{cioè} \quad 5x^2 + y^2 = 9.$$

(2.42) Nel sistema tra l'ellisse e il fascio di rette passanti per il punto dato, dopo aver eliminato la variabile y , si ottiene un'equazione di secondo grado in x , il cui discriminante deve essere nullo. Se il punto è esterno all'ellisse si trovano due tangenti, se le appartiene se ne trova solo una, infine se il punto è interno non esistono tangenti.

- (a) $y = \pm x + 4$ (b) $y = 2x + 4$ (c) $3x + 2y + 7 = 0$, $y = 1$

(2.43)

(a) $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$

- (b) Il centro dell'ellisse è il punto medio del segmento dei fuochi: $C = (-6, 2)$. L'equazione è dunque della forma

$$\frac{(x+6)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1.$$

Poiché i fuochi stanno su una retta parallela all'asse delle x , l'asse maggiore è quello orizzontale e dunque si ha:

$$\frac{(x+6)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1.$$

I due vertici lungo l'asse verticale hanno coordinate $(-6, 2 \pm b)$; imponiamo che uno di questi verifichi la definizione di ellisse, cioè che la somma delle sue distanze dai fuochi sia uguale alla lunghezza 16 dell'asse orizzontale, ovvero (data la simmetria) che la sua distanza da un fuoco sia uguale al semiasse orizzontale:

$$\sqrt{16 + b^2} = 8 \implies b^2 = 48.$$

L'equazione richiesta è dunque:

$$\frac{(x+6)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{48} = 1.$$

(2.44)

- (a) $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = 1$. Vertici: $V = (\pm\frac{1}{2}, 0)$, fuochi: $F = (\pm\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$, asintoti $y = \pm 2x$.
- (b) $V = (0, \pm 2)$, $F = (0, \pm\sqrt{13})$, $y = \pm\frac{2}{3}x$.
- (c) $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{4} = 1$, $V = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $F = (\pm\frac{3}{\sqrt{2}}, 0)$, $y = \pm 2\sqrt{2}x$.
- (d) $V = (0, \pm 3)$, $F = (0, \pm\sqrt{13})$, $y = \pm 3\frac{x}{2}$.
- (e) $x^2 - y^2 = -1$, $V = (0, \pm 1)$, $F(0, \pm\sqrt{2})$, $y = \pm x$.
- (f) $V = (\pm 2, 0)$, $F = (\pm 3, 0)$, $y = \pm\sqrt{5}\frac{x}{2}$.
- (g) $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{12} = -1$, $V = (0, \pm\sqrt{12})$, $F = (0, \pm\sqrt{39})$, $y = \pm 2\frac{x}{3}$.
- (h) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, $V = (\pm\sqrt{5}, 0)$, $F = (\pm 3, 0)$, $y = \pm 2\frac{x}{\sqrt{5}}$.
- (i) $V = \pm(1, 1)$, $F = \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $y = 0$, $x = 0$.

(2.45)

- (a) Deve essere $\begin{cases} a^2 = 4 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 3 \end{cases}$, cioè $a^2 = 4$, $b^2 = 5$, l'equazione è dunque $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.
- (b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$, ovvero $9x^2 - 16y^2 = 36$
- (c) $\frac{x^2}{3} - y^2 = -1$ ovvero $3y^2 - x^2 = 3$.

(2.46)

- (a) L'equazione è della forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Deve essere $\begin{cases} a^2 = 4 \\ \frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases}$, cioè $a^2 = 4$, $b^2 = \frac{16}{5}$. Si ottiene dunque $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{16}{5}} = 1$ ovvero $4x^2 - 5y^2 = 16$.
- (b) L'equazione è della forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ Deve essere $\begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{9}{b^2} = -1 \\ \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = -1 \end{cases}$ che è un sistema impossibile; dunque non esiste nessuna iperbole che risolve il problema.
- (c) L'equazione è della forma $xy = k$, con $k > 0$. Deve essere $\sqrt{2k} = \sqrt{3}$, cioè $k = \frac{3}{2}$. Si ottiene dunque $xy = \frac{3}{2}$.
- (d) L'equazione è della forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ Deve essere $\begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ \frac{5}{4a^2} - \frac{9}{b^2} = -1 \end{cases}$, cioè $a^2 = 1$, $b^2 = 4$. Si ottiene dunque $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$ ovvero $4x^2 - y^2 = -4$.

(2.47) Il procedimento da seguire è quello già visto per le altre curve: nel sistema tra l'iperbole e il fascio di rette uscenti dal punto si elimina y e nell'equazione di secondo grado in x che ne risulta imponiamo che il discriminante sia nullo.

(a) Il punto appartiene all'iperbole.

$$\begin{cases} y = -1 + m(x - \frac{1}{2}) \\ 8x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \implies (8 - m^2)x^2 + m(m+2)x - (\frac{m^2}{4} + m + 2) = 0$$

$\Delta = 0$ se $m^2 + 8m + 16 = 0$, cioè $m = -4$. La retta tangente ha dunque equazione $y = 1 - 4x$.

(b) Il punto non appartiene all'iperbole.

$$\begin{cases} y = 1 + mx \\ y^2 - 8x^2 = 2 \end{cases} \implies (m^2 - 8)x^2 + 2mx - 1 = 0$$

$\Delta = 0$ se $m^2 - 4 = 0$, cioè $m = \pm 2$. Le rette tangenti hanno equazioni $y = 1 \pm 2x$.

(c) Il punto appartiene all'iperbole.

$$\begin{cases} y = -1 + m(x + 3) \\ xy = 3 \end{cases} \implies mx^2 + (3m - 1)x - 3 = 0$$

$\Delta = 0$ se $9m^2 + 6m + 1 = 0$, cioè $m = -\frac{1}{3}$. La retta tangente ha dunque equazione $x + 3y + 6 = 0$.

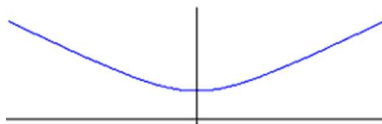
(2.48) La curva data è parte dell'iperbole equilatera $y^2 - x^2 = 16$ situata nel semipiano delle ordinate negative. Il punto P ha coordinate $(-3, -5)$. Procedendo come di consueto, si ottiene:

$$\begin{cases} y = -5 + m(x + 3) \\ y^2 - x^2 = 16 \end{cases} \implies (m^2 - 1)x^2 + 2m(3m - 5)x + (9m^2 - 30m + 9) = 0$$

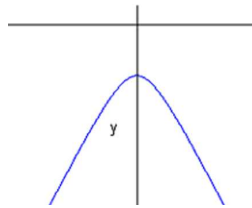
$\Delta = 0$ se $25m^2 - 30m + 9 = 0$, cioè $m = \frac{3}{5}$. La retta tangente ha dunque equazione $3x - 5y - 16 = 0$.

(2.49)

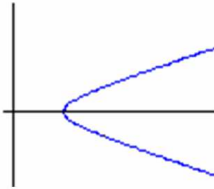
(a)



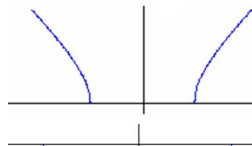
(b)



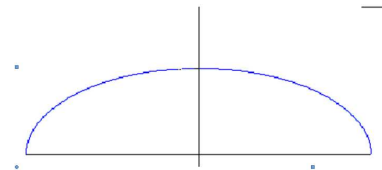
(c)



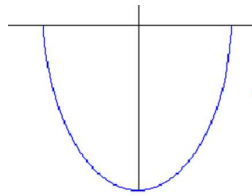
(d)



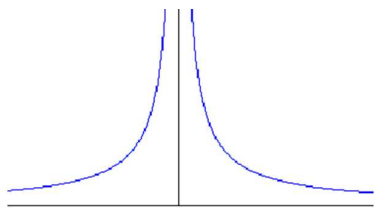
(e)



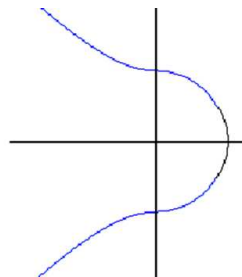
(f)



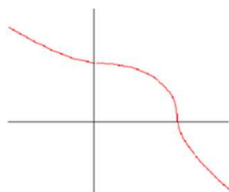
(g)



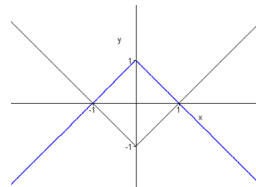
(h)



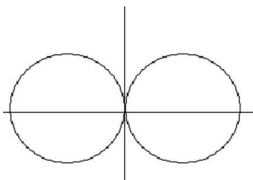
(i)



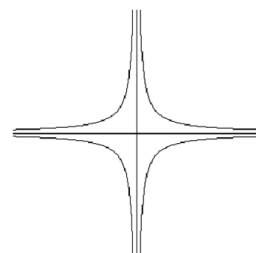
(l)



(m)



(n)

**(2.50)**

(a) Imponendo alle coordinate del punto di verificare l'equazione $xy = k$, si ottiene che deve essere $k = 2$. La curva ha dunque equazione $xy = 2$.

(b) La curva ha equazione del tipo $xy = k$, con $k > 0$. Imponendo che risulti $\sqrt{k} = 2$, si ottiene $k = 4$ e quindi l'equazione richiesta è $xy = 4$.

(c)

$$\begin{cases} xy = k \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \implies x^2 + x - 2k = 0; \quad \Delta = 1 + 8k = 0 \text{ per } k = -\frac{1}{8}$$

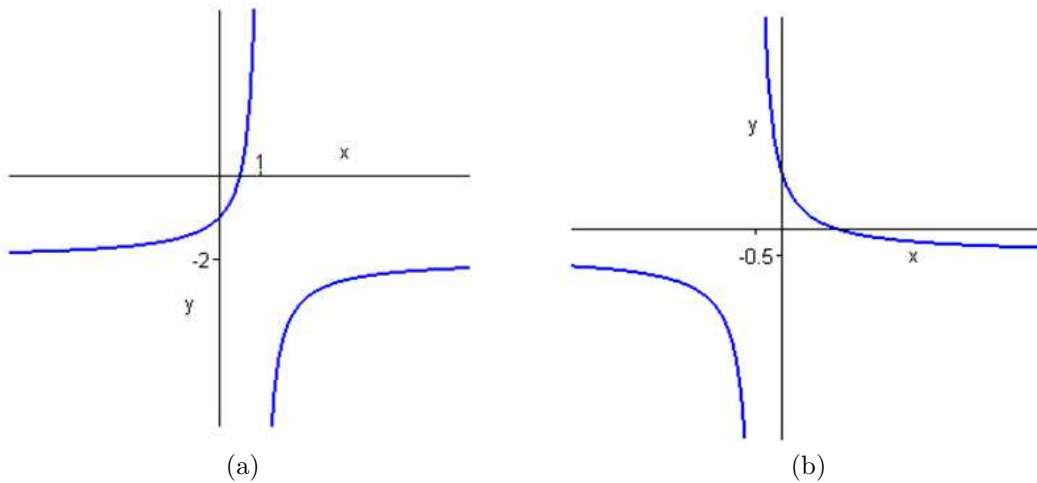
L'equazione della curva è $xy = -\frac{1}{8}$.

(d)

$$\begin{cases} xy = k \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases} \implies 2x^2 - 8x + k = 0; \quad x = -\frac{4 \pm \sqrt{16 - 2k}}{2}$$

La lunghezza della corda è $\sqrt{5(16 - 2k)}$ e questo valore coincide con quello richiesto per $k = 4$. L'iperbole ha equazione $xy = 4$.

(2.51)



$$(a) \quad y = -2 \frac{-x + \frac{1}{2}}{1-x} = -2 \frac{1-x-\frac{1}{2}}{1-x} = -2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} \right) = -2 + \frac{1}{1-x}.$$

Posto $Y = y + 2$, $X = x - 1$, l'equazione diventa $XY = -1$, che ha per centro $C = (0, 0)$, vertici $V = \pm(1, -1)$, fuochi $F = \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, asintoti $X = Y = 0$. Tenendo conto del legame tra le variabili X , Y e x , y , l'iperbole ottenuta ha centro in $(1, -2)$, vertici in $V_1 = (0, -1)$, $V_2 = (2, -3)$, fuochi in $F_1 = (1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 2)$, $F_2 = (1 + \sqrt{2}, -\sqrt{2} - 2)$, asintoti $x = 1$, $y = -2$.

$$(b) \quad y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{1+2x}.$$

Posto $Y = y + \frac{1}{2}$, $X = 1 + 2x$, l'equazione diventa $XY = \frac{3}{2}$, che ha centro $C = (0, 0)$. Vertici $V = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, fuochi $F = \pm(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, asintoti $X = Y = 0$. Tenendo conto del legame tra

le variabili, l'iperbole ottenuta ha centro in $C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, vertici in $V_1 = \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}{2}, \frac{2\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}{2}\right)$,

$V_2 = \left(\frac{-\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}{2}, \frac{-2\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}{2}\right)$, fuochi in $F_1 = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \frac{2\sqrt{3} - 1}{2}\right)$, $F_2 = \left(\frac{-\sqrt{3} - 1}{2}, \frac{-2\sqrt{3} - 1}{2}\right)$,

asintoti $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

(2.52)

(a) Se $k = 6$ l'equazione diventa $y = 3x + \frac{1}{2}$, che è quella di una retta.

Se $k \neq 6$, numeratore e denominatore sono proporzionali se $\frac{k}{k-6} = \frac{1}{k-4}$, il che accade per $k = 2$ e per $k = 3$.

Se $k = 2$ l'equazione diventa $y = \frac{2x+1}{-4x-2}$, cioè $y = -\frac{1}{2}$ con $x \neq -\frac{1}{2}$.

Se $k = 3$ l'equazione diventa $y = \frac{3x+1}{-3x-1}$, cioè $y = -1$ con $x \neq -\frac{1}{3}$.

In questi due casi, dunque, si ottiene una retta orizzontale priva di un punto.

Se $k \neq 2$, $k \neq 3$, $k \neq 6$ l'equazione è effettivamente quella di un'iperbole traslata. Per studiarne le caratteristiche, riscriviamola nel modo seguente:

$$y = k \frac{k + \frac{1}{k}}{(k-6)x + (k-4)} = \frac{k}{k-6} \frac{(k-6)x + \frac{k-6}{k}}{(k-6)x + (k-4)} = \frac{k}{k-6} \left[1 + \frac{\frac{k-6}{k} - k + 4}{(k-6)x + (k-4)} \right] =$$

$$= \frac{k}{k-6} + \frac{p}{(k-6)x + (k-4)}$$

con p valore opportuno. Posto:

$$Y = y - \frac{k}{k-6}, \quad X = (k-6)x + (k-4),$$

l'equazione diventa $XY = p$; in particolare, rispetto alle variabili X, Y l'iperbole ha centro in $(0, 0)$ e asintoti $X = Y = 0$. Ritornando alle variabili x, y , il centro dell'iperbole è in $\left(-\frac{k-4}{k-6}, \frac{k}{k-6}\right)$ e gli asintoti sono le rette $y = \frac{k}{k-6}$, $x = \frac{4-k}{k-6}$. I calcoli sono stati effettuati sotto l'ulteriore ipotesi $k \neq 0$; è facile vedere per sostituzione che i risultati valgono anche per $k = 0$.

- (b) Se $k = 3$ l'equazione diventa $y = \frac{3(x-1)}{2}$, che è quella di una retta.

Se $k \neq 3$, numeratore e denominatore sono proporzionali se $\frac{k}{3-k} = -\frac{3}{2}$, il che accade per $k = 9$.

Se $k = 9$ l'equazione diventa $y = -\frac{3}{2} \frac{3x-1}{3x-1}$, cioè $y = -\frac{3}{2}$ con $x \neq \frac{1}{3}$.

Se $k \neq 3$, $k \neq 9$, l'equazione è quella di una iperbole traslata. Per studiarne le caratteristiche, riscriviamola nel modo che segue:

$$y = k \frac{x - \frac{3}{k}}{(3-k)x + 2} = \frac{k}{3-k} \frac{(3-k)x - \frac{3(3-k)}{k}}{(3-k)x + 2} = \frac{k}{3-k} \left[1 - \frac{\frac{9-k}{k}}{(3-k)x + 2} \right] =$$

$$= \frac{k}{3-k} + \frac{p}{(3-k)x + 2}$$

con p valore opportuno. Posto:

$$Y = y - \frac{k}{3-k}, \quad X = (3-k)x + 2,$$

l'equazione diventa $XY = p$; in particolare, rispetto alle variabili X, Y l'iperbole ha centro in $(0, 0)$ e asintoti $X = Y = 0$. Ritornando alle variabili x, y , il centro dell'iperbole è in $\left(\frac{-2}{3-k}, \frac{k}{3-k}\right)$ e gli asintoti sono le rette $y = \frac{k}{3-k}$, $x = \frac{-2}{3-k}$. Come nell'esercizio precedente, i calcoli sono stati effettuati sotto l'ulteriore ipotesi $k \neq 0$; è facile vedere per sostituzione che i risultati valgono anche per $k = 0$.

(2.53)

- (a) L'informazione sul centro dell'iperbole si traduce nell'equazione $y + 3 = \frac{k}{x-1}$. Imponendo il passaggio per il punto dato, si trova $k = -4$. L'equazione richiesta è dunque $y = \frac{3x+1}{1-x}$.
- (b) L'informazione sugli asintoti permette di scrivere l'equazione $y + 5 = \frac{k}{x+8}$. Imponendo il passaggio per il punto dato, si trova $k = 46$. L'equazione richiesta è dunque $y = \frac{6-5x}{x+8}$.
- (c) L'informazione sull'asintoto permette di scrivere l'equazione $y - \frac{1}{2} = \frac{k}{x-p}$. Imponendo il passaggio per i punti dati, si trova il sistema

$$\begin{cases} -\frac{15}{2} = \frac{k}{-p} \\ \frac{15}{2} = \frac{k}{\frac{1}{2}-p} \end{cases} \iff p = \frac{1}{4}, \quad k = \frac{15}{8}.$$

L'equazione dell'iperbole è $y = \frac{2x+7}{4x-1}$.

- (d) Scritta l'equazione nella forma $y = \frac{ax+b}{x+c}$, il passaggio per i punti dati si traduce nel sistema

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{-a+b}{c-1} = -\frac{1}{2} \\ \frac{4a+b}{c+4} = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = -5 \end{cases}$$

L'equazione richiesta è dunque $y = \frac{3x}{5-x}$.

- (e) Scritta l'equazione nella forma $y = \frac{ax+b}{x+c}$, il passaggio per i punti dati e per quello di tangenza si traduce nel sistema

$$\begin{cases} \frac{-\frac{a}{3}+b}{c-\frac{1}{3}} = -4 \\ \frac{b}{c} = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6c - 4 \\ b = -2c \end{cases}$$

L'equazione diventa $y = \frac{(6c-4)x-2c}{x+c}$. Imponiamo la condizione di tangenza con la retta:

$$\begin{cases} y = \frac{(6c-4)x-2c}{x+c} \\ y = 4x-2 \end{cases} \implies 2x^2 + (1-c)x = 0$$

Il discriminante dell'equazione è nullo per $c = 1$; l'equazione ottenuta è $y = \frac{2x-2}{x+1}$.

(2.54) $y = -\frac{x^2}{2}$.

(2.55) Fuoco $F = (0, 1)$, direttrice $y = -1$.

(2.56) Vertice $V = (1, -1)$, fuoco $F = (1, -\frac{9}{8})$, direttrice $y = -\frac{7}{8}$.

(2.57) La parabola richiesta ha un'equazione della forma $y = ax^2 + bx + c$.

- (a) Imponendo il passaggio per i punti dati, si ottiene un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b, c : la sua risoluzione permette di dedurre l'equazione cercata. Si può semplificare il calcolo, osservando che due punti hanno la stessa ordinata. Data la simmetria della parabola, il suo vertice deve stare sull'asse del segmento individuato da questi due punti, cioè sulla retta $x = \frac{1}{2}$. Deve dunque essere $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$, cioè $b = -a$. Alla parabola $y = ax^2 - ax + c$ imponiamo il passaggio per $(0, -6)$: si ottiene che deve essere $c = -6$. Infine alla parabola $y = ax^2 - ax - 6$ imponiamo il passaggio per $(2, -4)$: si ricava $a = 1$. In definitiva, la parabola richiesta ha equazione $y = x^2 - x - 6$.

- (b) Le condizioni si traducono nel sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 0 \\ c = -1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

La parabola ha equazione $y = 3x^2 - 1$.

- (c) Si può procedere come sopra, ricorrendo alle formule che legano le coordinate del fuoco e del vertice ai coefficienti della parabola e quindi risolvendo un sistema di tre equazioni nelle tre incognite. Più semplicemente, dai dati del problema si ricava che la direttrice ha equazione $y = \frac{7}{2}$; a questo punto possiamo ricorrere alla definizione di parabola e scrivere

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-\frac{5}{2})^2} = \left| y - \frac{7}{2} \right|.$$

Elevando al quadrato ambo i membri e svolgendo i calcoli, si ottiene l'equazione cercata:

$$y = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{5}{2}.$$

- (d) Anche in questo caso si può ricorrere alle formule e alla successiva risoluzione di un sistema, oppure alla definizione. Seguiamo questa seconda strada: osservato che il fuoco deve essere nel punto $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{8})$, si ottiene

$$\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{3}{8})^2} = \left| y + \frac{5}{8} \right|.$$

da cui si deduce l'equazione:

$$y = 2x^2 - 6x + 4.$$

(2.58) La parabola richiesta ha un'equazione della forma $x = ay^2 + by + c$.

- (a) Non esiste alcuna parabola della forma suddetta che verifica queste condizioni, dato che fuoco e vertice non stanno sulla stessa retta orizzontale.
- (b) Come già nel problema precedente, possiamo procedere in due modi diversi, ricorrendo alle formule, oppure alla definizione. I dati permettono di concludere che la direttrice ha equazione $x = \frac{1}{2}$. L'equazione della parabola è dunque

$$\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 + (y+2)^2} = \left| x - \frac{1}{2} \right|,$$

che si semplifica in:

$$x = \frac{y^2}{2} + 2y + 3.$$

- (c) Tenendo conto che il fuoco si trova in $F = (\frac{15}{4}, 2)$, procedendo come sopra si trova che l'equazione della parabola è $x = -y^2 + 4y$.

(2.59) La parabola richiesta ha un'equazione della forma $y = ax^2 + bx + c$.

- (a) Il passaggio per i due punti si traduce nelle condizioni

$$\begin{cases} c = 3 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 3 \\ b = -1 - 3a \end{cases}$$

che permettono di scrivere l'equazione nella forma $y = ax^2 - (1 + 3a)x + 3$. Le coordinate del vertice sono:

$$V = \left(\frac{1+3a}{2a}, \frac{-9a^2+6a-1}{4a} \right).$$

Imponendo che il vertice appartenga alla retta data, si arriva all'equazione:

$$\frac{-9a^2+6a-1}{4a} = 5 - \frac{1+3a}{2a}$$

che, eseguendo gli opportuni calcoli, fornisce $a = -1$ oppure $a = \frac{1}{9}$. Esistono dunque due parabole che soddisfano le richieste:

$$y = -x^2 + 2x + 3, \quad y = \frac{x^2}{9} - \frac{4}{3}x + 3.$$

(b) Il passaggio per i due punti e l'ipotesi che il vertice ha ascissa uguale a -1 si traduce nel sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ c = 2 \\ 9a - 3b + c = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

La parabola cercata ha equazione $y = x^2 + 2x + 2$.

(c) le condizioni del problema si traducono nel sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ \frac{1-b^2+4ac}{4a} = \frac{3}{4} \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -4a \\ c = 3a \\ 4a^2+3a-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -1 \\ c = \frac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases}$$

Si trovano due parabole che risolvono il problema $y = \frac{x^2-4x+3}{4}$ e $y = -x^2 + 4x - 3$.

(d) Invece di procedere come nei casi precedenti, conviene osservare che la direttrice della parabola deve essere la retta $y = \frac{5}{6}$ e ricorrere alla definizione; questo porta all'equazione

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{7}{6}\right)^2} = \left|y - \frac{5}{6}\right| \iff y = \frac{3}{2}x^2 + 1.$$

(2.60)

- (a) Si intersecano nei punti $(3, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{8})$.
- (b) Non si intersecano.
- (c) Sono tangenti nel punto $(2, \frac{4}{3})$.
- (d) Sono tangenti nel punto $(4, -5)$,

(2.61)

- (a) Il punto P non appartiene alla parabola. Per trovare le due rette tangenti, scriviamo il sistema tra la parabola e il fascio di rette passanti per P :

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 2 \\ y = k(x + \frac{3}{2}) - 1 \end{cases}$$

Eliminando y , si ottiene l'equazione di secondo grado in x :

$$x^2 + (2-k)x + 3(1 - \frac{k}{2}) = 0$$

La condizione di tangenza riciede l'annullarsi del discriminante dell'equazione:

$$\Delta = k^2 + 2k - 8 = 0 \text{ per } k = 2 \text{ oppure } k = -4.$$

Le due rette tangenti sono

$y = 2x + 2$ che è tangente nel punto $(0, 2)$

$y = -4x - 7$ che è tangente nel punto $(-3, 5)$.

- (b) Il punto P non appartiene alla parabola. Per trovare le due rette tangenti, procediamo come sopra. Nel sistema

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 4 \\ y = k\left(x - \frac{1}{2}\right) + 7 \end{cases}$$

eliminiamo y , ottenendo l'equazione di second grado in x :

$$x^2 + (k - 2)x + \left(3 - \frac{k}{2}\right) = 0.$$

La condizione di tangenza richiede l'annullarsi del discriminante dell'equazione:

$$\Delta = k^2 - 2k - 8 = 0 \text{ per } k = 4 \text{ oppure } k = -2.$$

Le due rette tangenti sono:

$y = 4x + 5$ che è tangente nel punto $(-1, 1)$

$y = 8 - 2x$ che è tangente nel punto $(2, 4)$.

- (c) Il punto P appartiene alla parabola: esiste dunque un'unica retta tangente, il punto di tangenza essendo proprio P . Dal sistema

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x + 1 \\ y = 1 + kx \end{cases}$$

si ricava l'equazione di secondo grado in x :

$$x^2 + (k - 5)x = 0$$

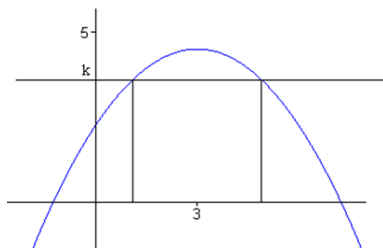
il cui discriminante si annulla per $k = 5$. La retta tangente è $y = 5x + 1$.

(2.62) Intersechiamo la parabola con una generica retta orizzontale

$$\begin{cases} y = \frac{-x^2 - 2x + 8}{3} \\ y = k \end{cases}$$

Eliminando y , si ottiene l'equazione di secondo grado in x : $x^2 + 2x + 3k - 8 = 0$ che ammette due soluzioni distinte: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{9 - 3k}$ purché sia $k < 3$. Questi due valori sono le ascisse dei punti in cui la retta interseca la parabola (l'ordinata è k in entrambe i casi). La lunghezza della corda così individuata è dunque $2\sqrt{9 - 3k}$, che coincide con il valore richiesto per $k = \frac{8}{3}$.

(2.63) Utilizzando la definizione di parabola, si trova l'equazione $y = \frac{-x^4 + 6x + 11}{4}$.



Il problema consiste nel cercare una retta di equazione $y = k$ (con $0 < k < 5$) che stacca sulla parabola una corda di lunghezza uguale alla sua distanza dall'asse delle x . Poiché

$$\begin{cases} y = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{11}{4} \\ y = k \end{cases} \implies x^2 - 6x - 11 + 4k = 0 \iff x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{5-k}$$

la corda ha lunghezza $4\sqrt{5-k}$. Deve dunque essere $4\sqrt{5-k} = k$ e questo si verifica per $k = 4$.

(2.64) Dobbiamo rendere massimo il prodotto xy sotto la condizione che risulti $x + y = 60$. Essendo $y = 60 - x$, la funzione da rendere massima è $f(x) = x(60 - x)$. Il grafico di questa funzione è una parabola con la concavità rivolta verso il basso: dunque il valore massimo corrisponde all'ordinata del vertice della parabola. In conclusione la funzione è massima per $x = 30$, cioè scegliendo $x = y = 30$.

(2.65)

- (a) Perché la funzione assuma valore minimo, deve essere $k > 0$: in questo modo il suo grafico è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto. La condizione del problema richiede che il vertice abbia ascissa uguale a 4: questo accade se $\frac{4}{2k} = 4$, cioè se $k = \frac{1}{2}$.
- (b) La funzione ha come grafico una parabola con la concavità rivolta verso il basso; perché assuma valore massimo per $x = 6$, il vertice deve avere ascissa uguale a 6; questo accade se $\frac{3k}{4} = 6$, cioè se $k = 8$.

(2.66) La parabola ha equazione della forma $y = ax^2 + bx + c$. Il passaggio per l'origine richiede che sia $c = 0$. Il vertice è il punto di incontro tra l'asse della parabola e la retta data: risolvendo il sistema delle due equazioni, si trova $V = (2, 6)$. Deve dunque essere

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 6 \end{cases}$$

La parabola richiesta ha dunque equazione $y = -\frac{3x^2}{2} + 6x$.

Il punto A ha coordinate $(4, 0)$. Il generico punto sulla parabola è $P = (x, -\frac{3x^2}{2} + 6x)$: perché la sua ordinata sia positiva, deve essere $0 < x \leq 4$. L'area del triangolo OAP vale $12x - 3x^2$, che è uguale a 9 per $x = 1$ e per $x = 3$. Per il punto P esistono dunque due scelte $P = (1, \frac{9}{2})$ oppure $P = (3, \frac{9}{2})$.

(2.67) Cerchiamo le intersezioni delle due parabole con la generica retta $x = k$:

$$\begin{cases} x = 2y^2 - 4y - 1 \\ x = k \end{cases} \implies 2y^2 - 4y - 1 - k = 0 \iff y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{6+2k}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{4}y + \frac{27}{16} \\ x = k \end{cases} \implies 12y^2 - 36y + 27 - 16k = 0 \iff y_{1,2} = \frac{18 \pm 8\sqrt{3k}}{12}$$

Le due corde misurano $\sqrt{6+2k}$ e $\frac{4}{3}\sqrt{3k}$; l'uguaglianza si ottiene per $k = \frac{9}{5}$.

(2.68) Consideriamo la generica retta $y = mx + p$ e imponiamo che risulti tangente ad entrambe le parabole.

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = mx + p \end{cases} \implies x^2 - 4mx - 4p = 0$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 2 \\ y = mx + p \end{cases} \implies x^2 - (m+2)x - (p+2) = 0$$

Imponiamo che sia contemporaneamente nullo il discriminante delle due equazioni:

$$\begin{cases} 4m^2 + 4p = 0 \\ (m+2)^2 + 4(p+2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p = -m^2 \\ 3m^2 - 4m - 12 = 0 \end{cases}$$

In definitiva

$$\begin{cases} m = \frac{2(1+\sqrt{10})}{3} \\ p = -\frac{4(11+2\sqrt{10})}{9} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} m = \frac{2(1-\sqrt{10})}{3} \\ p = -\frac{4(11-2\sqrt{10})}{9} \end{cases}$$

(2.69) Verifichiamo il caso generale (ovviamente, quello particolare si ottiene per $p = 0$). Per $m = 0$, si ottiene $a' = a$, $b' = -b + 2p$, che sono proprio le equazioni della simmetria rispetto alla retta $y = p$.

Se $m \neq 0$, la retta per P perpendicolare alla retta di simmetria ha equazione

$$y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$$

L'intersezione delle due rette è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y - b = -\frac{1}{m}(x - a) \\ y = mx + p \end{cases}$$

Questa intersezione deve essere il punto di mezzo $\left(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}\right)$ del segmento PP' sostituendo le coordinate di questo punto nel sistema, si ottiene che deve essere:

$$\begin{cases} b' + \frac{a'}{m} = b + \frac{a}{m} \\ b' - ma' = -b + ma + 2p \end{cases}.$$

Da questo sistema si ottengono per a' e b' i valori richiesti.

(2.70)

$$(a) \ x^3 - 2y^2 = 0 \quad (b) \ x - y - 1 = 0 \quad (c) \ y + 3x^2 = 0 \quad (d) \ 4y^2 - x - 1 = 0 \quad (e) \ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$$

(2.71)

$$\begin{array}{lll} (a) \quad 3x + 2y - 1 = 0 & (b) \quad x + 5y^2 = 0 & (c) \quad x^2 + y^2 + x - y = 0 \\ (d) \quad x^3 + y = 0 & (e) \quad 4x^2 + y^2 = 25 & (f) \quad x^3 + y^2 = 0 \end{array}$$

(2.72)

$$(a) \ 3x + 2y - 4 = 0 \quad (b) \ 4x^2 - y^2 + 6 = 0 \quad (c) \ x^2 + y^2 - x - y = 7 \quad (d) \ x + 3y^2 = 0 \quad (e) \ xy = 1$$

(2.73)

(a) $x + y = 0$ (b) $4y^2 - x = 0$ (c) $x^2 + y^2 = 1$ (d) $y - x^3 = 0$ (e) $\frac{x^4}{4} - y^2 = 0$ (f) $y = x^2$

(2.74)

(a) $(0, 0)$ (b) $(1, 2)$ (c) $(-1, -1)$ (d) $(2, 0)$ (e) $(0, -1)$

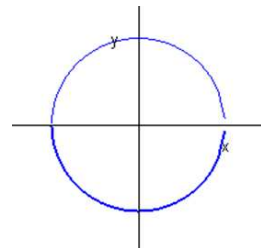
(2.75)

(a) $2x - 7 = 0$ (b) $x + y - 2 = 0$ (c) $4x^2 - 16x + y + 16 = 0$
 (d) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ (e) $4x^2 - y^2 - 12y - 37 = 0$

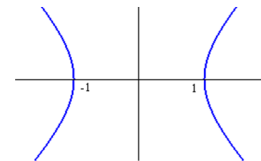
FUNZIONI

(3.1)

(a) $f_1 : [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \quad f_1(x) = \sqrt{1 - x^2},$
 $f_2 : [-1, 1] \rightarrow [-1, 0] \quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2},$



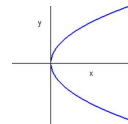
(b) $g_1 : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad g_1(x) = \sqrt{x^2 - 1},$
 $g_2 : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0], \quad g_2(x) = -\sqrt{x^2 - 1},$



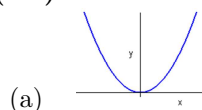
$h_1 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad h_1(x) = \sqrt{x},$

$h_2 : [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0], \quad h_2(x) = -\sqrt{x},$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = y^2.$

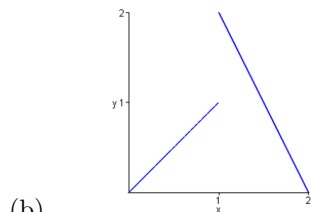


(3.2)



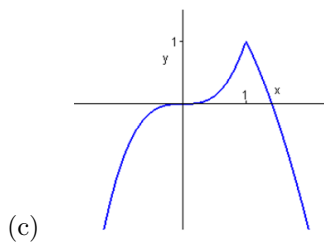
$B_1 = (0, 4) \quad B_2 = (0, 4) \quad B_3 = (0, 4)$

$B_4 = [0, 4] \quad B_5 = [0, 4) \quad B_6 = [0, 4]$

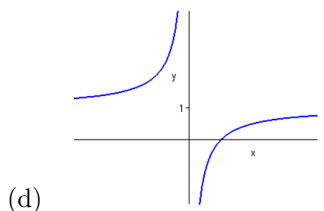


$B_1 = [0, 1) \quad B_2 = [0, 1) \cup \{2\} \quad B_3 = \{2\}$

$B_4 = [0, 2] \quad B_5 = [\frac{1}{2}, 2] \setminus \{1\} \quad B_6 = [\frac{1}{2}, 2]$

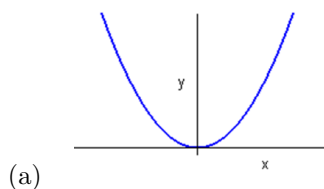


$$B_1 = [-2, -1] \quad B_2 = [-8, 1] \quad B_3 = [-8, 1) \\ B_4 = (-\infty, 1] \quad B_5 = (-\infty, 0) \quad B_6 = (-\infty, -7)$$

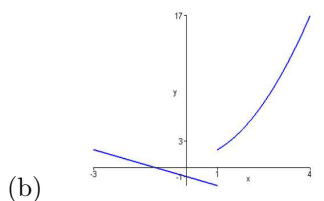


$$B_1 = [0, \frac{2}{3}] \quad B_2 = (-\infty, 0) \quad B_3 = (2, +\infty) \\ B_4 = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad B_5 = (-\infty, 1) \quad B_6 = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

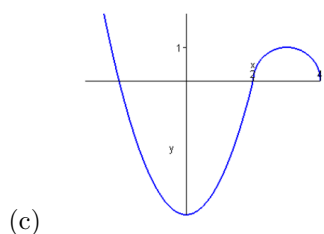
3.3



$$A_1 = (-3, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3), A_2 = [-5, 5], A_3 = (-1, 1), A_4 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$



$$A_1 = [-2, -1], A_2 = [-3, 0], A_3 = [-3, -1] \cup (1, 4], A_4 = [-3, \sqrt{2}] \setminus \{1\}.$$



$$A_1 = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup \{3\}, A_2 = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + 4} \right] \cup \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right], \\ A_3 = [-\sqrt{5}, -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{3}, 4], \\ A_4 = [-\sqrt{6}, -2] \cup [2, 4].$$

(3.4)

- | | | | |
|---|---------------------------------------|--|---|
| (a) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ | (b) $[2, +\infty)$ | (c) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ | (d) $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt[3]{2}\}$ |
| (e) $\mathbb{R}$ | (f) $[-4, 0) \cup (0, 4]$ | (g) $(-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$ | (h) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ |
| (i) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | (l) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | (m) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ | (n) $[1, +\infty)$ |
| (o) $(0, +\infty)$ | (p) $(1, +\infty)$ | (q) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 1\}$ | |
| (r) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$ | (s) mai definita | (t) $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ | (u) $\mathbb{R}$ |
| (v) $\mathbb{R} \setminus \{-1, \log 2\}$ | (w) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ | (z) $[-1, 1] \setminus \{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ | |

(3.5)

- (a) $(f \circ g)(x) = e^{(3x+15)}, x \in \mathbb{R}$ $(g \circ f)(x) = e^{(3x)} + 15, x \in \mathbb{R}$
- (b) $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x-1} - 3, x \in [1, +\infty)$ $(g \circ f)(x) = \sqrt{2x-4}, x \in [2, +\infty)$
- (c) $(f \circ g)(x) = x, x \in [0, +\infty)$ $(g \circ f)(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$
- (d) $(f \circ g)(x) = x, x \in [0, +\infty)$ $(g \circ f)(x) = x, x \in \mathbb{R}$
- (e) $(f \circ g)(x)$ non ha senso, $(g \circ f)(x) = -1, x \in (0, +\infty)$
- (f) $(f \circ g)(x) = \log^2(x-1) + 3 \log(x-1) - 2, x \in (1, +\infty)$
 $(g \circ f)(x) = \log(x^2 + 3x - 3), x \in \left(-\infty, \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3 + \sqrt{21}}{2}, +\infty\right)$
- (g) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}, x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$
 $(g \circ f)(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$
- (h) $(f \circ g)(x) = (2-x)^3 + 1, x \in \mathbb{R}$ $(g \circ f)(x) = 1 - x^3, x \in \mathbb{R}$
- (i) $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{2-x}, x \in \mathbb{R}$ $(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{3-x} + 1, x \in \mathbb{R}$
- (l) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- (m) $(f \circ g)(x) = |\log x|, x \in (0, +\infty)$ $(g \circ f)(x) = \log |x|, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- (n) $(f \circ g)(x) = \operatorname{sgn} \sqrt{x} = 1, x \in (0, +\infty)$ $(g \circ f)(x) = \sqrt{\operatorname{sgn} x} = 1, x \in (0, +\infty)$
- (o) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1+x & x \leq -4 \\ 1-\frac{1}{x} & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$ $(g \circ f)(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x-1 & x \geq 4 \end{cases}$
- (p) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 1-\sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases}$ $(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ (1-x)^2 & x \geq 1 \end{cases}$

(3.6)

- (a) $f_1(x) = x^2 + x, f_2(x) = \log x, f_3(x) = \frac{3}{x}$
- (b) $f_1 = x^2 - 1, f_2(x) = |x|, f_3(x) = \sqrt{x}, f_4(x) = \frac{1}{x}$
- (c) $f_1(x) = x^2 - 1, f_2(x) = |x|, f_3(x) = \sqrt{x}, f_4(x) = e^x$
- (d) $f_1(x) = x^2, f_2(x) = \log x, f_3(x) = \frac{1}{x}, f_4(x) = \sin x$

(3.7)

- (a) $f(x) = x^2$ $g(x) = e^x$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = e^x$
- (c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $g(x) = e^x$ (d) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ $g(x) = e^x$

(3.8) (a) $\cos(x-1)^2$ (b) $e^{|x-1|}$ (c) 2^{x-1} (d) x^2+1 (e) $(x-1)^4+1$

(3.9) Per ipotesi $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$, $g(x_1) < g(x_2)$.

(a) Sommando membro a membro le due disequaglianze vere per ipotesi, si ottiene:

$$f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$$

che stabilisce la crescenza della funzione somma. In maniera analoga si prova la decrescenza.

(b) Dalle ipotesi segue:

$$f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_1) < f(x_2)g(x_2)$$

(la prima maggiorazione è vera perché $g(x_1) > 0$), la seconda perché $f(x_2) > 0$); questo prova che anche la funzione prodotto (nelle ipotesi fatte) è crescente. In maniera analoga la decrescenza.

(c) Se f e g sono crescenti (decescenti) e negative, non è detto che la funzione prodotto sia ancora crescente (decescente). Come controesempio possiamo prendere $f(x) = g(x) = x$, per $x < 0$. Le funzioni f e g sono crescenti e negative, il loro prodotto $f(x)g(x) = x^2$ nel dominio assegnato è decrescente.

(d) Se f e g sono crescenti (decescenti) e di segno opposto, non è detto che la funzione prodotto sia ancora crescente (decescente). Come controesempio possiamo prendere $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, per $x < 0$. Le funzioni f e g sono crescenti e di segno opposto, il loro prodotto $f(x)g(x) = 1$ non è crescente.

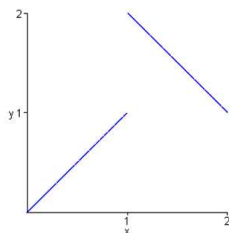
(3.10) Un possibile esempio è dato da $f(x) = |x|$.

(3.11) Un possibile esempio è dato da $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: la funzione è crescente sia in $(-\infty, 0)$ che in $(0, +\infty)$, ma non nell'intero dominio. Infatti presi $x_1 < 0 < x_2$, si ha $f(x_1) > 0 > f(x_2)$.

(3.12)

(a) Presi $x_1 \neq x_2$, indichiamo con x_1 il minore dei due. Se f è crescente, risulta $f(x_1) < f(x_2)$ e quindi in particolare $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(b) Un possibile esempio di funzione iniettiva che nel suo dominio non è crescente né decrescente è fornito da $f(x) = \frac{1}{x}$, definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Un altro esempio è fornito dalla funzione:



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(3.13)

(a) È crescente: infatti se $x_1 < x_2$, risulta $g(x_1) < g(x_2)$ perché g è crescente e da questo segue $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$ perché f è crescente.

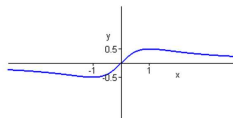
(b) È crescente: infatti se $x_1 < x_2$, risulta $g(x_1) > g(x_2)$ perché g è decrescente e da questo segue $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$ perché f è decrescente.

(c) È decrescente: infatti se $x_1 < x_2$, risulta $g(x_1) > g(x_2)$ perché g è decrescente e da questo segue $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$ perché f è crescente.

- (d) È decrescente: infatti se $x_1 < x_2$, risulta $g(x_1) < g(x_2)$ perché g è crescente e da questo segue $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$ perché f è decrescente.

(3.14)

- (a) C.E.: $[1, +\infty)$; la funzione è crescente perché crescenti sono le funzioni elementari che la compongono: il polinomio $x - 1$, la radice, l'esponenziale.
- (b) C.E.: $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$; la funzione $f(x) = x^2 - 2x$ ha per grafico una parabola con la concavità rivolta verso l'alto; l'intervallo rimosso $(0, 2)$ corrisponde ai punti della parabola con concavità negativa. In $(-\infty, 0]$ la parabola decresce, in $[2, +\infty)$ cresce; poiché la funzione radice è crescente, conserva gli intervalli di crescita e decrescenza. In conclusione, la funzione data è decrescente in $(-\infty, 0]$, crescente in $[2, +\infty)$.
- (c) C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione $1 + x^2$ è decrescente per $x \leq 0$, crescente per $x \geq 0$; per la funzione $\frac{1}{1+x^2}$ gli intervalli di monotonia si invertono, mentre si conservano per la funzione logaritmo naturale (che è crescente). In conclusione, la funzione data è crescente in $(-\infty, 0]$ decrescente in $[0, +\infty)$.
- (d) C.E.: $\mathbb{R}$. I valori della funzione $\frac{x}{1+x^2}$ variano tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$; in particolare assume il valore massimo $\frac{1}{2}$ per $x = 1$, il valore minimo $-\frac{1}{2}$ per $x = -1$.



La funzione risulta decrescente in $(-\infty, -1]$ e in $[1, +\infty)$, crescente in $[-1, 1]$. Poiché nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ la *funzione seno* è crescente, conserva gli intervalli di monotonia.

- (e) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. In ogni intervallo $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ la *funzione tangente* è crescente; poiché è negativa in $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$, positiva in $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ quando viene elevata al quadrato diventa decrescente nel primo intervallo, mentre rimane crescente nel secondo.
- (f) C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione $-x^2 + x + 2$ (il cui grafico è una parabola con la concavità rivolta verso il basso) è crescente in $(-\infty, \frac{1}{2}]$, decrescente in $[\frac{1}{2}, +\infty)$; la funzione x^3 (crescente) conserva gli intervalli di monotonia.
- (g) C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione $x^2 + 2x - 1$ (il cui grafico è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto) è decrescente in $(-\infty, -1]$, crescente in $[1, +\infty)$; la funzione $\sqrt[3]{x}$ (crescente) conserva gli intervalli di monotonia.
- (h) C.E.: $(-\infty, -\frac{1}{10}] \cup [\frac{1}{10}, +\infty)$ (dobbiamo imporre $x \neq 0$ per dare significato al logaritmo e $\log_{10} |x| \geq -1$ per dare significato alla radice; per lo studio di questa disequazione rimando al capitolo sulle funzioni logaritmiche). La funzione (pari) $\log_{10} |x|$ è decrescente in $(-\infty, -\frac{1}{10}]$, crescente in $[\frac{1}{10}, +\infty)$; tale risulta anche la funzione data.
- (i) C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione al denominatore ha per grafico una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice in $(1, \frac{2}{\pi})$; l'argomento del coseno è dunque compreso in $(0, \frac{\pi}{2}]$ ed è crescente per $x \leq 1$, decrescente per $x \geq 1$. Poiché nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2}]$ la *funzione coseno* è decrescente, gli intervalli di monotonia si invertono.
- (l) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Il grafico della funzione è un'iperbole equilatera traslata, di centro $(2, 1)$; la funzione è decrescente per $x < 2$ e per $x > 2$, ma non nel suo dominio.
- (m) C.E.: $[-1, 1]$. La funzione $f(x)$ al denominatore ha per grafico la semicirconferenza superiore di centro $(0, 1)$ e raggio 1, con diametro parallelo all'asse delle x ; è crescente in $[-1, 0]$, decrescente in $[0, 1]$. per la funzione data $\frac{1}{f(x)}$ gli intervalli di monotonia si invertono.

- (n) C.E.: $[-1, 1]$. L'intervallo si trova imponendo che l'argomento della radice sia positivo; poiché la radice si mantiene minore o uguale a 1, l'argomento del logaritmo è maggiore di 0). L'argomento del logaritmo ha per grafico la semicirconferenza inferiore di centro $(0, \frac{3}{2})$ e raggio 1, con diametro parallelo all'asse delle x : è decrescente in $[-1, 1]$, crescente in $[0, 1]$. Poiché il logaritmo naturale è crescente, conserva gli intervalli di monotonia.

(3.15)

- (a) Per ipotesi $f(-x) = f(x)$; qualunque sia la funzione $g(x)$ si ha $g(f(-x)) = g(f(x))$.
- (b) Poiché f è dispari $f(-x) = -f(x)$ e dunque $g(f(-x)) = g(-f(x))$; essendo g pari quest'ultimo termine si può riscrivere come $g(f(x))$.
- (c) Poiché f è dispari, $f(-x) = -f(x)$ e dunque $g(f(-x)) = g(-f(x))$; essendo g dispari quest'ultimo termine si può riscrivere come $-g(f(x))$.
- (d) Per ipotesi esiste $T > 0$ tale che $f(x + T) = f(x)$ e dunque $g(f(x + T)) = g(f(x))$, qualunque sia la funzione $g(x)$.

(3.16)

- (a) Scegliamo ad esempio $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2$; la funzione $g(x)$ è pari, mentre la funzione composta $(g \circ f)(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$ non lo è.
- (b) Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin x$, $g(x)$ è periodica, mentre $(g \circ f)(x) = \sin x^2$ non lo è.
- (c) Se $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$, $f(x)$ ha periodo 2π , mentre $(g \circ f)(x) = \sin^2 x$ ha periodo π .

(3.17) Il procedimento da seguire è quello spiegato nel capitolo 3: si scrive l'equazione $f(x) = \alpha$ nell'incognita x e si cerca di risolverla; se ammette una ed una sola soluzione, il valore trovato rappresenta $f^{-1}(\alpha)$. Per la risoluzione delle varie equazioni rimandiamo ai capitoli specifici.

- (a) $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Non è invertibile. Dal punto di vista grafico questo risultato è ovvio, trattandosi di una parabola con asse verticale; dal punto di vista algebrico ritroviamo il risultato quando, studiando l'equazione $f(x) = \alpha$, otteniamo due soluzioni: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17+4\alpha}}{2}$.
- (c) $f^{-1}(x) = \frac{-3 + \sqrt{17+4\alpha}}{2}$, $x \in [-\frac{17}{4}, +\infty)$; infatti, tenendo conto della limitazione per x , è accettabile solo una delle due soluzioni trovate in (b).
- (d) $f^{-1}(x) = \frac{-3 - \sqrt{17+4\alpha}}{2}$, $x \in [-\frac{17}{4}, +\infty)$.
- (e) $f^{-1}(x) = 1 + e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- (f) $f^{-1}(x) = \frac{4x}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- (g) $f^{-1}(x) = \frac{x^2+6}{2}$, $x \in [0, +\infty)$. Per quanto riguarda il denominatore della funzione inversa, si osservi che l'equazione $\sqrt{2x-6} = \alpha$ ha soluzione solo se $\alpha \geq 0$.
- (h) $f^{-1}(x) = \frac{e^x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Per trovare facilmente questo risultato, basta osservare che la funzione data può essere riscritta come $\log(2x)$, utilizzando le proprietà dei logaritmi.

(i) $f^{-1}(x) = (\log_{10} x)^3, x \in (0, +\infty).$

(l) $f^{-1} = \frac{1 + \log_2 x}{1 - \log_2 x}, x \in (0, +\infty) \setminus \{2\}.$

(m) $f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}, x \in \mathbb{R}.$

(n) $f^{-1}(x) = -\sqrt{4 - x^2}, x \in [0, 2].$

Infatti l'equazione $\sqrt{4 - x^2} = \alpha$ ha soluzione solo se $\alpha \geq 0$; elevando al quadrato ambo i membri dell'equazione (si può fare perché sono di segno concorde) e isolando il termine x^2 , si ottiene $x^2 = 4 - \alpha^2$; a sua volta questa ha soluzione solo se $4 - \alpha^2 \geq 0$, cioè (tenendo conto anche della precedente condizione) solo se $\alpha \in [0, 2]$. Delle due soluzioni $x_{1,2} = x \pm \sqrt{4 - x^2}$ che si trovano, è accettabile solo quella negativa, dato che deve essere $x \in [-2, 0]$.

(3.18) Per la risoluzione delle varie equazioni o disequazioni rimandiamo ai capitoli specifici.

(a) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

(b) C.E.: $\mathbb{R}$

(c) C.E.: $\mathbb{R}$

(d) C.E.: $\mathbb{R}$

(e) C.E.: $\mathbb{R}$

(f) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(g) C.E.: $\mathbb{R}$

(h) C.E.: $(-\infty, \frac{1}{3})$

(i) C.E.: $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

(l) C.E.: $(1, +\infty)$

(m) C.E.: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

(n) C.E.: $\mathbb{R}$

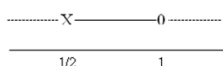
(o) C.E.: $(-1, 3]$

(p) C.E.: $[2, +\infty)$

(q) C.E.: $(-\frac{1}{2}, +\infty) \setminus \{0\}$

(r) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

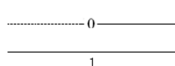
(a)



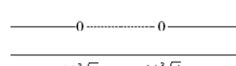
(b)



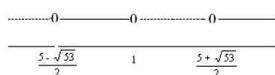
(c)



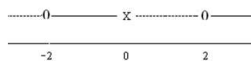
(d)



(e)



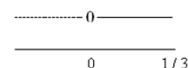
(f)



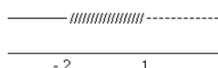
(g)



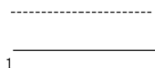
(h)



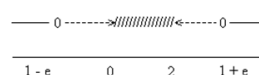
(i)



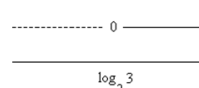
(l)



(m)



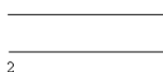
(n)



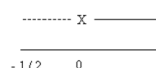
(o) C.E.: $(-1, 3]$



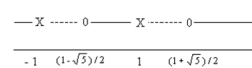
(p) C.E.: $[2, +\infty)$



(q) C.E.: $(-\frac{1}{2}, +\infty) \setminus \{0\}$



(r) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$



POLINOMI

(4.1)

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & P(x) + Q(x) = x^3 + x^2 + 5x & P(x) - Q(x) &= -x^3 + x^2 + 3x \\
 & P(x)Q(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 + 4x^2 & P(Q(x)) &= (x^3 + x)^2 + 4(x^3 + x) = x^6 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x \\
 (b) \quad & P(x) + Q(x) = x^4 + x & P(x) - Q(x) &= x^4 - x + 2 \\
 & P(x)Q(x) = x^5 - x^4 + x - 1 & P(Q(x)) &= (x - 1)^4 + 1 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2
 \end{aligned}$$

(4.2) Possibili esempi sono:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & P(x) = x^3, \quad Q(x) = x^3 & (b) \quad & P(x) = x^3 \quad P(x) = -x^3 + x^2 \\
 (c) \quad & P(x) = x^3, \quad Q(x) = x^3 + x & (d) \quad & P(x) = x^3, \quad Q(x) = -x^3 + 1
 \end{aligned}$$

(4.3) Partiamo dall'eguaglianza $(A + B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$, ottenuta dal triangolo di Tartaglia.

- (a) Per ottenere il termine $a^4b^2c^6$, a^2b , deve essere elevato al quadrato, c^2 alla terza. Nello sviluppo sopra riportato, il termine A^2B^3 è moltiplicato per 10; tenendo conto del fatto che il coefficiente -2 viene elevato al cubo, in definitiva il coefficiente richiesto è $10(-2)^3 = -80$.
- (b) Il termine $a^8b^4c^2$ si ottiene elevando a^2b alla quarta e lasciando invariato c^2 . Il coefficiente richiesto è $5(-2) = -10$.
- (c) Per ottenere a^2bc^4 si deve lasciare invariato a^2b ed elevare al quadrato c^2 ; poiché il termine AB^2 non compare nello sviluppo generale, di conseguenza a^2bc^4 non compare in quello preso in considerazione.

Partiamo dall'uguaglianza $(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$, ottenuta dal triangolo di Tartaglia.

- (d) Per ottenere il termine $\frac{a^3b^2}{c^2}$, $\frac{a}{c}$ deve essere elevato alla terza, cb^2 deve essere lasciato inalterato. Nello sviluppo sopra riportato, il termine A^3B è moltiplicato per 4 e questo è anche il coefficiente richiesto.
- (e) Il termine ac^3b^6 non si può ottenere nello sviluppo; infatti, data la presenza di a , $\frac{a}{c}$ dovrebbe essere lasciato invariato, mentre, data la presenza di b^6 , il termine cb^2 dovrebbe essere elevato alla terza; così facendo però si ottiene ac^2b^6 .
- (f) per ottenere a^2b^4 si deve elevare al quadrato entrambi i termini; il coefficiente richiesto è dunque 6.

(4.4) Indichiamo con $S(x)$ il quoziente e con $R(x)$ il resto.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & S(x) = x^2 + 2x - 15; & R(x) &= 10x & (b) \quad & S(x) = x + 4; & R(x) &= -2x + 20 \\
 (c) \quad & S(x) = x^2 + 2; & R(x) &= -x + 4 & (d) \quad & S(x) = 2; & R(x) &= -2x + 1 \\
 (e) \quad & S(x) = x^2 + ax + a(a - 1); & R(x) &= a^3 & (f) \quad & S(x) = x^2; & R(x) &= a^4
 \end{aligned}$$

(4.5) In tutti i casi, per il principio di identità dei polinomi occorre uguagliare i coefficienti di termini dello stesso ordine:

$$(a) \quad \begin{cases} a + c = 0 \\ -a + b - 2c = 1 \\ c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ a = -1 \\ b = 1 + a + 2c = 2 \end{cases}.$$

$$(b) \begin{cases} a + b + c = 1 \\ -a + b + d = 0 \\ a + b - c = 0 \\ -a + b - d = 0 \end{cases}.$$

Sottraiamo membro a membro la quarta equazione dalla seconda, ottenendo $d = 0$. Sostituiamo il valore $d = 0$ nella seconda equazione, deducendo $a = b$. Infine sostituiamo b con a nella prima e terza equazione; nel sistema

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2a - c = 0 \end{cases}$$

che si ottiene, sommiamo membro a membro deducendo $a = b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = 0$.

$$(c) \begin{cases} a + c + d = 0 \\ -a + b - d + e = 0 \\ a - b + c - e = 0 \\ -a + b = 1 \\ -b = 1 \end{cases}$$

Dalle ultime due equazioni si ottiene subito $b = -1$, $a = -2$. Sostituendo nelle rimanenti equazioni, si deduce il sistema:

$$\begin{cases} c + d = 2 \\ e - d = -1 \\ c - e = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2 - d \\ e = -1 + d \\ 2 - d + 1 - d = 1 \end{cases} \begin{cases} d = 1 \\ c = 1 \\ e = 0 \end{cases}$$

(4.6) Nei casi (c) e (d) si procede come spiegato nel capitolo 4, eseguendo la divisione dei due polinomi. Nei primi due casi, dove il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore, più semplicemente si può manipolare algebricamente la funzione in modo da far comparire al numeratore la stessa espressione che compare al denominatore:

$$(a) \frac{x^4 + 1}{x^4 + x} = \frac{(x^4 + x) + (1 - x)}{x^4 + x} = 1 + \frac{1 - x}{x^4 + x}.$$

$$(b) \frac{x^4 + 2x^3}{x^4 + 2x + 4} = \frac{(x^4 + 2x + 4) + (2x^3 - 2x - 4)}{x^4 + 2x + 4} = 1 + \frac{2x^3 - 2x - 4}{x^4 + 2x + 4}.$$

(c) Nella divisione di $P(x) = x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x - 15$ per $Q(x) = x^2 + 1$ si ottiene come quoziente $S(x) = x^2 + 2x - 15$ e come resto 0. La funzione razionale si riduce dunque al polinomio $S(x)$.

(d) Dividendo $P(x) = x^3 - x^2 - 5x$ per $Q(x) = x - 5$ si ottiene il quoziente $S(x) = x^2 + 4x + 15$ e il resto 75. La funzione razionale si può dunque scrivere nella forma $x^2 + 4x + 15 + \frac{75}{x - 5}$.

(4.7) Per il teorema di Ruffini occorre verificare se $P(2) = 0$ oppure $P(\frac{1}{2}) = 0$; per quanto riguarda la divisibilità per $x^2 - 4$, $P(x)$ deve essere divisibile sia per $x - 2$ che per $x + 2$, quindi deve essere $P(2) = P(-2) = 0$.

(a) $P(2) = P(\frac{1}{2}) = 0$, $P(-2) \neq 0$; $P(x)$ è divisibile per $x - 2$ e per $x - \frac{1}{2}$, ma non per $x^2 - 4$.

(b) $P(2) = P(-2) = 0$, $P(\frac{1}{2}) \neq 0$; $P(x)$ è divisibile per $x - 2$ e per $x^2 - 4$, ma non per $x - \frac{1}{2}$.

(c) $P(2) = P(\frac{1}{2}) = 0$, $P(-2) \neq 0$; $P(x)$ è divisibile per $x - 2$ e per $x - \frac{1}{2}$, ma non per $x^2 - 4$.

(4.8) Indichiamo con $S(x)$ il quoziente, con $R(x)$ il resto.

- | | | |
|-----|--|---------------|
| (a) | $S(x) = x^2 + 2x + 7$ | $R(x) = 15$ |
| (b) | $S(x) = 2x^4 + 1$ | $R(x) = 0$ |
| (c) | $S(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ | $R(x) = 0$ |
| (d) | $S(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ | $R(x) = 0$ |
| (e) | $S(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ | $R(x) = 0$ |
| (f) | $S(x) = x^3 + ax^2 + 2a^2x + 2a^3$ | $R(x) = 3a^4$ |
| (g) | $S(x) = x^2 - ax$ | $R(x) = 0$ |
| (h) | $S(x) = a^3x^2 + a^2bx + ab(b+1)$ | $R(x) = b^2$ |

(4.9) Quelle che seguono sono possibili soluzioni.

- (a) $P(x) = x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = x^5 - 5x^3 + 4x$.
- (b) Una delle radici deve essere doppia, come in $x^2(x-1)(x+1)(x-2) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2$.
- (c) $P(x) = x(x-1)(x+1)(x^2+1) = x^5 - x$
- (d) Una delle radici non deve essere semplice. Infatti, per ipotesi $P(x) = (x-c_1)(x-c_2)Q(x)$ con grado $Q(x) = 3$; poiché $Q(x)$ è di grado dispari, deve avere almeno una radice reale. Poiché non è possibile introdurre una nuova radice reale, questa deve necessariamente coincidere con c_1 o con c_2 . Si hanno tre possibilità, esemplificate da $x^2(x-1)(x^2+1)$, $x^3(x-1)^2$, $x^4(x-1)$.
- (e) $P(x) = x(x^4+1)$; per convincersi che $Q(x) = x^4+1$ non ha radici reali cioè non si annulla per nessun valore di x , basta osservare che è $Q(x) \geq 1$ per ogni x .

(4.10) Quelle che seguono sono possibili soluzioni.

- (a) Non esiste un polinomio con queste proprietà. Infatti, per ipotesi è $P(x) = (x-c_1)^2(x-c_2)Q(x)$, con $Q(x)$ privo di radici reali; questo è assurdo, perché essendo $\deg Q(x) = 1$, necessariamente $Q(x)$ deve avere una radice reale.
- (b) $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$.
- (c) Una di queste radici deve essere doppia. Infatti per ipotesi $P(x) = (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)Q(x)$, con $\deg Q(x) = 1$. $Q(x)$ ha una radice reale e, poiché non se ne possono introdurre di nuove, deve coincidere con una già considerata. Ad esempio, $x^4(x-1)(x+1) = x^4 - x^2$.
- (d) $P(x) = x^4 + 1$.

(4.11)

- (a) Per questo polinomio a coefficienti interi le eventuali radici razionali sono $\pm 1, \pm 2$. Un controllo diretto porta a concludere che $x = 1$ e $x = 2$ sono radici. Dividendo il polinomio dato per $x-1$ si trova (con la regola di Ruffini) il quoziente $Q_1(x) = x^3 - 2x + x - 2$. Dividendo a sua volta $Q_1(x)$ per $x-2$, si ottiene il quoziente $Q_2(x) = x^2 + 1$. In definitiva $P(x) = (x-1)(x-2)(x^2+1)$.
- (b) Eventuali radici razionali sono $\pm 1, \pm 2, \pm 4$; radici effettive sono $x = 1$ e $x = 2$. Procedendo come nel caso precedente, il quoziente nella divisione per $x-1$ è $Q_1(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$; quello nella divisione di $Q_1(x)$ per $x-2$ è $Q_2(x) = x^2 - 3x + 2$. Poiché il discriminante di $Q_2(x)$ è positivo, il polinomio è ulteriormente riducibile. Una sua radice è $x = 1$ e risulta $Q_2(x) = (x-1)(x-2)$. In definitiva si ottiene $P(x) = (x-1)^2(x-2)^2$.
- (c) Il polinomio ha come radici razionali $x = 1, x = \frac{1}{2}, x = \frac{2}{3}$; con tre successive divisioni per $x-1, x-\frac{1}{2}, x-\frac{2}{3}$, si ottiene $P(x) = 6(x-1)^2(x-\frac{1}{2})(x-\frac{2}{3})$.
- (d) $P(x) = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$.

- (e) Ponendo $t = x^2$, si ottiene il polinomio $t^2 - 3t - 4$ che ha per radici $t = -1$ e $t = 4$. Questo polinomio si scompone in $(t+1)(t-4)$; ritornando alla variabile x , si trova per $P(x)$ la scomposizione $(x^2+1)(x^4-4) = (x^2+1)(x-2)(x+2)$.
- (f) $P(x) = x^2(x+3)$.
- (g) Ponendo $t = x^4$, si ottiene il polinomio $t^2 - 17t + 16$, che si scompone in $(t-1)(t-16)$. Ritornando alla variabile x , $P(x) = (x^4-1)(x^4-16) = (x^2-1)(x^2-4)(x^2+1)(x^2+4) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x^2+1)(x^2+4)$.
- (h) $P(x) = (4x^2-9)(4x^2+9) = (2x-3)(2x+3)(4x^2+9) = 16 \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right) \left(x^2 + \frac{9}{4}\right)$
- (i) $P(x) = (x^3-1)(x^3+1) = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.
- (l) Ponendo $t = x^2$, si ottiene il polinomio $t^2 - (a^2-1)t - a^2$; questo ammette $t = -1$ come radice, il che porta alla scomposizione nella forma $(t+1)(t-a^2)$. Ritornando alla variabile x , $P(x) = (x^2+1)(x^2-a^2) = (x-a)(x+a)(x^2+1)$.
- (m) $(x-a)(x^3-3x^2+x-3) = (x-a)(x-3)(x^2+1)$.
- (n) $P(x) = (x-a)(x^3-ax^2+a^2x-a^3) = (x-a)^2(x^2+a^2)$.

EQUAZIONI, DISEQUAZIONI, SISTEMI

(5.1) Per prima cosa si osservi che l'equazione è definita per $x \neq 1$ ed ha per soluzione $x = 3$.

- (a) È equivalente
- (b) È equivalente, anche se la funzione che abbiamo aggiunto non è definita per $x = 0$; questo perché $x = 0$ non è soluzione.
- (c) Non è equivalente: la funzione che abbiamo aggiunto non è definita per $x = 3$ che è proprio la soluzione.
- (d) È equivalente: anche se abbiamo moltiplicato per una funzione che si annulla in un punto, dato che questo punto non appartiene al campo di esistenza delle due equazioni.
- (e) Non è equivalente, perché l'equazione ottenuta non contiene soltanto quella data, ma anche l'equazione $\frac{x+1}{x-1} = -2$ (che ha per soluzione $x = -\frac{1}{3}$).
- (f) È equivalente, dato che abbiamo diviso per una funzione che non si annulla.

(5.2)

- (a) È sempre equivalente.
- (b) Solo se $x = 0$ non è soluzione dell'equazione data.
- (c) Solo se $x = 1$ è soluzione dell'equazione data.
- (d) Solo se $x = 1$ e $x = -1$ non sono soluzioni dell'equazione data.
- (e) È sempre equivalente.
- (f) Solo se l'equazione data non ha soluzioni diverse da $x = 0$.

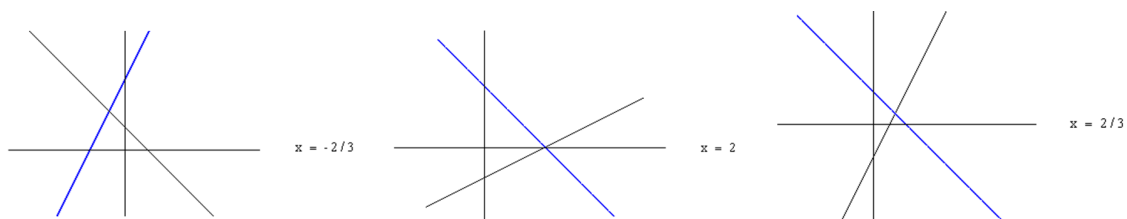
(5.3) La disequazione è definita per $x \neq 1$ ed è verificata per $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

- (a) Non è equivalente (non si confonda con $\frac{x+1}{x-1} - 2 < 0$).
- (b) Non è equivalente (non si confonda con $\frac{1}{2} \frac{x+1}{x-1} < 1$).
- (c) Non è equivalente (equivale a $\frac{x+1}{x-1} > 2$).
- (d) Non è equivalente (equivale a $-2 < \frac{x+1}{x-1} < 2$).
- (e) È equivalente.
- (f) Non è equivalente (nell'insieme delle soluzioni dell'equazione data la funzione per cui si è moltiplicato non ha segno costante positivo).

(5.4)

- (a) Non è equivalente (a parte il caso banale $g(x) = 0$, per ogni x): non si confonda con $f - g < 0$.
- (b) Non è equivalente.
- (c) Non è equivalente (equivale a $f(x) > g(x)$).
- (d) Solo se nell'insieme di soluzione risulta $x > 1$ (infatti equivale a $(x-1)[f(x) - g(x)] < 0$).
- (e) È equivalente.
- (f) Solo se nell'insieme di soluzione risulta $g(x) > 0$.
- (g) Solo se nell'insieme di soluzione risulta anche $f(x) + g(x) > 0$ (infatti la disequazione equivale a scrivere $f^2(x) - g^2(x) < 0$, cioè $[f(x) - g(x)][f(x) + g(x)] < 0$).
- (h) Solo se nell'insieme delle soluzioni è $g(x) > 0$.

(5.5)



(5.6)

- (a) Per $k = 0$ e $h = 1$ è indeterminata; per $k = 0$ e $h \neq 1$ è impossibile; per $k \neq 0$: $x = \frac{h-1}{k}$.
- (b) Per $k = 1$ e $h = \pm 1$ è indeterminata; per $k = 1$ e $h \neq \pm 1$ è impossibile; per $k \neq 1$: $x = -\frac{h^2-1}{k-1}$.
- (c) Per $k = 0$ non ha senso; per $k = \pm 1$ e $h = 0$ è indeterminata; per $k = \pm 1$ e $h \neq 0$ è impossibile; per $k \neq \pm 1$ e $k \neq 0$ ha come unica soluzione $x = -\frac{hk}{k^2-1}$.

(5.7) Per l'interpretazione geometrica, si vedano le figure di **(5.5)**

- (a) $x \geq -\frac{2}{3}$ (b) $x > 2$ (c) $x \geq \frac{2}{3}$

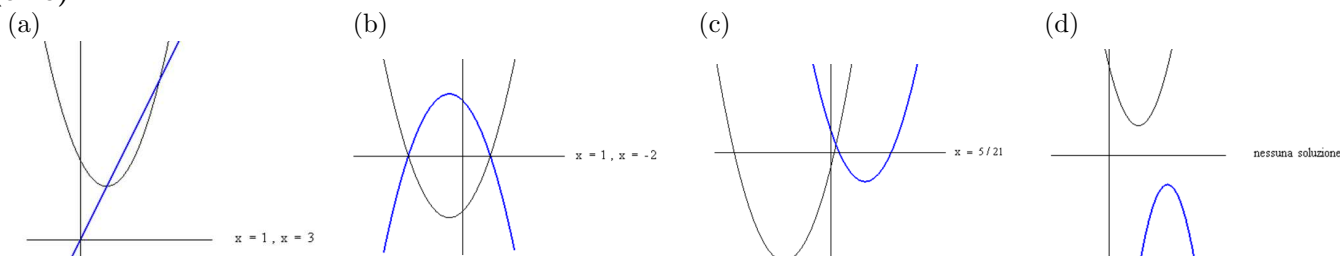
(5.8)

- (a) Per $k = 0$ è impossibile; per $k > 0$: $x \geq \frac{1}{k}$; per $k < 0$: $x \leq \frac{1}{k}$.
- (b) Per $k > 1$ oppure $k < 0$: $x < \frac{1}{k-1}$; per $0 < k < 1$: $x > \frac{1}{k-1}$; per $k = 0$ è impossibile; per $k = 1$ è sempre verificata.
- (c) Per $k > 1$: $x \leq \frac{h-1}{k-1}$; per $k < 1$: $x \geq \frac{h-1}{k-1}$; per $k = 1$ e $h \geq 1$ è indeterminata; per $k = 1$ e $h < 1$ è impossibile.
- (d) Per h e k non contemporaneamente nulli $x > \frac{hk}{h^2+k^2}$; per $h = k = 0$ è impossibile.

(5.9) Riscritta la disequazione nella forma $(a-c)x < (d-b)$, si ha:

$$\begin{array}{ll} \text{se } a < c & x > \frac{d-b}{a-c}; \\ \text{se } a > c & x < \frac{d-b}{a-c} \\ \text{se } a = c, b < d & \text{è sempre verificata;} \\ \text{se } a = c, b \geq d & \text{è impossibile} \end{array}$$

(5.10)



(5.11)

- (a) Per $k = 0$ l'equazione si abbassa di grado ed ha per soluzione $x = -1$. Per $k \neq 0$ risulta $\Delta = 1 - 4k$; dunque
- per $k > \frac{1}{4}$ nessuna soluzione
- per $k = \frac{1}{4}$ $x = -2$
- per $k < \frac{1}{4}$, $k \neq 0$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4k}}{2k}$
- (b) $\Delta = 5k^2$; dunque
- per $k = 0$ $x = 0$
- per $k \neq 0$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}k$
- (c) $\Delta = k^2 + 4k$; dunque
- per $k < -4$ oppure $k > 0$ $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4k}}{2}$
- per $-4 < k < 0$ nessuna soluzione
- per $k = 0$ $x = 0$
- per $k = -4$ $x = 2$
- (d) Per $k = 0$ l'equazione si abbassa di grado ed ha per soluzione $x = 0$. Per $k \neq 0$ risulta $\Delta = 1 - 4k^2$; dunque
- per $k > \frac{1}{2}$ oppure $k < -\frac{1}{2}$ nessuna soluzione
- per $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$, $k \neq 0$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4k^2}}{2k}$
- per $k = \frac{1}{2}$: $x = -1$
- per $k = -\frac{1}{2}$: $x = 1$

(5.12)

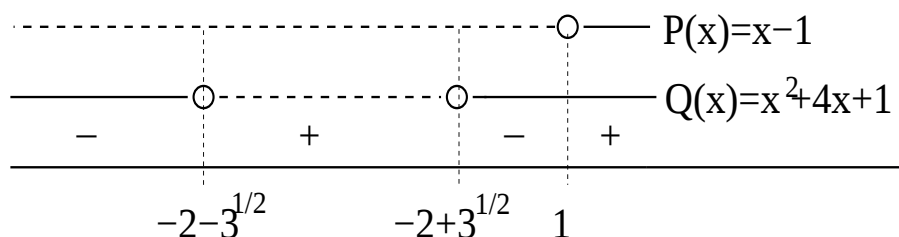
- (a) nessuna soluzione (b) $x = -1$ (c) $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
(d) $x \neq \frac{1}{2}$ (e) nessuna soluzione (f) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

(5.13)

- (a) Per $k \geq 0$ è sempre verificata; per $k < 0$: $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{-k}}, \frac{1}{\sqrt{-k}}\right]$.
(b) $x = k$.
(c) Il polinomio si annulla per $x = -1$ e per $x = k$ e la disequazione è verificata per i valori esterni all'intervallo delle radici. Dunque, se $k > -1$ deve essere $x \in (-\infty, -1) \cup (k, +\infty)$; se $k < -1$ risulta invece $x \in (-\infty, k) \cup (-1, +\infty)$; se $k = -1$ la disequazione diventa $(x+1)^2 > 0$ ed è verificata per $x \neq -1$.
(d) Se $k \neq 0$ il polinomio si annulla per $x = k$ e per $x = 2k$ ed è negativo per i valori interni all'intervallo delle radici. Dunque, se $k > 0$ deve essere $x \in (k, 2k)$, se $k < 0$: $x \in (2k, k)$. Se $k = 0$ la disequazione diventa $x^2 < 0$, che è impossibile.

(5.14)

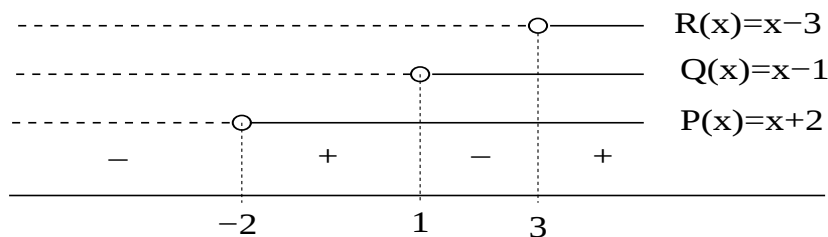
- (a) Posto $t = x^2$, l'equazione $4t^2 - 37t + 9 = 0$ è verificata per $\frac{1}{4}$ e per $t = 9$; deve dunque essere $x = \pm\frac{1}{2}$ oppure $x = \pm 3$.
(b) Posto $t = x^2$, la disequazione $4t^2 - 37t + 9 < 0$ è verificata per $\frac{1}{4} < t < 9$; deve dunque essere $\frac{1}{4} < x^2 < 9$ cioè $x \in (-3, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 3)$.
(c) Osservato che $x = 1$ è una soluzione, utilizzando il teorema di Ruffini possiamo scomporre il polinomio e riscrivere l'equazione nella forma $(x-1)(x^2+4x+1) = 0$; alla soluzione già nota si aggiungono le soluzioni $-2 \pm \sqrt{3}$.
(d) Tenendo conto di quanto trovato nel problema precedente possiamo riscrivere la disequazione nella forma $(x-1)(x^2+4x+1) \geq 0$; a questo punto occorre studiare il segno dei due fattori a primo membro e prendere gli intervalli in cui sono concordi. Possiamo sintetizzare i calcoli nella tabella successiva, in cui la linea continua indica intervalli di positività, quella tratteggiata intervalli di negatività:



La disequazione è dunque verificata per $x \in [-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}] \cup [1, +\infty)$.

- (e) Posto $t = x^2$, l'equazione $t^2 - 5t + 4 = 0$ è verificata per $t = 1$ e per $t = 4$; deve dunque essere $x = \pm 1$ oppure $x = \pm 2$.
(f) Per quanto visto in (e), i fattori $x^2 - 4$, $x^2 - 1$ devono avere lo stesso segno; questo accade se $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$.
(g) Applicando il teorema di Ruffini, possiamo scomporre il polinomio a primo membro e riscrivere l'equazione nella forma $(x+2)(x-1)(x-3)(x^2+2) = 0$; da questa si deducono le soluzioni $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$.

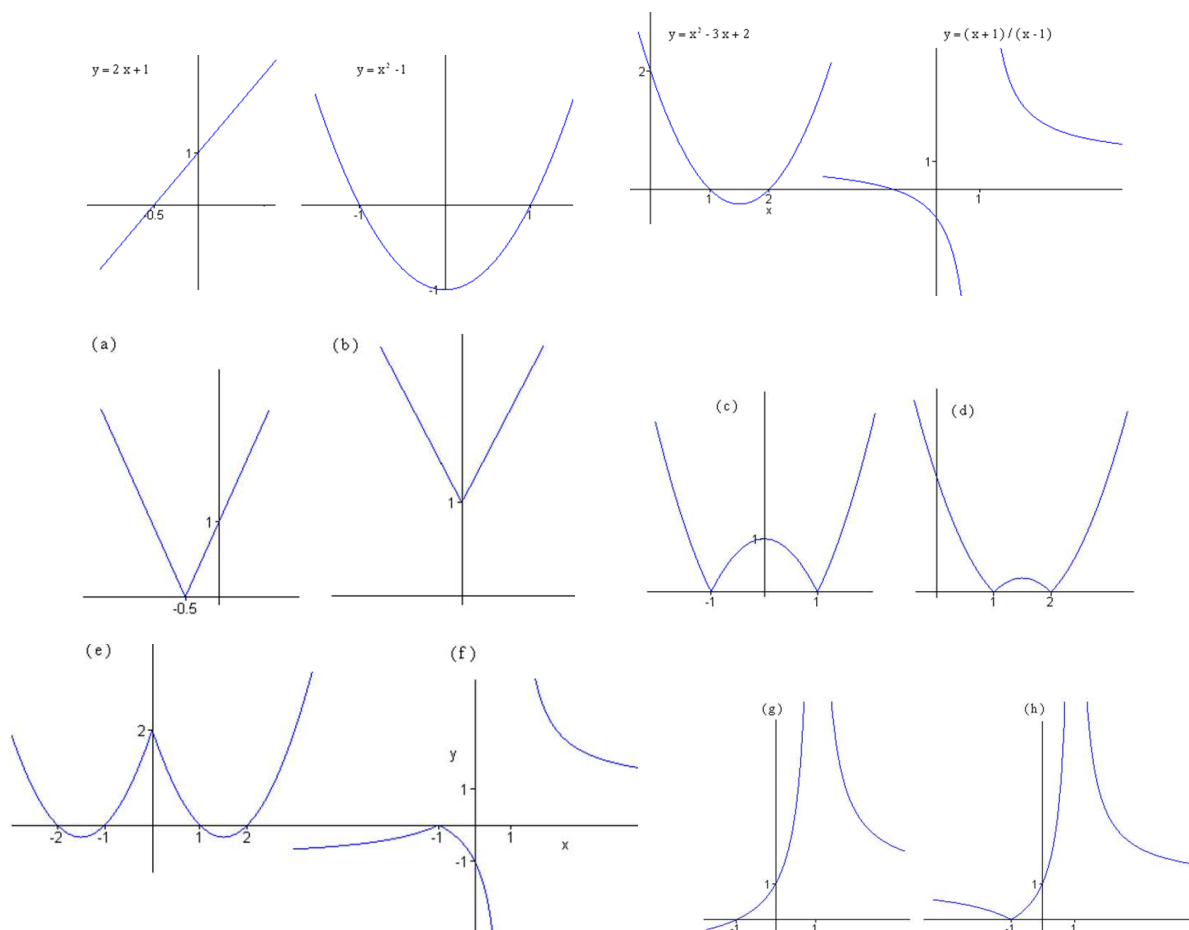
- (h) Tenendo conto di quanto trovato in (g), deve essere $(x+2)(x-1)(x-3)(x^2+2) \leq 0$ che si può semplificare in $(x+2)(x-1)(x-3) \leq 0$ (dividendo per il termine x^2+2 che è strettamente positivo)



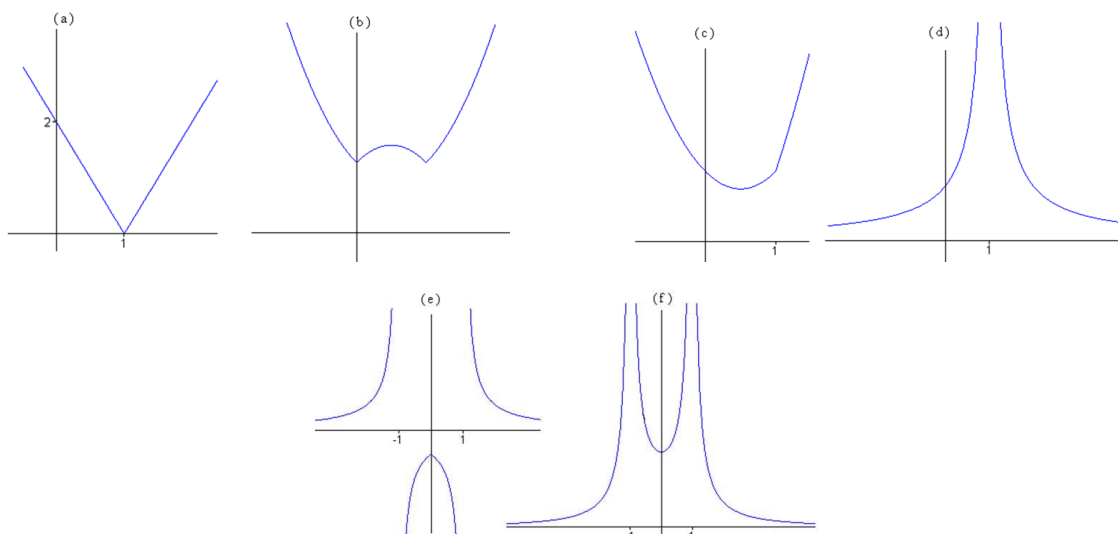
deve dunque essere $x \in (-\infty, -2] \cup [1, 3]$.

- (i) $x^7 - x = x(x^6 - 1) = x(x^3 - 1)(x^3 + 1) = x(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. I due polinomi di secondo grado sono positivi ($\Delta < 0$); basta dunque considerare il segno dei polinomi di primo grado. Procedendo come già illustrato, si trova $x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$.
- (l) $x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) \geq 0$ per $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(5.15)



(5.16)



(5.17)

(a) $x + 1 = \pm 2 \iff x = -3$ oppure $x = 1$

(b) $x = -2$

(c) impossibile

(d) $\begin{cases} x \geq 1 \\ 2 = 1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ 2x = 1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x \geq 1 \\ -2 = 1 \end{cases} \iff x = \frac{1}{2}$

(e) $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x^2 = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x < -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}$

Le soluzioni sono 0, 2, $-1 - \sqrt{3}$.

(f) $|x| = 2 \iff x = \pm 2$ (la soluzione $|x| = -1$ è evidentemente non accettabile)

(g) Posto $t = x^2$, si ottiene $|t - 1| - |t - 5| = 3$, cioè

$$\begin{cases} t \leq 1 \\ -4 = 3 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1 < t < 5 \\ 2t - 6 = 3 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} t \geq 5 \\ 4 = 3 \end{cases} \iff t = \frac{9}{2} \text{ e dunque } x_{1,2} = \pm 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(h) $\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - 37x^2 + 9 = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x < 0 \\ x^4 + 37x^2 + 9 = 0 \end{cases}$

Risolvendo le due equazioni in x^2 , si trova $x^2 = \frac{1}{4}$ oppure $x^2 = 9$ nel primo sistema, mentre nel secondo caso si trovano per x^2 valori negativi e dunque non accettabili. In conclusione $x = \frac{1}{2}$ oppure $x = 3$.

(i) $x^2 - 1 = x + 5$ oppure $x^2 - 1 = -x - 5 \iff x^2 - x - 6 = 0$ oppure $x^2 + x + 4 = 0$.

Le soluzioni sono $x = -2$ oppure $x = 3$.

(l) $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x < -1 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases}$

Le soluzioni sono $x_{1,2} = \pm \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

$$(m) \left\{ \begin{array}{l} x+2 \geq 0 \\ x^2-1 = x+2 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x+2 \geq 0 \\ x^2-1 = -x-2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x+2 \geq 0 \\ x^2-x-3 = 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x+2 \geq 0 \\ x^2+x+1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Le soluzioni sono } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(n) 2-x = x-1 \text{ oppure } 2-x = 1-x \iff x = \frac{3}{2}.$$

(5.18)

(a) Posto $t = |x|$, la disequazione diventa $t^2 - t - 2 < 0$, che è risolta per $t \in (-1, 2)$. Deve dunque essere $-1 < |x| < 2$, cioè $-2 < x < 2$.

(b) Deve essere $x^2 - x \geq 1$ oppure $x^2 - x \leq -1$, cioè $x^2 - x - 1 \geq 0$ oppure $x^2 - x + 1 \leq 0$. In conclusione $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

(c) $x+1 \geq x^2$ oppure $x+1 \leq -x^2 \iff x^2 - x - 1 \leq 0$ oppure $x^2 + x + 1 \leq 0$.

$$\text{In conclusione } x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

$$(d) x^2 - 4 < 0 \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 \geq 0 \\ x-1 > x^2 - 4 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 \geq 0 \\ x-1 < 4 - x^2 \end{array} \right. \iff$$

$$x^2 - 4 < 0 \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - x - 3 < 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 + x - 5 < 0 \end{array} \right. \iff$$

$$x \in (-2, 2) \text{ oppure } x \in \left[2, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \text{ oppure } x \in \left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, -2\right] \iff$$

$$x \in \left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right).$$

$$(e) \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 \geq 0 \\ 4 - x^2 \leq x+1 \leq x^2 - 4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 + x - 3 \geq 0 \\ x^2 - x - 5 \geq 0 \end{array} \right. \iff$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right).$$

$$(f) \left\{ \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ 1-x \leq 2x-1 \leq x-1 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x-1 < 0 \\ x-1 \leq 2x-1 \leq 1-x \end{array} \right. \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ 1-x \leq 2x-1 \\ 2x-1 \leq x-1 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x-1 < 0 \\ x-1 \leq 2x-1 \\ 2x-1 \leq 1-x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \geq \frac{2}{3} \\ x \leq 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ x \geq 0 \\ x \leq \frac{2}{3} \end{array} \right. \iff$$

$$0 \leq x \leq \frac{2}{3}.$$

$$(g) \left\{ \begin{array}{l} x-2 \geq 0 \\ x^2-1 \leq x-2 \\ x^2-1 \geq 2-x \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x-2 < 0 \\ x^2-1 \geq x-2 \\ x^2-1 \leq 2-x \end{array} \right. \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x^2-x+1 \leq 0 \\ x^2+x-3 \geq 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x-2 < 0 \\ x^2-x+1 \geq 0 \\ x^2+x-3 \leq 0 \end{array} \right. \iff x \in \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$$

$$(h) \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-x < x+1 \\ 2-x > -x-1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x+1 < 0 \\ 2-x < -x-1 \\ 2-x > x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x > 1 \\ 2 > -1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x+1 < 0 \\ 2 < -1 \\ 2x < 1 \end{cases}$$

$$x \in (\frac{1}{2}, +\infty).$$

$$(i) \begin{cases} x-k \geq 0 \\ x \leq x-k \\ x \geq -x+k \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x-k < 0 \\ x \leq k-x \\ x \geq -k+x \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq k \\ k \leq 0 \\ x \geq \frac{k}{2} \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < k \\ x \leq \frac{k}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Se $k < 0$: $x \in [\frac{k}{2}, +\infty)$; $k > 0$: $x \in (-\infty, \frac{k}{2}]$; se $k = 0$: $x \in \mathbb{R}$.

$$(l) x^2 - k \geq x^2 \text{ oppure } x^2 - k \leq -x^2. \text{ Se } k \leq 0: x \in \mathbb{R}; \text{ se } k > 0: x \in \left(-\sqrt{\frac{k}{2}}, \sqrt{\frac{k}{2}}\right).$$

$$(m) \begin{cases} x \geq 4 \\ \frac{x-1}{x+4} \geq \frac{x-4}{x-2} \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} 1 \leq x < 4 \\ \frac{x-1}{x+4} \geq \frac{4-x}{x-2} \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < 1 \\ \frac{1-x}{x+4} \geq \frac{4-x}{x-2} \end{cases}$$

Togliendo i denominatori, si ottengono cinque sistemi:

$$\begin{aligned} (i) \quad & x \geq 4 & (x-1)(x-2) & \geq (x-4)(x+4) \\ (ii) \quad & 2 < x < 4 & (x-1)(x-2) & \geq (4-x)(x+4) \\ (iii) \quad & 1 \leq x < 2 & (x-1)(x-2) & \leq (x-4)(x+4) \\ (iv) \quad & -4 < x < 1 & (1-x)(x-2) & \leq (4-x)(x+4) \\ (v) \quad & x < -4 & (1-x)(x-2) & \geq (4-x)(x+4) \end{aligned}$$

Le soluzioni sono, rispettivamente:

$$\begin{aligned} (i) \quad & x \in [4, 6] \\ (ii) \quad & x \in [\frac{7}{2}, 4) \\ (iii) \quad & x \in [1, 2) \\ (iv) \quad & x \in (-4, 1) \\ (v) \quad & \text{nessuna soluzione.} \end{aligned}$$

Unendo gli insiemi di soluzione, si trova $x \in (-4, 2) \cup [\frac{7}{2}, 6]$.

$$(n) |(x-3)(x+2)| \geq 5|x+2| \iff x = -2 \text{ oppure } |x-3| \geq 5 \iff x = -2 \text{ oppure } x-3 \geq 5 \text{ oppure } x-3 \leq -5 \iff x \in (-\infty, -2] \cup [8, +\infty).$$

(5.19)

$$(a) \frac{-16x-8}{6x+1} \geq 0 \iff x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$$

$$(b) \frac{-x-2}{x-1} > 0 \iff x \in (-2, 1)$$

$$(c) x \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$$

$$(d) \begin{cases} x \neq 5 \\ |x-5| \geq 3-2x \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 5 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x-5 > 3-2x \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x-5 < 2x-3 \end{cases} \iff$$

$$x \in (-2, +\infty) \setminus \{5\}$$

$$(e) -\frac{1}{x} < 0 \iff x > 0$$

$$(f) \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{-x-2}{x-5} > 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < 0 \\ \frac{3x-2}{x-5} > 0 \end{cases} \iff x \in [0, 5) \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 5)$$

$$(g) \quad x^2 - 2x - 2 < 0 \iff x \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$$

$$(h) \quad \frac{5x-1}{x^2-1} \geq 0 \iff x \in (-1, \frac{1}{5}] \cup (1, +\infty).$$

$$(i) \quad \begin{cases} x > 0 \\ 0 \geq x \\ x \neq 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < 0 \\ \frac{-2x(x+1)}{x-1} \geq x \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x = 0 \\ 0 \geq 0 \end{cases} \iff x = 0 \text{ oppure } \\ \begin{cases} x < 0 \\ -2x(x+1) \leq x(x-1) \end{cases} \iff x = 0 \text{ oppure } \begin{cases} x < 0 \\ 3x^2 + x \geq 0 \end{cases} \iff x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup \{0\}$$

$$(l) \quad \frac{5-8x}{2x-1} < \frac{1}{2x-2} \iff -\frac{(4x-3)^2}{(2x-1)(2x-2)} < 0 \iff x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$$

$$(m) \quad \frac{x}{(x-4)(x+4)} > \frac{x+1}{(x-4)(x+6)} \iff \frac{x-4}{(x-4)(x+4)(x+6)} > 0 \iff \\ x \in (-\infty, -6) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$$

$$(n) \quad \frac{(x^2-9)(x^2+4)}{x-5} > 0 \iff x \in (-3, 3) \cup (5, +\infty)$$

$$(o) \quad (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$(p) \quad -\frac{1}{x^2-1} > 0 \iff x \in (-1, 1)$$

$$(q) \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ |x^2-4| \geq 3x-2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ |x^2-4| \leq 3x-2 \end{cases}$$

Il secondo sistema è impossibile (essendo $3x-2 < 0$); il primo equivale a:

$$x \in (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \text{ oppure } \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x^2-4 \geq 3x-2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x^2-4 \leq 2-3x \end{cases}$$

$$\text{Terminando i calcoli, si trova } x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{33}-3}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$$

$$(r) \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3+x^2+1 \geq 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < 0 \\ x^3-x^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

Per $x \geq 0$ è $x^3+x^2+1 > 0$ (somma di quantità positive), per $x < 0$ è $x^3-x^2-1 < 0$ (somma di quantità negative). Dunque la disequazione è sempre verificata.

(s) In entrambi i rapporti numeratore e denominatore sono strettamente positivi e quindi la disequazione è sempre verificata.

(t) La disequazione può essere riscritta nella forma $\frac{x(x-k)}{x+1} \leq 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{Se } k \geq 0 & x \in (-\infty, -1) \cup [0, k] \\ \text{se } -1 < k < 0 & x \in (-\infty, -1) \cup [k, 0] \\ \text{se } k = -1 & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \\ \text{se } k < -1 & x \in (-\infty, k) \cup (-1, 0] \end{array}$$

(u) Distinguendo i casi $x > 0$ e $x < 0$, si ottiene come insieme di soluzioni $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$(v) \quad (-\infty, 0)$$

$$(w) \quad (-\infty, -1) \cup [0, +\infty).$$

(z) Per $x > 0$ la disequazione diventa $2 \leq k$, per $x < 0$ diventa $-2 \leq k$. Dunque:

$$\begin{array}{ll} \text{se } k \geq 2 & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{se } -2 \leq k < 2 & x \in (-\infty, 0) \\ \text{se } k < -2 & \text{la disequazione è impossibile.} \end{array}$$

(5.20) Se a e b sono di segno contrario, il risultato è immediato; in caso contrario, elevando al quadrato, si trova la disequazione equivalente

$$4a^2b^2 \leq \varepsilon^2 a^4 + \frac{b^4}{\varepsilon^2} + 2a^2b^2$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$\varepsilon^2 a^4 + \frac{b^4}{\varepsilon^2} - 2a^2b^2 \geq 0$$

cioè

$$\left(\varepsilon a^2 - \frac{b^2}{\varepsilon} \right)^2 \geq 0;$$

questa è banalmente vera.

(5.21) Riscritta la disequazione nella forma

$$a + b \geq 1 + ab$$

elevando al quadrato e semplificando, si trova successivamente

$$a^2 + b^2 \geq 1 + a^2b^2 \iff a^2 - 1 \geq (a^2 - 1)b^2.$$

Essendo $a^2 - 1 > 0$, la disequazione è equivalente a

$$b^2 \leq 1,$$

che è banalmente vera perché abbiamo supposto $0 \leq b \leq 1$.

(5.22) Possiamo riscrivere in modo equivalente, per ogni $x \geq 0$:

$$\frac{kx + 1}{x + 1} \geq \frac{1}{x^4 + 1}$$

o anche, per ogni $x \geq 0$,

$$\frac{x(1 - x^3)}{1 + x^4} \leq kx.$$

Per $x = 0$ la disequazione è vera per ogni valore di k ; occorre dunque che sia, per ogni $x > 0$

$$\frac{1 - x^3}{1 + x^4} \leq k.$$

Poiché il primo membro è minore di 1, k deve essere maggiore o uguale a 1. Facciamo vedere che 1 è il più piccolo valore che possiamo scegliere per k : occorre far vedere che, preso per k un valore minore di 1 (lo scriveremo nella forma $1 - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$) esiste per x un valore positivo tale che

$$\frac{1 - x^3}{1 + x^4} > 1 - \varepsilon$$

ovvero

$$\frac{x^3 + x^4}{1 + x^4} < \varepsilon.$$

Supponendo $x \in (0, 1)$, il primo membro è minore di $2x^3$ e questo a sua volta si mantiene minore di ε per $x < \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$. In conclusione, basterà prendere x arbitrariamente, purché positivo e minore sia di 1 che di $\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$, per provare l'asserto.

(5.23)

- (a) $(-\infty, \frac{10}{3}]$
- (b) nessuna soluzione
- (c) nessuna soluzione
- (d) $(-\frac{5}{2}, +\infty)$
- (e) nessuna soluzione
- (f) $\{2, 3\}$
- (g) La prima disequazione si può scrivere nella forma $x^2 + 10x - 24 \leq 0$ ed è risolta per $x \in [-12, 2]$; la seconda equivale a $x^2 \geq 16$ ed è risolta per $x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$. Il sistema è dunque risolto per $[-12, -4]$.
- (h) Il sistema è impossibile, perché le prime due disequazioni sono incompatibili (la quantità $x^2 - 5x$ dovrebbe essere contemporaneamente positiva e minore di 6).
- (i) $[0, +\infty)$
- (l) $x = -1$ è soluzione per ogni valore di k ; $x = k$ è soluzione solo se $k \in [-5, -\frac{1}{3}]$.

- (m) Il sistema ammette la soluzione $x = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4k}}{2k}$, solo se $k < 0$. Infatti, per $k = 0$ l'equazione si abbassa di grado ed ha per soluzione $x = -1$, che non soddisfa la disequazione del sistema.

Per $k \neq 0$, risolvendo l'equazione si trova formalmente $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k}}{2k}$. La condizione di esistenza delle radici richiede che sia $k \leq \frac{1}{4}$, $k \neq 0$. La soluzione $x = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4k}}{2k}$ soddisfa la disequazione se $k < 0$, mentre l'altra soluzione non la soddisfa mai.

- (n) Le soluzioni dell'equazione sono $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k}}{2}$ per $k \leq \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{-1 - \sqrt{1 - 4k}}{2} \leq 1 &\iff \dots \iff -3 \leq \sqrt{1 - 4k} \leq 1 \iff 0 \leq k \leq \frac{1}{4} \\ -1 \leq \frac{-1 + \sqrt{1 - 4k}}{2} \leq 1 &\iff \dots \iff -1 \leq \sqrt{1 - 4k} \leq 3 \iff -2 \leq k \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

In conclusione, il sistema

è impossibile se $k > \frac{1}{4}$
ha una soluzione se $k = \frac{1}{4}$
ha due soluzioni se $0 \leq k < \frac{1}{4}$
ha una soluzione se $-2 \leq k < 0$
è impossibile se $k < -2$.

- (o) Se $k \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $x \geq k$
se $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < k < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
 $k \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ $k \leq x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ oppure $x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- (p) Se $k \geq 1$ $0 \leq x \leq \frac{1}{k^2}$
se $0 < k < 1$ $0 \leq x \leq 1$
se $-1 < k < 0$ il sistema è impossibile
se $k \leq -1$ $\frac{1}{k^2} \leq k \leq 1$

(q) L'equazione ha come soluzioni $x = -1$ e $x = k$; la prima è soluzione per ogni valore di k , la seconda lo è solo se $k \leq -9$ oppure $k > -2$.

(r) Il sistema si può riscrivere nella forma

$$\begin{cases} k > 0 \\ x \geq \frac{1}{k} \\ x \geq k \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} k = 0 \\ 0 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} k < 0 \\ x \leq \frac{1}{k} \\ x \geq k \end{cases}$$

Confrontando k e $\frac{1}{k}$, si ottiene:

se $k \geq 1$ $x \geq k$
 se $0 < k < 1$ $x \geq \frac{1}{k}$
 se $k = 0$ il sistema è impossibile
 se $-1 \leq k < 0$ il sistema è impossibile
 se $k < -1$ $k \leq x \leq \frac{1}{k}$.

(5.24)

(a) Non esiste: la condizione equivale ad affermare che la funzione non assume alcun valore.

(b) Possiamo scegliere la funzione $f(x) = x^2$: l'equazione $f(x) = k$ ha soluzioni solo se $k \geq 0$.

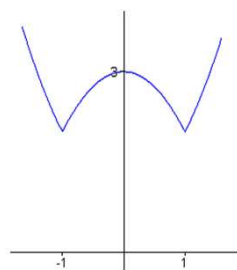
(c) Possiamo scegliere $f(x) = x$: l'equazione $f(x) = k$ ha una sola soluzione per ogni valore di k .

(d) Se scegliamo $f(x) = x^2$, l'equazione $f(x) = k$ per $k > 0$ ha sempre due soluzioni.

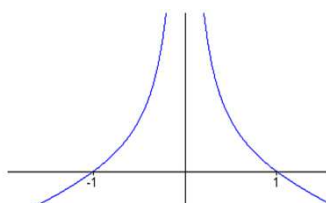
(e) Possiamo scegliere $f(x) = 2 + |x^2 - 1|$ (vedere fig. (e)).

(f) Un esempio può essere $\frac{1-x^2}{|x|}$ definita per $x \neq 0$ (vedere fig. (f1)) o anche $\tan x$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ (vedere fig. (f2)).

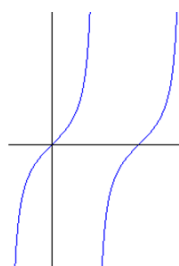
(g) Una possibile funzione è $f(x) = \frac{\arctan x}{\pi} + \frac{1}{2}$ (vedere fig.(g))



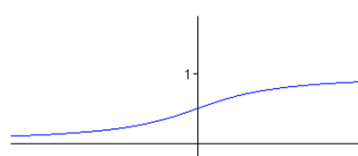
(e)



(f1)



(f2)



(g)

(h) Ad esempio la funzione seno.

(i) Ad esempio la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(5.25)

(a) $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ (b) $x = \frac{7}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ (c) $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = -\frac{1}{2}$ (d) $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$.

(5.26)

(a) Il sistema è impossibile.

- (b) Il sistema è indeterminato, cioè ammette infinite soluzioni, che possono essere espresse in funzione di un parametro, ad esempio nella forma $x = 1 - 2t$, $y = t$ oppure nella forma equivalente $x = s$, $y = \frac{1-s}{2}$.
- (c) $x = -1$, $y = 1$
- (d) Il sistema è impossibile.
- (e) Il sistema è indeterminato: le infinite soluzioni possono essere espresse in funzione di un parametro, ad esempio nella forma $x = \frac{1}{3}$, $y = t$, $z = t + \frac{1}{3}$.
- (f) Il sistema è impossibile.

LE FUNZIONI POTENZA

(6.1) (a) $\sqrt[12]{64}$, $\sqrt[12]{16}$, $\sqrt[12]{27}$ (b) $\sqrt[30]{1024}$, $\sqrt[30]{64}$, $\sqrt[30]{27}$.

(6.2)

(a) $a \geq 0$; $\sqrt[12]{a^6}$, $\sqrt[12]{a^5}$, $\sqrt[12]{a^9}$.

- (b) Le radici sono sempre definite; la terza se è $x^2 - y^2 \geq 0$, cioè $(x - y)(x + y) \geq 0$. Distinguiamo due casi:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| \leq x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Le radici diventano $\sqrt[6]{(x - y)^2}$, $\sqrt[6]{(x + y)^2}$, $\sqrt[6]{(x^2 - y^2)^3}$.

$$\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| \leq -x \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Le radici diventano $-\sqrt[6]{(x - y)^2}$, $-\sqrt[6]{(x + y)^2}$, $\sqrt[6]{(x^2 - y^2)^3}$.

Sintetizziamo i due casi, scrivendo la condizione nella forma $|y| \leq |x|$ e facendo precedere le prime due radici da $\operatorname{sgn} x$ (che vale 1 se $x > 0$, -1 se $x < 0$; si osservi che per $x = 0$ deve essere anche $y = 0$ e le tre radici si annullano).

(6.3)

(a) $\sqrt{\frac{5}{9}}$, (b) $\sqrt[3]{32}$ (c) $x, y \neq 0$; $\sqrt[3]{\frac{2}{x^5y}}$.

(d) Procedendo come nell'esercizio 6.2(b), deve essere $|b| \leq |a|$, $b \neq a$ (questa conclusione assicura che sono positivi sia il termine sotto radice sia il termine precedente). Possiamo riscrivere l'espressione nella forma $\sqrt[4]{(a - b)^3(a + b)^5}$.

(e) $x \neq 0$; $\sqrt[3]{x^2y}$ (f) $x \neq 0$, $y \geq 0$; $\operatorname{sgn} x \sqrt{y} = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{se } x > 0 \\ -\sqrt{y} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(6.4)

(a) $3ab^2\sqrt[3]{3a^2b}$ (b) $2\pi x^2\sqrt{7\pi x}$ (c) $x\sqrt[3]{y}$
 (d) $|x|\sqrt{xy}$ (e) $3y^2\sqrt[5]{xy(3y^2 - 1)}$ (f) $2(x + y)z^2\sqrt[4]{4(x + y)}$

(6.5) (a) 21, (b) $49 - 20\sqrt{6}$, (c) $2^{\frac{209}{21}}$

(d) $\sqrt{\sqrt{a}(a + 1 + 2\sqrt{a})(\sqrt{a} - 1)} = \sqrt{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)^2(\sqrt{a} - 1)} = \sqrt[4]{a}(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1) = \sqrt[4]{a}(a - 1)$

(e) $a + 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} + b$

(f) Se n è pari l'espressione è definita per ogni x , se n è dispari per ogni $x \geq 0$; in entrambi i casi vale $\sqrt[30]{x^{26n+4}}$.

(g) L'espressione è definita per $a \geq 0$, $b \leq a^2$ e vale $a + \sqrt{b}$.

(6.6)

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $5\frac{\sqrt[3]{4}}{6}$ | (b) $\frac{3 + \sqrt{2}}{7}$ | (c) $-\frac{(1 - \sqrt{\pi + 1})^2}{\pi}$ |
| (d) $\frac{(a+b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a-b}$ | (e) $3 - \sqrt{6}$ | (f) $\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}$ |
| (g) $\frac{a + 2\sqrt[3]{a^2b} + 2\sqrt[3]{ab^2} + b}{a-b}$ | (h) $\frac{(\sqrt[4]{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{2}$ | |

(6.7) Prima di elevare al quadrato in una equazione o disequazione contenente una radice quadrata occorre prestare attenzione al segno dell'altro termine. La disequazione data equivale a:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 - 1 > x^2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema è impossibile, il secondo fornisce $x \in (-\infty, -1]$.

(6.8) L'errore consiste nell'aver sostituito $\sqrt{(x^2 - 1)^2}$ con $x - 1$ invece che con $|x - 1|$.

L'equazione data equivale a:

$|x - 1| = 1 \iff x - 1 = 1$ oppure $x - 1 = -1$, da cui segue $x = 2$ oppure $x = 0$.

(6.9) Le radici a primo membro delle uguaglianze sono definite per ogni valore di x ; occorre controllare che i due membri abbiano lo stesso segno.

- (a) Il primo membro si può riscrivere nella forma $|(x - 2)(x - 5)|$ e coincide con $(x - 2)(x - 5)$ per $x \in (-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$. Per $x \in (2, 5)$ dobbiamo sostituire il secondo membro con $(x - 2)(5 - x)$.
- (b) $|x||x - 1| = -x(x - 1) = x(1 - x)$ per $x \in [0, 1]$. Per $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ dobbiamo sostituire il secondo membro con $x(x - 1)$.
- (c) L'uguaglianza è sempre vera, in quanto la radice è di ordine dispari.
- (d) Il primo membro vale $x(x + 1)$ e coincide con $|x(x + 1)|$ per $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.

(6.10)

- (a) $[-1, 1]$; poiché in questo intervallo le due radici a secondo membro hanno senso, l'uguaglianza è sempre vera.
- (b) $(-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$; l'uguaglianza vale solo per $x \in [5, +\infty)$, mentre per $x \in (-\infty, 0]$ si deve modificare il secondo membro in $\sqrt[4]{-x} \sqrt[4]{5 - x}$.
- (c) $(-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$; l'uguaglianza vale in tutto il dominio.
- (d) $[-1, +\infty)$; l'uguaglianza vale solo per $x \in [0, +\infty)$, mentre per $[-1, 0]$ il secondo membro si deve cambiare con $-x\sqrt{x + 1}$.
- (e) $[-1, +\infty)$; l'uguaglianza è sempre vera.
- (f) $\mathbb{R}$; il primo membro vale $x + 1$ e coincide con $|x + 1|$ solo per $x \in [-1, +\infty)$.
- (g) $\mathbb{R}$; il primo membro vale $\sqrt[3]{x + 2}\sqrt[3]{x - 2}$ e coincide con il secondo se $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
- (h) $[-1, 1]$; il primo membro vale $|x|\sqrt{1 - x^2}$ e coincide con il secondo per $x \in [-1, 0]$.
- (i) $[-1, 1]$; l'uguaglianza è sempre vera.

- (l) $\mathbb{R}$; il primo membro si può riscrivere nella forma $|(x-1)(x+1)|$ e coincide con il secondo per $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Per $x \in (-1, 1)$ dobbiamo sostituire il secondo membro con $(1-x)(1+x)$.

(6.11)

- (a) $\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ 9x^2 = 4(3x-1) \end{array} \right. \iff x = \frac{2}{3}$
- (b) $\left\{ \begin{array}{l} 5x-1 \geq 0 \\ (5x-1)^2 = 10x+6 \end{array} \right. \iff x = 1$
- (c) $\left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ 2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2} = 25 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ \sqrt{x^2+3x+2} = 11-x \end{array} \right. \iff$
 $\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 11 \\ 25x = 1119 \end{array} \right. \iff x = \frac{119}{25}$
- (d) $\sqrt{x+6} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{5}{2} \\ 3x-4+2\sqrt{2x^2-3x-5} = x+6 \end{array} \right. \iff$
 $\left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{5}{2} \\ \sqrt{2x^2-3x-5} = 5-x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{2} \leq x \leq 5 \\ x^2+7x-30 = 0 \end{array} \right. \iff x = 3.$
- (e) $\left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{1}{5} \\ (5x-1)^2 = |10x+6| \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{1}{5} \\ (5x-1)^2 = 10x+6 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{1}{5} \\ 5x^2-4x-1 = 0 \end{array} \right. \iff x = 1.$
- (f) $\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ 9x^2 = 4|3x-1| \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 = 4(1-3x) \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 = 4(3x-1) \end{array} \right. \iff$
 $\iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2+12x-4 = 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2-12x+4 = 0 \end{array} \right. \iff x = 2\frac{\sqrt{2}-1}{3} \text{ oppure } x = \frac{2}{3}.$
- (g) $\left\{ \begin{array}{l} x \leq -7 \\ 4x-3x = (x+7)^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \leq -7 \\ x^2+17x+45 = 0 \end{array} \right. \iff x = \frac{-17-\sqrt{109}}{2}.$
- (h) $\left\{ \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x+2 = (x+3)^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x^2+5x+7 = 0 \end{array} \right. \cdot \text{ Non esistono soluzioni.}$
- (i) $\left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 2x^4+1 = (x^2-1)^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ x^4+2x^2 = 0 \end{array} \right. \cdot \text{ Non esistono soluzioni.}$
- (l) $x^3-4x = (x-1)^3 \iff 3x^2-7x+1 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}.$
- (m) $\left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ x = 3\sqrt{x-1} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ x^2-9x+9 = 0 \end{array} \right. \iff x_{1,2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}$
- (n) $\left\{ \begin{array}{l} 7-2x \geq 0 \\ x-x^2 = 7-2x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{7}{2} \\ x^2-3x+7 = 0 \end{array} \right. \cdot \text{ Non esistono soluzioni.}$
- (o) $\left\{ \begin{array}{l} x \neq -1 \\ 64x^2(x+1) = 27x^3 \end{array} \right. \iff x = 0 \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \\ 64(x+1) = 27x \end{array} \right. \iff x = 0 \text{ oppure } x = -\frac{64}{37}.$

$$(p) \left\{ \begin{array}{l} x > 3 \\ 2\sqrt{x-3} = x-2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x > 3 \\ 4(x-3) = (x-2)^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x > 3 \\ x^2 - 8x + 16 = 0 \end{array} \right. \iff x = 4.$$

$$(q) \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x + \sqrt{x-1} = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} = 3-x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 3 \\ x-1 = (3-x)^2 \end{array} \right. \iff x = 2.$$

(6.12)

$$(a) |x-1| < 4 \iff x \in (-3, 5).$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} 2x-5 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ 2x-5 > (x+1)^2 \end{array} \right. .$$

Il primo sistema è evidentemente impossibile; lo è anche il secondo, che equivale a $x \geq -1$, $x^2 \leq -6$.

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} 3-2x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 3-2x \leq (x+2)^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \in \left[-2, \frac{3}{2}\right] \\ x^2 + 6x + 1 \geq 0 \end{array} \right. \iff x \in \left[-3 + 2\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right].$$

$$(d) \left\{ \begin{array}{l} 6x-x^2 \geq 0 \\ 3-2x \geq 0 \\ 6x-x^2 < (3-2x)^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \\ 5x^2 - 18x + 9 > 0 \end{array} \right. \iff x \in \left[0, \frac{3}{5}\right]$$

$$(e) \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 9 \geq 0 \\ x^2 - 9 \leq 2x + 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \\ x^2 - 2x - 10 \leq 0 \end{array} \right. \iff x \in [3, 1 + \sqrt{11}]$$

$$(f) x^3 - 1 < (x+3)^3 \iff 9x^2 + 27x + 28 > 0, \text{ che è sempre verificata.}$$

$$(g) x^3 - 2x - 1 \geq 0 \iff (x+1)(x^2 - x - 1) \geq 0 \iff x \in \left[-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

$$(h) x \leq 0 \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ |x^2 - 1| \geq x^2 \end{array} \right. \iff x \leq 0 \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq x^2 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq -x^2 \end{array} \right. \iff x \in \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 1 > 0 \\ 2x > 3\sqrt{x^2 - 1} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 1 > 0 \\ x \geq 0 \\ 4x^2 > 9(x^2 - 1) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ 5x^2 < 9 \end{array} \right. \iff x \in \left(1, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$(l) \left\{ \begin{array}{l} 1-x > 0 \\ \sqrt{2x-x^2} \geq 1-x \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} 1-x < 0 \\ \sqrt{2x-x^2} \leq 1-x \end{array} \right.$$

Il secondo sistema è evidentemente impossibile; per quanto riguarda il primo, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ 2x - x^2 \geq (1-x)^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ 2x^2 - 4x + 1 \leq 0 \end{array} \right. \iff x \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

(m) L'espressione a primo membro è definita sotto le condizioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2 + 1 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 1 \neq x + 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. .$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore.

Numeratore: è positivo (nel senso debole ≥ 0) se

$$\sqrt{x} \leq 3x - 1 \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{1}{3} \\ x \leq (3x-1)^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 7x + 1 \geq 0 \end{array} \right. \iff x \geq \frac{7+\sqrt{13}}{18}.$$

Denominatore: è positivo (nel senso debole ≥ 0) se

$$\sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{x+2} \iff x^2 - x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Numeratore e denominatore sono discordi se $x \in \left[\frac{7+\sqrt{13}}{18}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$; la disequazione è dunque verificata in questo intervallo.

- (n) La radice cubica è sempre definita, quella quadrata lo è per $x \in A = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Studiamo separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore in A .

Numeratore: è positivo (nel senso debole ≥ 0) se

$$x \geq \sqrt[3]{x^3 - x + 1} \iff x^3 \geq x^3 - x + 1 \iff x \geq 1.$$

Denominatore: è positivo (nel senso debole ≥ 0) se

$$x \in A, \sqrt{x(x-2)} \geq x-3 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [2, 3] \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 3 \\ 4x \geq 9 \end{cases}$$

Dunque in A il denominatore è sempre positivo.

Numeratore e denominatore sono discordi se $x \in (-\infty, 0]$; la disequazione è dunque verificata in questo intervallo.

- (o) Perché l'espressione al primo membro sia definita, deve essere $\begin{cases} 4x-1 \geq 0 \\ 4x-1 \neq 9 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases}$

In particolare, il denominatore è positivo per $x > \frac{5}{2}$, negativo per $\frac{1}{4} \leq x < \frac{5}{2}$. Studiamo la disequazione distinguendo i due casi.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 3x+5 > 2\sqrt{4x-1}-6 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{1}{4} \leq x < \frac{5}{2} \\ 3x+5 < 2\sqrt{4x-1}-6 \end{cases} \iff \\ & \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 2\sqrt{4x-1} < 3x+11 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{1}{4} \leq x < \frac{5}{2} \\ 2\sqrt{4x-1} > 3x+11 \end{cases} \iff \\ & \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 9x^2+50x+125 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{1}{4} \leq x < \frac{5}{2} \\ 9x^2+50x+125 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il secondo sistema è impossibile; il primo sistema (e dunque anche la disequazione) è verificato per $x > \frac{5}{2}$.

- (p) Perché siano definite le due radici deve essere $x \in A = [-3, 1]$. Studiamo separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore in A .

Numeratore: è positivo se

$$x \in A, \sqrt{1-x} \leq 3-4x \iff x \in \left[-3, \frac{3}{4}\right], 16x^2-23x+8 \geq 0 \iff x \in \left[-3, \frac{23-\sqrt{17}}{32}\right]$$

Denominatore: è positivo se

$$x \in A, \sqrt{x+3} \geq 4-2x \iff x \in A, 4x^2-17x+13 \geq 0.$$

In A il denominatore è sempre positivo (in particolare, vale 0 per $x = 1$).

Numeratore e denominatore sono discordi se $x \in \left[\frac{23 - \sqrt{17}}{32}, 1 \right)$; la disequazione è verificata in questo intervallo.

$$(q) \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x + 3 + 2\sqrt{x^2 + 3x + 2} > x + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3x + 2} > 2 - x \end{cases} \iff$$

$$x > 2 \text{ oppure } \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 3x^2 + 16x + 4 > 0 \end{cases} \iff x > 2 \text{ oppure } x \in \left(\frac{-8 + 2\sqrt{13}}{3}, 2 \right] \iff$$

$$x \in \left(\frac{-8 + 2\sqrt{13}}{3}, +\infty \right).$$

$$(r) \begin{cases} x \neq 1 \\ \left| \frac{x+2}{x-1} \right| > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 1 \\ |x+2| > |x-1| \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 + 4x + 4 > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \iff$$

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty).$$

$$(s) \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x + 3 > x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 - x - 3 < 0 \end{cases} \iff x \in \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right).$$

$$(t) \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} < -x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ x \in (-\infty, -1] \\ x^2 - 4 < (x+1)^2 \end{cases} \iff x \in \left(-\frac{5}{2}, -2\right).$$

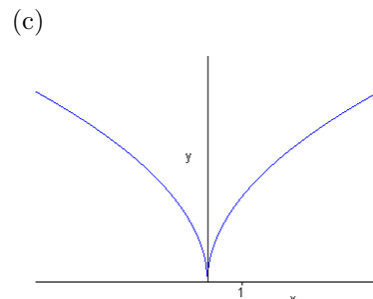
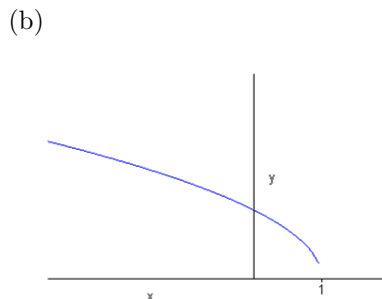
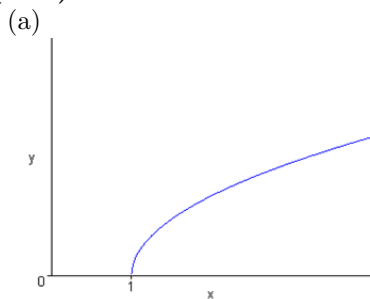
(u) Basta dare significato alle radici, dopo di che, tenendo conto del segno negativo a primo membro e del fatto che le due radici non si annullano per uno stesso valore, la disequazione è sicuramente verificata. Deve dunque essere:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \iff x \in [-4, -1] \cup [1, +\infty).$$

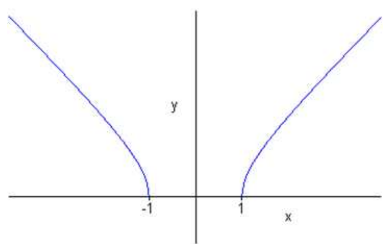
$$(v) \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ (x - 2)^2 \leq x^3 \end{cases} \iff x \in [0, 2) \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 2 \\ x^3 - x^2 + 4x - 4 \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$x \in [0, 2) \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 2 \\ (x^2 + 4)(x - 1) \geq 0 \end{cases} \iff x \in [0, 2) \cup [2, +\infty) = [0, +\infty).$$

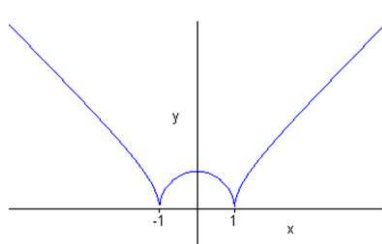
(6.13)



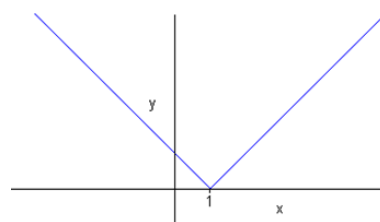
(d)



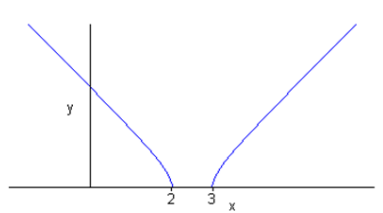
(e)



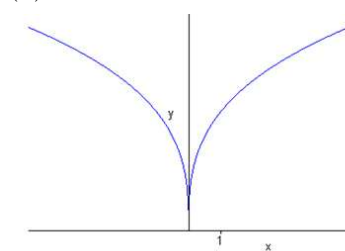
(f)



(g)

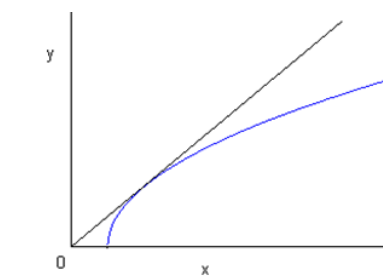


(h)

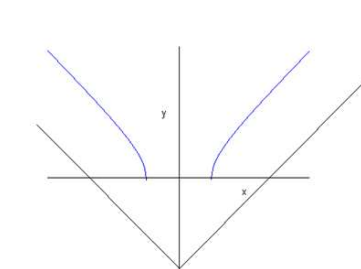


(6.14)

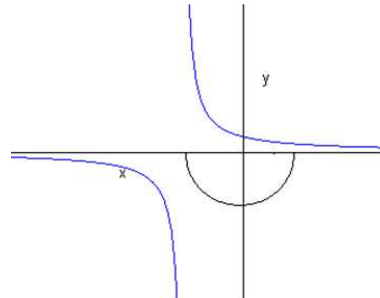
(a)



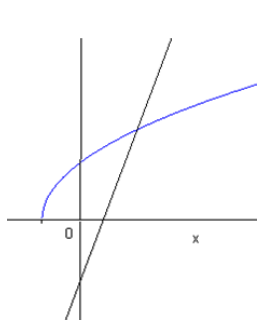
(b)



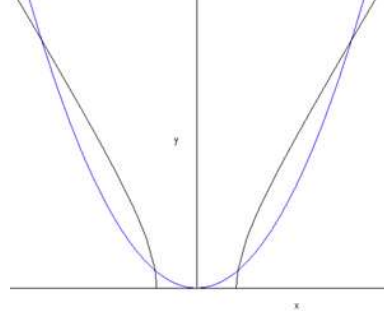
(c)



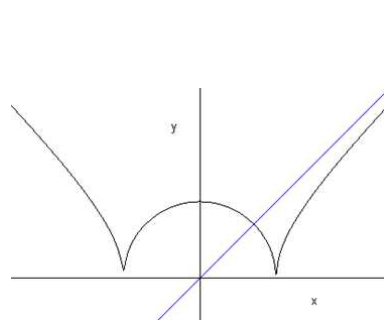
(d)



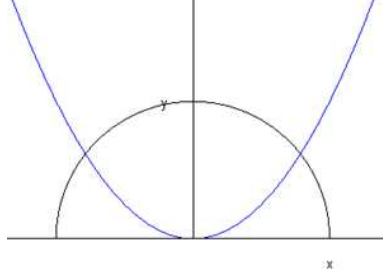
(e)



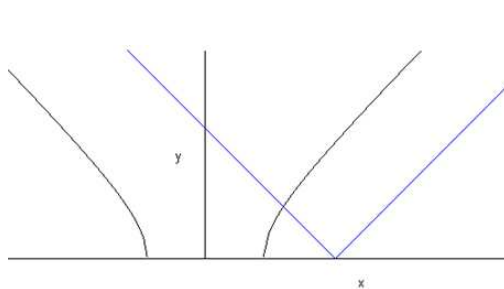
(f)



(g)



(h)



Soluzione per via algebrica:

$$(a) \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 = 4(3x - 1) \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 12x + 4 = 0 \end{cases} \iff x = \frac{2}{3}.$$

$$(b) \begin{cases} x^2 - 5 \geq 0 \\ |x| - 5 < 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x^2 - 5 \geq 0 \\ |x| - 5 \geq 0 \\ |x| > 3 \end{cases} \iff x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty).$$

(c) Il campo di esistenza è $(-2, 2]$; in questo intervallo la disequazione è verificata, perché il primo membro è positivo, il secondo negativo.

$$(d) \begin{cases} x \geq -\frac{3}{5} \\ x \geq \frac{1}{5} \\ (5x - 1)^2 = 10x + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ 5x^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases} \iff x = 1.$$

$$(e) \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^4 - 16x^2 + 16 \geq 0 \end{cases} \iff 1 \leq x^2 \leq 4(2 - \sqrt{3}) \text{ oppure } x^2 \geq 4(2 + \sqrt{3}) \dots\dots\dots$$

$$(f) x < 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ |x^2 - 1| > x^2 \end{cases} \iff x < 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 > x^2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 < -x^2 \end{cases} \iff$$

$$x < 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < \frac{1}{2} \end{cases} \iff x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$(g) \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^4 + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}.$$

$$(h) \begin{cases} x \geq \sqrt{5} \\ 10x > 30 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \leq -\sqrt{5} \\ 10x > 30 \end{cases} \iff x > 3.$$

(6.15) Nel primo caso, elevando al quadrato, si ottengono le maggiorazioni equivalenti:

$$a + b - 2\sqrt{ab} < a + b < a + b + 2\sqrt{ab} \iff -2\sqrt{ab} < 0 < 2\sqrt{ab}$$

che sono evidentemente verificate; si osservi in particolare che in queste maggiorazioni (e quindi in quelle iniziali) vale il segno di uguale se e solo se almeno uno tra a e b è nullo.

Nel secondo caso si ha:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \iff (a-b)^2 \geq 0$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \iff \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

che abbiamo già verificato.

Si osservi che in queste minorazioni vale il segno di uguaglianza se e solo se $a = b$.

ESPONENZIALI E LOGARITMI

(7.1)

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \quad \log_3 81 = 4 & \text{(b)} \quad \log_5 1 = 0 & \text{(c)} \quad \log_{16} \frac{1}{64} = -\frac{3}{2} & \text{(d)} \quad \log_4 \frac{1}{16} = -2 \\
 \text{(e)} \quad \log_{25} 125 = \frac{3}{2} & \text{(f)} \quad \log_{27} 3 = \frac{1}{3} & \text{(g)} \quad 10^3 = 1000 & \text{(h)} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \\
 \text{(i)} \quad 5^3 = 125 & \text{(l)} \quad 9^{\frac{3}{2}} = 27 & \text{(m)} \quad 16^{\frac{3}{2}} = 64 & \text{(n)} \quad 7^1 = 7
 \end{array}$$

(7.2) Procedendo come suggerito nel testo si ottiene:

$$\begin{array}{llllll}
 \text{(a)} -3 & \text{(b)} \frac{1}{3} & \text{(c)} -2 & \text{(d)} \frac{1}{3} & \text{(e)} -5 & \text{(f)} -\frac{4}{5} \\
 \text{(g)} -\frac{1}{3} & \text{(h)} \frac{3}{5} & \text{(i)} 3 & \text{(l)} \frac{3}{2} & \text{(m)} 2 & \text{(n)} -1
 \end{array}$$

(7.3) Nel primo caso (base assegnata, argomento da determinare) si deve prendere l'esponenziale di ambo i membri, la base essendo quella data; in questo modo il primo membro si semplifica in x , il secondo fornisce il valore richiesto.

Nel secondo caso (argomento assegnato, base da determinare) si ripete il procedimento, prendendo x come base; in questo modo il primo membro si semplifica nell'argomento, mentre al secondo membro compare una potenza di x ; a questo punto rimane da risolvere l'equazione risultante.

$$\begin{array}{llllll}
 \text{(a)} e^4 & \text{(b)} \frac{4}{25} & \text{(c)} 2^{\frac{1}{4}} & \text{(d)} \frac{8}{343} & \text{(e)} \frac{1}{8} & \text{(f)} \frac{2}{3} & \text{(g)} 3^{\frac{3}{2}} \\
 \text{(h)} 1 & \text{(i)} 5 & \text{(l)} \frac{1}{8} & \text{(m)} 3 & \text{(n)} \frac{5}{4} & \text{(o)} \frac{1}{3} & \text{(p)} \frac{1}{10} \\
 \text{(q)} 9 & \text{(r)} 4^{\frac{1}{5}} & \text{(s)} \sqrt{3} & \text{(t)} \frac{1}{125} & \text{(u)} \frac{1}{e} & \text{(v)} 5^{\frac{1}{4}} & \text{(z)} 100
 \end{array}$$

(7.4)

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} 2 \log x + 3 \log y & \text{(b)} \frac{\log x + \log y - \log z}{2} & \text{(c)} 2 \log x + \frac{\log y}{3} \\
 \text{(d)} \frac{2 \log x}{3} + \frac{\log y}{6} + \frac{\log z}{2} - \frac{4 \log t}{3} & \text{(e)} -\frac{4 \log x}{5} - \frac{2 \log y}{5} - \frac{13 \log z}{12} & \text{(f)} 3 \log x + 2 \log y - \frac{\log t}{2} - \frac{\log z}{4}
 \end{array}$$

(7.5)

$$\text{(a)} \log \frac{xz^2}{y} \quad \text{(b)} \log \frac{x^3 \sqrt{y}}{\sqrt[4]{z}} \quad \text{(c)} \log \frac{e^2 x}{\sqrt{yz}} \quad \text{(d)} \log \frac{\sqrt[4]{xy^7}}{125z^2}$$

(7.6) Si tratta di applicare la formula di cambiamento di base ed eventualmente applicare le proprietà dei logaritmi per semplificare il risultato.

$$\text{(a)} \frac{\log x}{\log 2} \quad \text{(b)} -\frac{\log x}{\log 2} \quad \text{(c)} \frac{\log x}{2} \quad \text{(d)} 2 \log x \quad \text{(e)} \frac{\log x}{\log \frac{2}{e}} \quad \text{(f)} \frac{\log 2}{\log x} \quad \text{(g)} \frac{\log x}{2 \log x} \quad \text{(h)} \frac{\log x}{\log x}$$

Le espressioni (g) e (h) si semplificano rispettivamente in $\frac{1}{2}$ e in 1 per i valori che danno loro significato, cioè per $x > 0$, $x \neq 1$.

(7.7) Occorre imporre che l'argomento del logaritmo sia maggiore di zero; per quanto riguarda la semplificazione ricordare che le proprietà dei logaritmi valgono per variabili positive; quando non si è in questo caso, bisogna utilizzare il valore assoluto.

- (a) $x \neq 0$; $2 \log |x|$ (b) $x > 0$; $3 \log x$ (c) sempre definito; x
 (d) $x > 0$, $x \neq 1$; 1 (e) $x > 0$, $x \neq 1$; $\log x + 2 \log |x - 1|$ (f) $x > -1$; $\frac{1}{2} \log(x + 1)$
 (g) $x > 0$, $x \neq 1$; 3 (h) $x > 0$, $x \neq 1$; e

(7.8)

- (a) Possiamo scambiare l'ordine con cui compaiono i due esponenti, ottenendo come risultato $\frac{1}{4^x}$.
 (b) Intervenendo sul numeratore: $4 \cdot 3^{2x} - 1 = (2 \cdot 3^x)^2 - 1 = (2 \cdot 3^x - 1)(2 \cdot 3^x + 1)$
 A questo punto possiamo semplificare con il denominatore, ottenendo $2 \cdot 3^x - 1$.
 (c) $3 \frac{(3^2)^{x^2} - (3^2)^x}{3^{x^2} + 3^x} = 3 \frac{(3^{x^2})^2 - (3^x)^2}{3^{x^2} + 3^x} = 3 \frac{(3^{x^2} - 3^x)(3^{x^2} + 3^x)}{3^{x^2} + 3^x} = 3(3^{x^2} - 3^x)$

(7.9) Utilizzando le proprietà degli esponenziali, riconduciamo le equazioni ad una ad una delle seguenti forme:

- $a^x = a^y$, da cui segue che deve essere $x = y$
- $a^x = b$, che fornisce $x = \log_a b$ (solo nel caso $b > 0$)
- $ha^x = kb^x$, che possiamo riscrivere nella forma $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{k}{h}$.

In certi casi un cambiamento di variabile della forma $t = a^x$ riconduce ad un'equazione algebrica in t ; dopo aver trovato le soluzioni positive in t , prendendone il logaritmo si ottengono le soluzioni in x .

- (a) 4 (b) -1 (c) $\log_7 9$ (d) $-\frac{1}{2}$ (e) 0 (f) $-\frac{11}{3}$ (g) $-\frac{3}{5}, 2$ (h) -3, 4 (i) $-\frac{4}{3}$
- (l) Dopo aver riscritto l'equazione nella forma $9(3^x)^2 + 3^x - 3 = 0$, ponendo $t = 3^x$ si ottiene l'equazione di secondo grado $9t^2 + t - 3 = 0$, da cui $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{109}}{18}$; di queste due soluzioni solo quella positiva è accettabile. La soluzione in x è dunque $\log_3 \frac{\sqrt{109} - 1}{18}$.
- (m) Ponendo $t = 2^x$, l'equazione diventa $t^2 = 4$, da cui $t_{1,2} = \pm 2$; di queste due soluzioni solo quella positiva è accettabile. La soluzione in x è dunque $x = 1$.
- (n) Ponendo $t = 3^x$, si ottiene $|t^2 - 2| = t$ che ha per soluzioni $t = 1$, $t = 2$; dunque $x = 0$, $x = \log_3 2$.
- (o) Ponendo $t = 3^x$, si ottiene $t^3 - 3t^2 + 2 = 0$ che ha per soluzioni $t = 1$, $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$; la soluzione $1 - \sqrt{3}$ va scartata perché negativa. Dunque $x = 0$, $x = \log_3(1 + \sqrt{3})$.
- (p) 0.
- (q) $\log_{\frac{5}{2}} \frac{5}{26}$
- (r) L'equazione si può riscrivere nella forma $6 \cdot 3^{2x} = 6 \cdot 7^{2x}$; l'unica soluzione è $x = 0$.
- (s) Con passaggi successivi possiamo riscrivere l'equazione nelle forme equivalenti: $(e^x)^2 + e^2 e^{\frac{1}{3}} = e^2 e^x + e^{\frac{1}{3}} e^x \iff e^x(e^x - e^2) = e^{\frac{1}{3}}(e^x - e^2) \iff (e^x - e^2)(e^x - e^{\frac{1}{3}}) = 0$, ottenendo infine $x = 2$ oppure $x = \frac{1}{3}$.
- (t) Ponendo $t = e^{\frac{x}{2}}$, l'equazione diventa $(et + 1)(e^3 t^2 - 1) = 0$, che ha come unica soluzione positiva il valore $t = e^{-\frac{3}{2}}$; dunque $x = -3$.
- (u) Riscritta l'equazione come $3 \cdot 3^x = \frac{5}{5^x}$, ovvero $15^x = \frac{5}{3}$, si ottiene $x = \log_{15} \frac{5}{3}$.

- (v) Posto $t = 2^x$, si ottiene $2^{2^{t+1}} = (t+1)^{2^t}$ cioè $2^{2 \cdot 2^t} = (t+1)^{2^t}$ ovvero $4^{2^t} = (t+1)^{2^t}$; dunque deve essere $t+1 = 4$, cioè $t = 3$, da cui segue $x = \log_2 3$.
- (w) Dalla seconda equazione si ricava $3^y = \frac{18}{2^x}$; sostituendo nella prima equazione e successivamente ponendo $t = 2^x$, si ottiene $t^2 - 11t + 18 = 0$; le soluzioni sono $t = 2$ o $t = 9$. Deve dunque essere $2^x = 2$, $3^y = 9$ oppure $2^x = 9$, $3^y = 2$, cioè $x = 1$, $y = 2$, oppure $x = \log_2 9$, $y = \log_3 2$. Si può osservare anche che il sistema fornisce la somma e il prodotto di 2^x con 3^y ; queste due quantità sono dunque le soluzioni dell'equazione $t^2 - 11t + 18 = 0$; deve dunque essere $2^x = 2$, $3^y = 9$ oppure $2^x = 9$, $3^y = 2$, da cui segue $x = 1$, $y = 2$ oppure $x = \log_2 9$, $y = \log_3 2$.
- (z) Riscritta la seconda equazione nella forma $\frac{x^3}{x^y} = \frac{1}{3}$ e sostituendo per x^y il valore che ricaviamo dalla prima, si ottiene $x^3 = 27$. La soluzione del sistema è dunque $x = 3$, $y = 4$.

(7.10) Come già osservato per il problema precedente, utilizzando le proprietà degli esponenziali, possiamo ricondurre le disequazioni ad una delle seguenti forme:

- $a^x < a^y$, da cui segue che deve essere $x < y$ se $a > 1$, $x > y$ se $a < 1$. Si ricordi che la funzione a^x è crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$.
- $a^x < b$, da cui per $b > 0$ segue $x < \log_a b$ se $a > 1$, $x > \log_a b$ se $0 < a < 1$. Non ha soluzioni se $b \leq 0$.
- $ha^x < kb^x$, che si può scrivere $\left(\frac{a}{b}\right)^x < \frac{k}{h}$ se $h > 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x > \frac{k}{h}$ se $h < 0$, in entrambi i casi ricollegandoci al caso precedente. In particolare la disequazione $a^x < b^x$ diventa $\left(\frac{a}{b}\right)^x < 1$; questa è verificata per $x < 0$ se $\frac{a}{b} > 1$, cioè se $a > b$, per $x > 0$ se $\frac{a}{b} < 1$, cioè se $a < b$.

Risultati analoghi se nella disequazione compare uno degli altri possibili segni ($>$, $\leq$, $\geq$).

Osserviamo in particolare che per $b \leq 0$ le disequazioni $a^x > b$ o $a^x \geq b$ sono sempre verificate, mentre la disequazione $a^x \leq b$ non ha alcuna soluzione.

In certi casi un cambiamento di variabile $t = a^x$, riconduce ad un'equazione algebrica in t . Prendendo il logaritmo delle soluzioni positive così trovate, si ottengono le soluzioni in x .

- (a) La disequazione si può riscrivere nella forma $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^2$; poichè la base è minore di 1, da questo segue che deve essere $\frac{x}{2} > 2$, cioè $x \in (4, +\infty)$.
- (b) Riscritta la disequazione nella forma $2^{4x} \leq 2^6$ e osservato che la base è maggiore di 1, si deve avere $4x \leq 6$, cioè $x \in (-\infty, \frac{3}{2}]$.
- (c) Prendendo il logaritmo in base 3 di ambo i membri, si ottiene $x \in [\log_3 7, +\infty)$.
- (d) Riscritta la disequazione nella forma $3^{x^2-3x} \geq 3^{2x-4}$, si ottiene che deve essere $x^2 - 3x \geq 2x - 4$ e questo avviene per $x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$.
- (e) Poiché la base del primo esponenziale è minore di quella del secondo, la disequazione è verificata se l'esponente è negativo.

Un modo equivalente per arrivare a questo risultato consiste nel riscrivere la disequazione nella forma

$\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-6x+5} \geq 1$. Poiché la base è minore di 1, l'esponente deve essere negativo. L'insieme delle soluzioni è $[1, 5]$.

- (f) Poiché la prima base è maggiore della seconda, l'esponente deve essere positivo; questo accade per $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$.

- (g) Per risolvere la disequazione, prendiamo il logaritmo in base $\frac{1}{5}$ di ambo i membri; poiché la base scelta è minore di 1, il verso della disequazione si inverte. Deve essere $x \in [-\log_5 9, +\infty)$.
- (h) L'esponente deve essere minore o uguale a 0, dunque $x \in (-\infty, -1) \cup [0, 1]$.
- (i) Si pone $t = 5^{2x} > 0$, ottenendo $\frac{|t-1|}{t+1} < 1$, che è verificata da ogni $t > 0$; l'insieme delle soluzioni in x è dunque $\mathbb{R}$.
- (l) Il numeratore è positivo se $|x+2| > 1$, il denominatore se $x > \frac{1}{2}$. Dunque il rapporto è negativo o nullo se $|x+2| \geq 1$, $x < \frac{1}{2}$; oppure $|x+2| \leq 1$, $x > \frac{1}{2}$; da questo segue $x \in (-\infty, -3] \cup [-1, \frac{1}{2})$.
- (m) Posto $2^x = t > 0$, si ottiene $t^3 - 8t \geq 0$. La disequazione è verificata per $t \in [\sqrt[3]{8}, +\infty)$ e dunque per $x \in [\frac{3}{2}, +\infty)$.
- (n) Si risolve la disequazione in e^x , ottenendo $e^x \in [4, 5]$, cioè $x \in [\log 4, \log 5]$.
- (o) Nella disequazione $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}$ deve essere $x^2 + 3 < 4x$, cioè $x \in (1, 3)$.
- (p) La disequazione equivale a $-1 < 2^x < 3$ e poiché la condizione $2^x > -1$ è verificata per ogni x , si ottiene che deve essere $2^x < 3$, da cui segue $x \in (-\infty, \log_2 3)$.
- (q) Poiché la base è minore di 1, deve essere $1 - 5x \leq \log_{\frac{3}{4}} 2$, cioè $x \in \left[\frac{1 - \log_{\frac{3}{4}} 2}{5}, +\infty\right)$.
- (r) $4 \cdot 4^{2x} - \frac{7}{3} \cdot 3^{2x} > 7 \cdot 3^{2x} + \frac{1}{16} \cdot 4^{2x} \iff \frac{9}{16} \cdot 4^{2x} > \frac{4}{3} \cdot 3^{2x} \iff \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} > \left(\frac{4}{3}\right)^3 \iff x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.
- (s) Poiché la base x deve essere positiva, i due esponenti sono positivi; dunque il primo esponenziale è maggiore del secondo se la sua base è maggiore dell'altra: questo accade se $x \in (0, e)$.
Allo stesso risultato arriviamo riscrivendo il secondo membro nella forma $e^{(x+1)\log x}$. Deve dunque essere $(x+1) > (x+1)\log x$, ovvero (essendo $x > 0$) $\log x < 1$.
- (t) Nella prima disequazione si pone $t = 3^x$, ottenendo $t^2 - 2t + 1 > 0$; questa è verificata per $t \neq 1$, dunque per $x \neq 0$.
Nella seconda disequazione si pone invece $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, ottenendo $t^2 - 8t - 9 \geq 0$; questa è verificata per $t \geq 9$ oppure $t \leq -1$. Ritornando alla variabile x , si trova che deve essere $x \leq -2$. Il sistema è dunque risolto per $x \in (-\infty, -2]$.
- (u) Riscritta la disequazione nella forma $2^{2\sqrt{x-1}+x} > 2^3$, deve essere $2\sqrt{x-1} > 3 - x$; questo vale per $x \in (5 - 2\sqrt{3}, +\infty)$.

(7.11)

- (a) L'uguaglianza segue dal fatto che $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.
Perché abbiano senso i tre logaritmi, deve essere $x > 3$; per questi valori l'uguaglianza è valida.
Si osservi però che il primo membro è definito anche per $x < -3$; per questi valori l'uguaglianza va sostituita con $\log(x^2 - 9) = \log(-x+3) + \log(-x-3)$.
In ogni caso vale $\log(x^2 - 9) = \log|x-3| + \log|x+3|$.
- (b) L'uguaglianza segue dal fatto che $9 + 6x + x^2 = (x+3)^2$.
Perché abbiano senso entrambi i logaritmi e quindi valga l'uguaglianza, deve essere $x > -3$.
Per $x < -3$ l'uguaglianza si sostituisce con $\log(9 + 6x + x^2) = 2\log(-x-3)$. In generale possiamo scrivere $\log(9 + 6x + x^2) = 2\log|x+3|$.

- (c) Entrambi i logaritmi sono definiti per $x \neq 0$ e l'uguaglianza è valida in tutto il campo di esistenza.
- (d) Mentre il primo logaritmo è definito per $x \neq 0$, il secondo lo è solo per $x > 0$; dunque l'uguaglianza vale solo per $x > 0$.
- (e) Il primo logaritmo è definito per $x \neq 0$, il secondo lo è solo per $x < 0$; dunque l'uguaglianza vale solo per $x < 0$.
- (f) Entrambi i logaritmi sono definiti per $x > 0$; l'uguaglianza vale in tutto il campo di esistenza.
- (g) Entrambi i logaritmi sono definiti per $x \neq \frac{1}{3}$; l'uguaglianza vale in tutto il campo di esistenza.
- (h) Il primo logaritmo è definito per $x \neq \frac{1}{3}$, il secondo per $x > \frac{1}{3}$: dunque l'uguaglianza vale solo per $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$.
 Per $x \in (-\infty, \frac{1}{3})$ l'uguaglianza diventa $\log(3x - 1)^4 = 4 \log(1 - 3x)$.
 In generale, $\log(3x - 1)^4 = 4 \log |3x - 1|$.
- (i) Il primo logaritmo è definito per $x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$, mentre i logaritmi a secondo membro sono definiti simultaneamente solo per $x \in (1, +\infty)$ ed è in questo sottoinsieme che vale l'uguaglianza.
 Per $x \in (-2, 0)$ l'uguaglianza deve essere modificata sostituendo il secondo membro con $\log(-x) + \log(x + 2) + \log(1 - x)$.
 In generale, $\log(x^3 + x^2 - 2x) = \log |x| + \log(x + 2) + \log |x - 1|$.
- (l) Perché abbia senso i logaritmi, deve essere $x > \frac{1}{2}$ e l'uguaglianza è verificata per questi valori. Il primo logaritmo è definito anche per $x < -\frac{1}{4}$; in questo caso l'uguaglianza diventa

$$\log \sqrt{\frac{2x-1}{4x+1}} = \frac{1}{2} [\log(1-2x) - \log(-1-4x)].$$

In generale,

$$\log \sqrt{\frac{2x-1}{4x+1}} = \frac{1}{2} [\log |2x-1| - \log |4x+1|].$$

- (m) L'uguaglianza vale per $x \in (-4, +\infty)$, in modo da dare significato ai logaritmi.
 Il primo logaritmo è definito anche per $x < -5$; per questi valori l'uguaglianza diventa:

$$\log \sqrt[3]{\frac{5+x}{4+x}} = \frac{1}{3} [\log(-x-5) - \log(-x-4)].$$

In generale,

$$\log \sqrt[3]{\frac{5+x}{4+x}} = \frac{1}{3} [\log |x+5| - \log |x+4|].$$

(7.12)

- (a) Il campo di esistenza (C.E.) dell'equazione è l'intervallo $(-4, 2)$. Dopo aver riscritto il primo logaritmo nella forma $\log(x+4)^2$, uguagliando i due argomenti si arriva all'equazione $x^2 + 9x + 14 = 0$; delle due soluzioni $x = -2$, $x = -7$, solo la prima cade nel campo di esistenza e quindi è accettabile.
- (b) C.E.: $(3, +\infty)$. Riscritto il primo logaritmo nella forma $\frac{1}{2} \log(x-3)$, ci riconduciamo all'equazione $x-3 = 3x-4$, che fornisce $x = \frac{1}{2}$; poiché questo valore non appartiene al campo di esistenza, l'equazione di partenza è impossibile.
- (c) C.E.: $(7, +\infty)$. Scritta l'equazione nella forma $\log[3(x-5)(x-7)] = 0$, deve essere $3(x-5)(x-7) = 1$ cioè $3x^2 - 36x + 104 = 0$. Delle due soluzioni $x_{1,2} = 6 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$, è accettabile solo $6 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

- (d) C.E.: $(2, +\infty)$. Scritta l'equazione nella forma $\log[\frac{1}{2}(3x-5)(x-2)] = 0$, deve essere $\frac{1}{2}(3x-5)(x-2) = 1$. Delle due soluzioni $x = 1$, $x = \frac{8}{3}$, è accettabile solo la seconda.
- (e) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{10\}$. Risolvendo l'equazione, si trova $\log_{10} x = 2$, cioè $x = 100$.
- (f) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{e^{\pm 3}\}$. Svolgendo i calcoli, si ottiene $\log x = 0$, cioè $x = 1$.
- (g) C.E.: $(0, +\infty)$. Svolgendo i calcoli, si ottiene $\log_2 x = -8$ oppure $\log_2 x = 2$, cioè $x = \frac{1}{256}$ oppure $x = 4$.
- (h) C.E.: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. Deve essere $\log_{\sqrt{2}} x = 8$, cioè $x = (2^{\frac{1}{2}})^8 = 16$.
- (i) C.E.: $(0, +\infty)$. I grafici delle funzioni logaritmo si intersecano solo per $x = 1$; $x = 1$ è dunque l'unica soluzione dell'equazione.
Ritroviamo lo stesso risultato scrivendo i due logaritmi con la stessa base, ad esempio quella naturale:
 $\log x = \frac{\log x}{\log 10}$; deve essere $\log x = 0$ cioè $x = 1$.
- (l) C.E.: $\mathbb{R}$. La soluzione è $x = \log(e^2 - e) = 1 + \log(e - 1)$.
- (m) C.E.: $(0, +\infty)$. Ponendo $\log |x| = t$, ci riconduciamo all'equazione di secondo grado $t^2 + 2t - 15 = 0$, che fornisce $t = -5$ oppure $t = 3$; dunque deve essere $x_{1,2} = \pm e^{-5}$ oppure $x = \pm e^3$.
- (n) C.E.: $[1, +\infty)$. Ponendo $\log x = t$, studiamo l'equazione $\sqrt{t} = 1 - t$, che equivale a $t^2 - 3t + 1 = 0$, con $0 \leq t \leq 1$. L'unica soluzione è $t = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, da cui ricaviamo $x = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.
- (o) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{1\}$. Passando al logaritmo naturale, si ha $\frac{\log x}{\log \frac{2}{5}} = \frac{\log \frac{2}{5}}{\log x}$, da cui $\log x = \pm \log \frac{2}{5}$ e quindi $x = \frac{2}{5}$ oppure $x = \frac{5}{2}$.
- (p) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{e}, 1, e\}$. Prendendo l'esponenziale di base e di entrambi i membri, si ottiene $|\log |\log x|| = 1$ e quindi $\log |\log x| = \pm 1$. Prendendo ancora l'esponenziale, si trova $|\log x| = e^{\pm 1}$ cioè $\log x = \pm \frac{1}{e}$, dunque $x_{1,2} = e^{\pm e}$ oppure $x_{3,4} = e^{\pm \frac{1}{e}}$.
- (q) C.E.: $(-1, 1) \setminus \{0\}$. Cambiando base, si ottiene $\log_2 \sqrt{1-x^2} = \frac{\log_2 |x|}{\log_2 4}$ ovvero $\log_2(1-x^2) = \log_2 |x|$; deve dunque essere $1-x^2 = |x|$ cioè $x^2 + |x| - 1 = 0$.
Risolvendo l'equazione di secondo grado in $|x|$, si trova $|x| = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ovviamente è accettabile per $|x|$ solo la soluzione positiva e dunque $x = \pm \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
- (r) C.E.: $(0, +\infty)$. Con il cambiamento di base, si ha $\log_2 \frac{x + \sqrt{x^2+9}}{2x} = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}$.
Poiché il secondo membro si semplifica in $-\log_2 x = \log_2 \frac{1}{x}$, siamo ricondotti a studiare l'equazione $x + \sqrt{x^2+9} = 2$ ovvero $\sqrt{x^2+9} = 2-x$. La sua soluzione $x = -\frac{5}{4}$ non sta nel campo di esistenza e dunque l'equazione iniziale è impossibile.
- (s) C.E.: $(\frac{1}{16}, +\infty)$. Cambiando base, si ottiene $\log_2(4 - \log_{\frac{1}{2}} x) = \frac{\log_2 16}{\log_2 \frac{1}{4}}$. Poiché il secondo membro vale -2 , deve essere $4 - \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4}$, che ha per soluzione $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{4}}$; il valore trovato appartiene al campo di esistenza.
- (t) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{1\}$. Prendendo l'esponente di base 2 di entrambi i membri, si ottiene $|\log_{\frac{1}{2}} x| = 2$ ovvero $\log_{\frac{1}{2}} x = \pm 2$ e dunque $x_{1,2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 2}$, cioè $x = \frac{1}{4}$ oppure $x = 4$; entrambe le soluzioni appartengono al campo di esistenza.

- (u) Riscritto il sistema nella forma equivalente $x + y = 3$, $xy = 2$ con la condizione $x, y > 0$, con facili calcoli si ottiene $x = 1$, $y = 2$ oppure $x = 2$, $y = 1$.
- (v) Possiamo riscrivere il sistema nella forma equivalente $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 2$ con la condizione $x, y > 0$. Con facili calcoli si ottiene $x = 1$, $y = 1$.

(7.13)

- (a) C.E.: $(0, +\infty)$. Prendendo l'esponenziale di base 4 di entrambi i membri, il segno della disequazione rimane invariato e otteniamo $x < 2$. Le soluzioni sono dunque le $x \in (0, 2)$.
- (b) C.E.: $(0, +\infty)$. Prendendo l'esponenziale di base $\frac{1}{2}$ di entrambi i membri, il segno della disequazione cambia e otteniamo $x > \frac{1}{16}$. Le soluzioni sono dunque le $x \in (\frac{1}{16}, +\infty)$.
- (c) C.E.: $(0, +\infty)$. Prendendo l'esponenziale di base $\frac{1}{10}$ di entrambi i membri, il segno della disequazione cambia ed otteniamo $x < \frac{1}{\sqrt{10}}$. Le soluzioni sono dunque le $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{10}})$.
- (d) C.E.: $(0, +\infty)$. Prendendo l'esponenziale di base 3, il segno delle disequazioni si conserva e otteniamo $\sqrt{3} < x < 9$.
- (e) C.E.: $(0, +\infty)$. Prendendo l'esponenziale di base $\frac{1}{49}$, il segno delle disequazioni cambia e otteniamo $\frac{1}{7} < x < 7$.
- (f) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Prendendo l'esponenziale di base 3, il segno della disequazione si conserva e otteniamo $|x + 2| > \frac{1}{27}$. Cioè $x \in (-\infty, -\frac{55}{27}) \cup (-\frac{53}{27}, +\infty)$.
- (g) C.E.: $(\frac{5}{3}, +\infty)$. Prendendo l'esponenziale di base $\frac{1}{2}$, il segno della disequazione cambia e otteniamo $3x - 5 < \frac{1}{4}$. Dunque $x \in (\frac{5}{3}, \frac{7}{4})$.
- (h) C.E.: $(\frac{5}{3}, +\infty)$. Cambiando la base del logaritmo: $\frac{\log_{\frac{1}{4}}(3x - 5)}{\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}} = 2 \log_{\frac{1}{4}}(3x - 5)$. Deve dunque essere $(3x - 5)^2 > 2x - 1$. Risolvendo la disequazione e tenendo conto del C.E., si trova $x > \frac{16 + \sqrt{22}}{9}$.
- (i) C.E.: $(0, +\infty)$. Ci riconduciamo a studiare la disequazione $\sqrt{x^2 + 9} > 3x$. Risolvendo la disequazione e tenendo conto del C.E., si trova $0 < x < \frac{3\sqrt{2}}{4}$.
- (l) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{1\}$. Posto $\log_2 x = t$, possiamo riscrivere $\frac{3t^2 - 5t - 12}{t} < 0$. Deve essere $t < -\frac{4}{3}$ oppure $0 < t < 3$, dunque $0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$ oppure $1 < x < 8$.
- (m) C.E.: $(\frac{1}{16}, +\infty)$. Riscriviamo il secondo logaritmo in base 2, ottenendo $\frac{\log_2 16}{\log_2 \frac{1}{4}} = -\frac{\log_2 16}{2} = -2$. Deve dunque essere $\log_2(4 - \log_{\frac{1}{2}} x) \leq -2$ ovvero $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \frac{15}{4}$, da cui si ottiene $\frac{1}{16} < x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{4}}$.
- (n) C.E.: $(-5, 1) \setminus \{-1\}$. L'insieme delle soluzioni è $[-\frac{21}{5}, 1) \setminus \{-1\}$.
- (o) C.E.: $(0, 1)$ (si trova imponendo che l'argomento sia positivo e la base positiva e diversa da 1). Poiché la base risulta sempre minore di 1, il logaritmo è positivo quando l'argomento è (positivo e) minore di 1. Deve dunque essere $x \in (\sqrt{24} - 4, 1)$.
- (p) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{1\}$. Deve essere $(x > 1 \text{ e } x^3 > 2)$ oppure $(0 < x < 1 \text{ e } x^3 < 2)$; le soluzioni sono dunque date da $x \in (0, 1) \cup (2^{\frac{1}{3}}, +\infty)$.

$$(q) \text{ C.E.: } (0, +\infty). \log_8 \sqrt{x} = \frac{\log_8 x}{2} = \frac{\log_4 x}{2 \log_4 8} = \frac{\log_4 x}{3} = \log_4 \sqrt[3]{x};$$

$$\log_4 \left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} \right) < \frac{5}{3} \iff \log_4 x^{\frac{5}{3}} < \frac{5}{3} \iff \log_4 x < 1.$$

L'insieme delle soluzioni è l'intervallo $(0, 4)$.

$$(r) \text{ C.E.: } (-\infty, -3) \cup (3, +\infty). \text{ L'insieme delle soluzioni è } (-\infty, -3) \cup \left[3 \frac{e+1}{e-1}, +\infty \right).$$

$$(s) \text{ C.E.: } (3, +\infty) \setminus \{4\}. \text{ L'insieme delle soluzioni è } (3, 4).$$

(t)

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ \sqrt{x^2 - 1} < x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [1, +\infty) \\ x^2 - 1 < (x - 1)^2 \end{cases}$$

Poiché la disequazione è verificata per $x < 1$, il sistema non ha soluzioni.

$$(u) e^{\frac{\log x}{x}} > 1 \iff \frac{\log x}{x} > 0 \iff x > 1.$$

$$(v) \text{ Prendendo il logaritmo naturale di entrambe i membri, la disequazione data equivale a } (4x - 6) \log x \geq (x^2 - x) \log x \iff (x^2 - 5x + 6) \log x \leq 0; \text{ l'insieme delle soluzioni è } (0, 1] \cup [2, 3].$$

$$(w) \text{ C.E.: } (-4, -1) \cup (1, +\infty). \log_2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 4} \geq \frac{1}{2} \log_2 \frac{(x + 4)^2}{x^2 - 1} = \log_2 \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 4} \geq \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 - 1}} \iff x \in \left(-4, -\frac{17}{8} \right].$$

$$(z) \text{ C.E.: } (-\infty, -1) \cup (2, +\infty). \log_2 \frac{x + 1}{x - 1} < -\log_2 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = \log_2 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

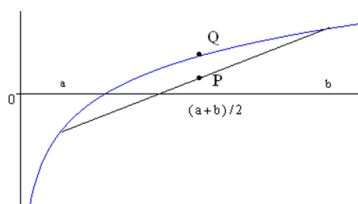
$$\frac{x + 1}{x - 1} < \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)} \iff (x - 2)(x + 1) < x^2 + 1.$$

la disequazione è verificata per $x > -3$; tenendo conto del C.E., deve essere $x \in (-3, -1) \cup (2, +\infty)$.

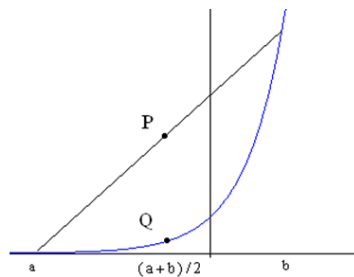
(7.14) Il significato geometrico della maggiorazione è illustrato nella *Figura 7.14* successiva, dove Q è il punto di ordinata $\log \frac{a+b}{2}$, mentre P è il punto di ordinata $\frac{\log a + \log b}{2}$. Sostanzialmente il risultato stabilisce che in ogni intervallo (a, b) il grafico della funzione logaritmo sta al di sopra del segmento che unisce i punti del grafico di ascissa a e b ; questa proprietà è nota in analisi come concavità della funzione logaritmo naturale ed è valida per tutti i logaritmi di base maggiore di 1, mentre per quelli di base minore di 1 vale la proprietà opposta che viene detta convessità.

$$\log \sqrt{ab} \leq \log \frac{a+b}{2} \iff 2\sqrt{ab} \leq a+b \iff 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

che è ovviamente vera; in particolare si deduce che nella maggiorazione data vale il segno di uguaglianza solo se $a = b$.



7.14



7.15

(7.15)

Il significato geometrico della minorazione è illustrato nella *Figura 7.15* precedente, dove Q è il punto di ordinata $e^{\frac{a+b}{2}}$, mentre P è il punto di ordinata $\frac{e^a + e^b}{2}$. Sostanzialmente il risultato stabilisce che in ogni intervallo (a, b) il grafico della funzione esponenziale sta al di sotto del segmento che unisce i punti del grafico di ascissa a e b ; tenendo conto di quanto detto nella soluzione del problema precedente, questa proprietà è detta convessità della funzione esponenziale ed è valida qualunque sia la base.

$$(e^{\frac{a}{2}})^2 + (e^{\frac{b}{2}})^2 \geq 2e^{\frac{a}{2}} e^{\frac{b}{2}} \iff (e^{\frac{a}{2}} - e^{\frac{b}{2}})^2 \geq 0$$

che è ovviamente vera; in particolare si deduce che nella minorazione data vale il segno di uguaglianza solo se $a = b$.

(7.16)

(a) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

La funzione è positiva se $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, negativa se $x \in (0, 2) \setminus \{1\}$, nulla se $x = 0$ e se $x = 2$.

(b) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

La funzione è positiva se $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, negativa se $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{-1, 0, 1\}$, nulla se $x = 0$ o $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

(c) C.E.: $[1, +\infty)$.

La funzione è sempre positiva, eccetto se $x = 1$, valore per cui si annulla.

(d) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{1\}$.

La funzione è positiva se $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$, negativa se $x \in (\frac{1}{e}, e) \setminus \{1\}$, nulla se $x = \frac{1}{e}$ e se $x = e$.

(e) C.E.: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

La funzione è sempre positiva.

(f) C.E.: $[-1, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$.

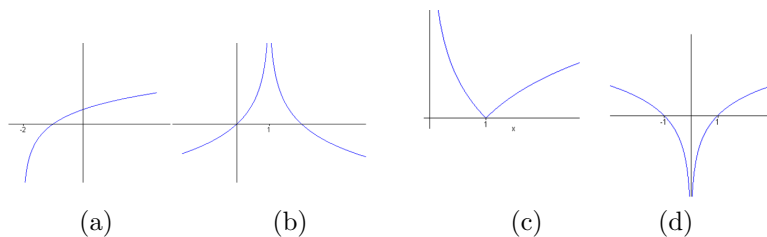
La funzione è positiva se $x \in (-1, 0)$, negativa se $x \in (0, 1) \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$, nulla se $x = -1$, $x = 0$ oppure $x = 1$.

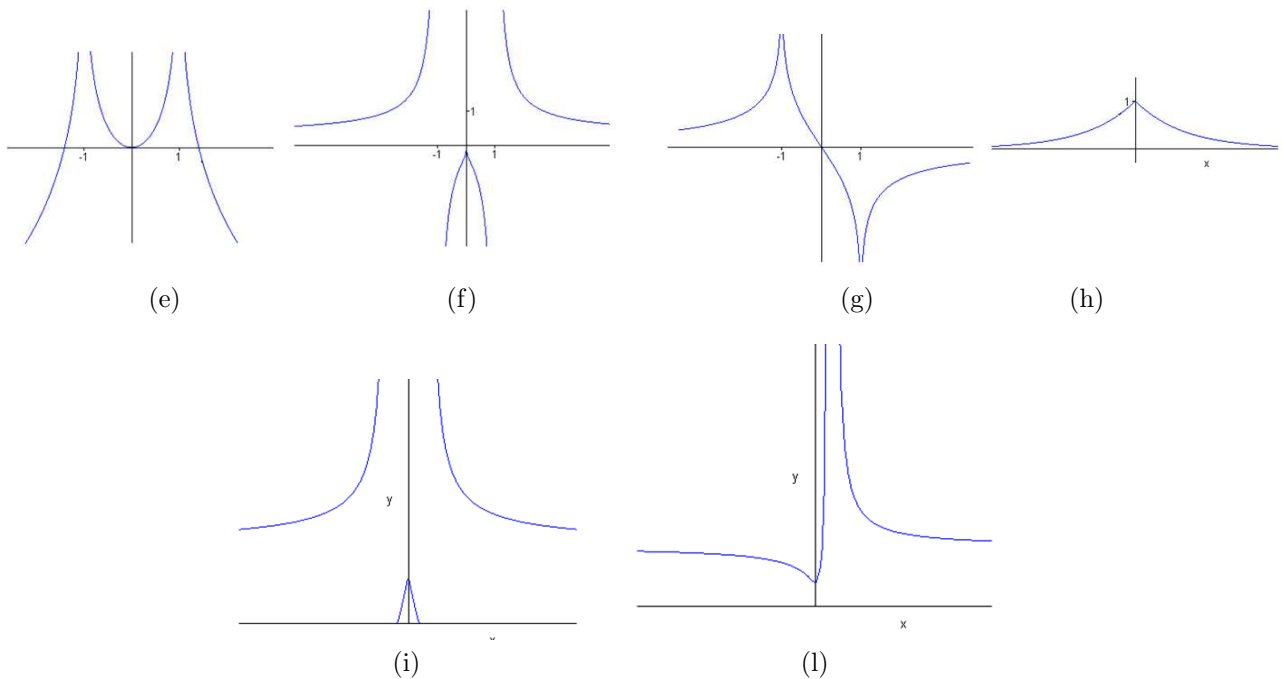
(g) C.E.: $\mathbb{R}$.

La funzione è sempre positiva, eccetto che se $x = 0$, valore per cui si annulla.

(h) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{-1, \log 2\}$.

La funzione è positiva se $x \in (-\infty, -2) \cup (\log 2, +\infty)$, negativa se $x \in (-2, \log 2) \setminus \{-1, 0\}$, nulla se $x = -2$ e se $x = 0$.

(7.17)



TRIGONOMETRIA

(8.1) Basta applicare la formula di passaggio da un sistema di misura all'altro.

- a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{3}{2}\pi$; c) 2π ; d) $\frac{\pi}{180}$; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\frac{3}{4}\pi$; g) $\frac{5}{4}\pi$; h) $\frac{\pi}{12}$; i) $\frac{105}{1800}\pi$; j) $\frac{130025}{1800000}\pi$;
 k) $\frac{145025}{1800000}\pi$; l) $22^\circ 30'$; m) 360° ; n) 270° ; o) 120° ; p) $57^\circ 17' 45''$; q) 15° ; r) $67^\circ 30'$;
 s) 330° ; t) 252° ; u) $82^\circ 30'$; v) 52° .

(8.2)

- a) terzo; b) primo; c) terzo; d) secondo; e) secondo; f) primo; g) secondo; h) quarto;
 i) quarto; j) terzo; k) secondo; l) terzo; m) primo; n) primo.

(8.3) Ricordare che una funzione $f(x)$ è *periodica di periodo* $T > 0$ se T è il più piccolo numero positivo tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni x nel dominio della funzione.

(a) Il periodo è 2π ; infatti

$$\cos(x + 2\pi - 2) = \cos(x - 2).$$

(b) Il periodo è $\frac{2}{3}\pi$; infatti

$$\sin\left[3\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{\pi}{8}\right] = \sin\left(3x + 2\pi + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right).$$

(c) Il periodo è 8; infatti

$$\cos\left[\frac{\pi}{4}(x + 8) - 2\right] = \cos\left(\frac{\pi}{4}x + 2\pi - 2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x - 2\right).$$

(d) Il periodo è $\frac{\pi}{3}$; infatti

$$\tan\left[3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \tan(3x + \pi) = \tan 3x.$$

(e) Il periodo è 6π ; infatti la prima funzione ha periodo 2π , la seconda 6π , e 6π è il più piccolo multiplo intero positivo dei due periodi.

(f) Il periodo è 12π ; infatti la prima funzione ha periodo 4π , la seconda 6π .

(g) Osserviamo che per la formula di Werner è

$$\cos 3x \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos 2x),$$

che è la somma di una funzione periodica di periodo $\frac{\pi}{4}$ con una di periodo π . Quindi il suo periodo è π .

(h) Il periodo è π ; infatti la prima funzione ha periodo π , la seconda $\frac{\pi}{2}$.

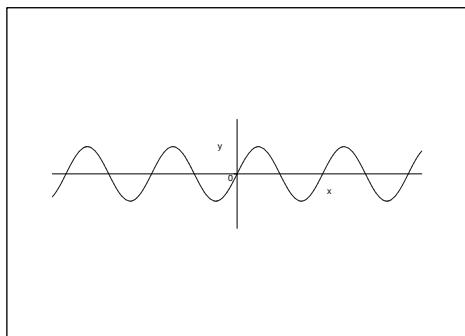
(i) La funzione non è periodica; infatti la prima ha periodo 2π la seconda ha periodo 2 e non esiste alcun multiplo intero di 2π che sia uguale ad un multiplo intero di 2.

(8.4) Negli esercizi da (g) fino a (l) si usi l'identità

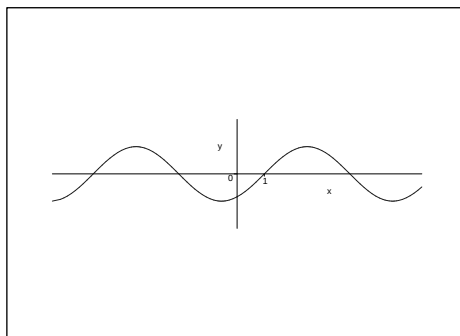
$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$$

con $\varphi \in \mathbb{R}$ da calcolare opportunamente (vedi ESEMPIO 206 del Capitolo 8).

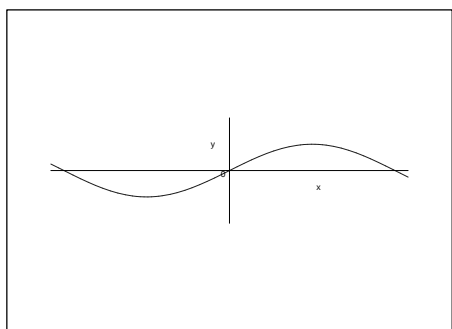
ESERCIZIO (8.4) (a) $x \longrightarrow \sin 2x$



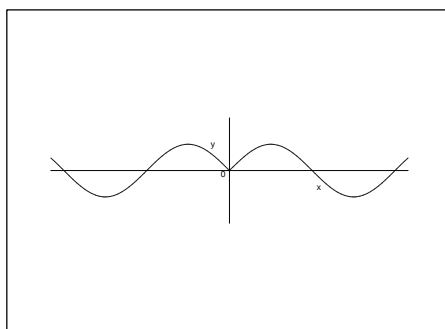
ESERCIZIO (8.4) (b) $x \longrightarrow \sin(x - 1)$



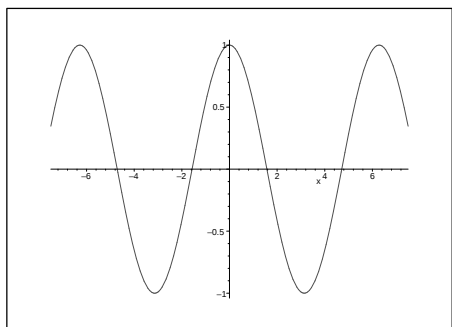
ESERCIZIO (8.4) (c) $x \longrightarrow \sin \frac{x}{2}$



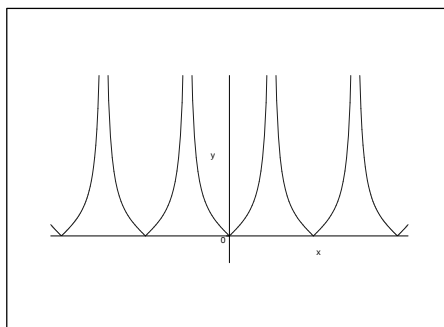
ESERCIZIO (8.4) (d) $x \longrightarrow \sin |x|$



ESERCIZIO (8.4) (e) $x \rightarrow \cos |x|$



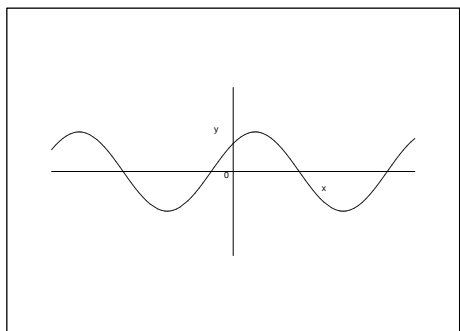
ESERCIZIO (8.4) (f) $x \rightarrow |\tan x|$



ESERCIZIO (8.4) (g) $x \rightarrow \sin x + \cos x$

Osservare che

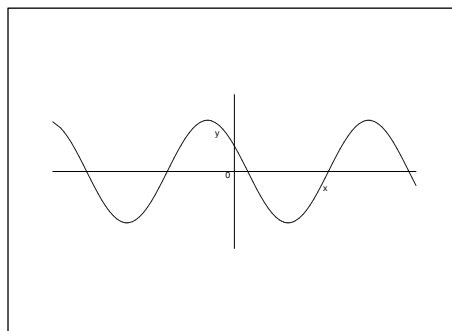
$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right);$$



ESERCIZIO (8.4) (h) $x \rightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x$

Osservare che

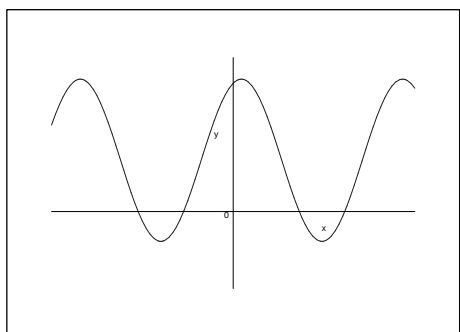
$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \sin \left(x + \frac{5}{6} \pi \right)$$



ESERCIZIO (8.4) (i) $x \rightarrow 2 + \sin x + 3 \cos x$

Osservare che

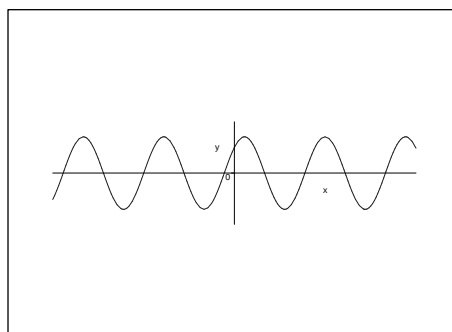
$$2 + \sin x + 3 \cos x = 2 + \sqrt{10} \sin(x + \arctan 3)$$



ESERCIZIO (8.4) (j) $x \rightarrow \sin 2x + \cos 2x$

Osservare che

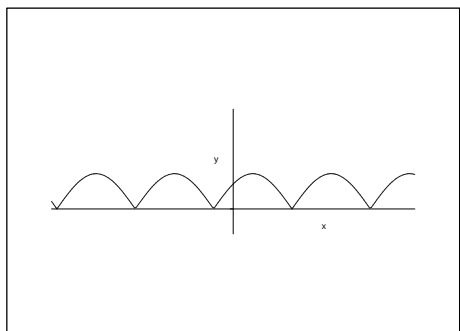
$$x \rightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$



ESERCIZIO (8.4) (k) $x \longrightarrow |\sin x + \cos x|$

Osservare che

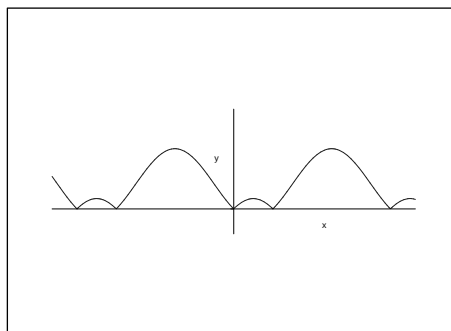
$$x \longrightarrow |\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$



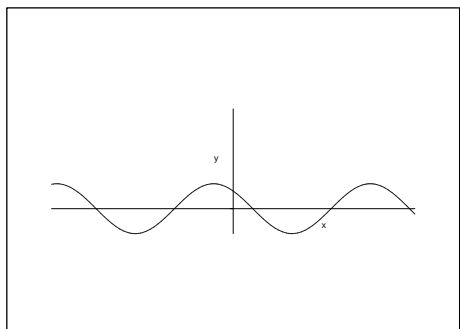
ESERCIZIO (8.4) (l) $x \longrightarrow |1 - \sin x - \cos x|$

Osservare che

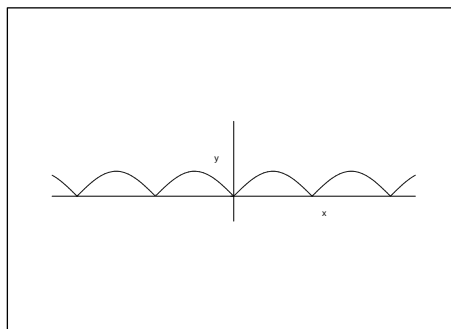
$$x \longrightarrow |1 - \sin x - \cos x| = \left| 1 - \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$



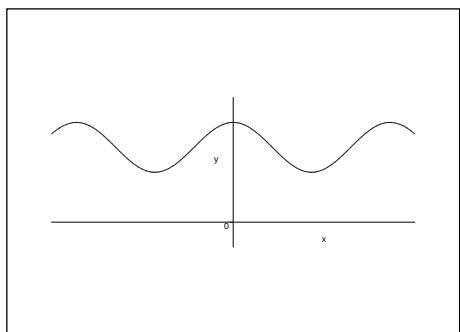
ESERCIZIO (8.4) (m) $x \longrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$



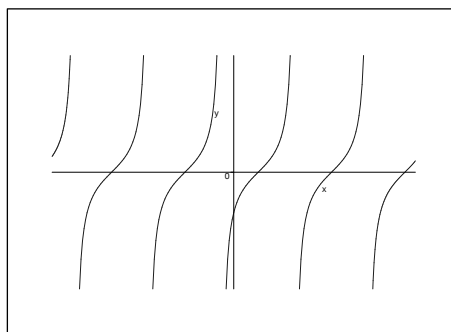
ESERCIZIO (8.4) (n) $x \longrightarrow |\sin |x||$



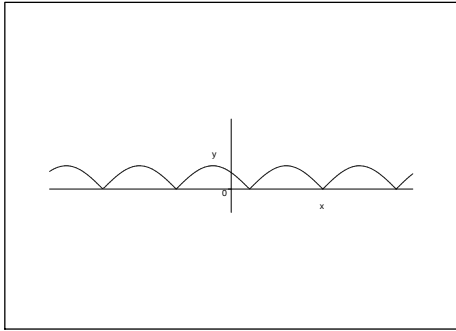
ESERCIZIO (8.4) (o) $x \longrightarrow 3 + \cos x$



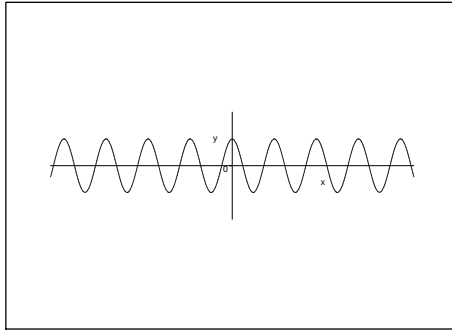
ESERCIZIO (8.4) (p) $x \longrightarrow \tan \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$



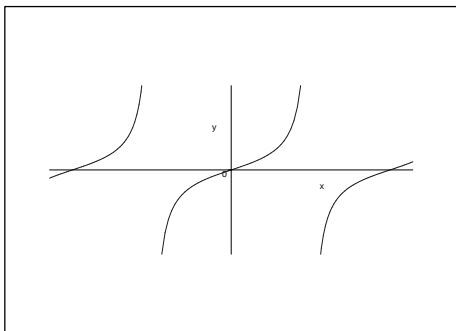
ESERCIZIO (8.4) (q) $x \longrightarrow \left| \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right|$



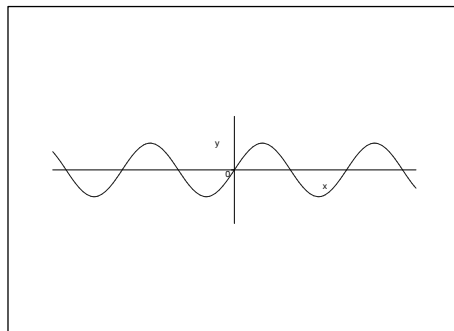
ESERCIZIO (8.4) (r) $x \longrightarrow \cos 4x$



ESERCIZIO (8.4) (s) $x \longrightarrow \tan \frac{x}{3}$



ESERCIZIO (8.4) (t) $x \longrightarrow \sin \frac{3}{2} x$



(8.5)

(a) $\alpha = 60^\circ$, $b = 10 \sin 30^\circ = 5$, $a = 10 \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}$.

(b) $\cos \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = 75^\circ 31'$, $\beta = 14^\circ 29'$, $b = 16 \sin \beta = 4$, $a = 16 \cos \beta = 4\sqrt{15}$.

(c) $\sin \beta = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2}{5}\sqrt{5}$
 $\alpha = 26^\circ 34'$, $\beta = 63^\circ 26'$, $b = 0,6 \sin \beta = 0,537$, $a = 0,6 \cos \beta = 0,268$.

(d) $b = 3$, $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{3}{5}$, $\alpha = 53^\circ 8'$, $\beta = 36^\circ 52'$.

(e) $\beta = 15^\circ$; $c = \frac{a}{\sin 75^\circ} = 18,63$; $b = c \cos 75^\circ = 4,82$.

(f) $\cos \beta = \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin \beta = \cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = 70^\circ 31'$, $\beta = 19^\circ 29'$, $c = \frac{b}{\sin \beta} = 24$, $a = c \cos \beta = 16\sqrt{2}$.

(g) $c = 2\sqrt{3}$, $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

(h) $\alpha = 53^\circ 40'$; $c = \frac{72,5}{\sin \beta} = 122,37$; $a = c \sin \alpha = 98,58$.

(8.6)

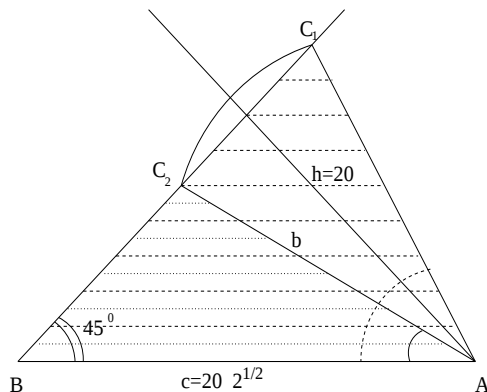
(a) $\beta = 53^\circ 7' 48''$, $\gamma = 96^\circ 52' 12''$, $a = 5,036$, $b = 8,058$

(b) $\alpha = 36^\circ 52' 12''$, $\beta = 73^\circ 44' 23''$, $\gamma = 69^\circ 23' 25''$, $a = 25$, $b = 40$

(c) Innanzitutto è verificata la condizione necessaria, perché $b > c \sin \beta$ (infatti $b = 20\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$, $c \sin \beta = 20$). Inoltre esistono due soluzioni perché $b < c$. Applicando il *teorema dei seni*, si ottiene:

$$\frac{\sin \gamma}{20\sqrt{2}} = \frac{\sin 45^\circ}{20\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = 0,966 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 75^\circ \\ \alpha_1 = 60^\circ \\ a_1 = 20\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \gamma_2 = 105^\circ \\ \alpha_2 = 30^\circ \\ a_2 = 20(\sqrt{3} - 1) \end{cases}$$



(d) La condizione necessaria per l'esistenza del triangolo ($b > c \sin \beta$) è verificata, in quanto $c \sin \beta = 20 < 40$.

È verificata anche la condizione di unicità di soluzione, in quanto $b > c$. Appliciamo il *teorema dei seni*:

$$\frac{\sin \gamma}{20\sqrt{2}} = \frac{\sin 45^\circ}{40} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 30^\circ$$

(la soluzione $\gamma = 150^\circ$ è da scartare).

Infine $\alpha = 105^\circ$ e $a = 54,64$.

(e) $\beta = 19^\circ 28' 16''$, $h = 12 \sin \beta = 4 = b$; esiste dunque un unico triangolo ed è quello rettangolo.

Infine $\gamma = 90^\circ$, $a = 8\sqrt{2} = 11,31$, $\alpha = 70^\circ 31' 44''$

(f) $\beta = 16^\circ 36' 6''$, $h = 14 \sin \beta = 4 > b$, quindi non esiste alcun triangolo.

(g) Ricaviamo $\cos \beta = -\frac{1}{9}$ e quindi $\beta = 96^\circ 22' 46''$, $\alpha = 48^\circ 11' 23''$, $\gamma = 35^\circ 25' 51''$.

I lati sono ottenuti dal *teorema dei seni*:

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = 1,29 \quad b = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 1,71.$$

(h) $\alpha = 70^\circ 31' 44''$. Dal *teorema di Carnot* otteniamo $a^2 = 13 - 12 \cos \alpha = 9$ ovvero $a = 3$; inoltre $\gamma = \alpha$ e $\beta = 38^\circ 56' 32''$.

(i) $\alpha = 104^\circ 28' 39''$, $\sin \alpha = \frac{0,968}{8}$; dal *teorema di Carnot* $a^2 = 52 - 48 \cos \alpha = 64$ cioè $a = 8$. Appliciamo il *teorema dei seni*

$$\frac{\sin \beta}{6} = \frac{\sin \gamma}{4} = \frac{0,968}{8} \Rightarrow \beta = 46^\circ 34' 3'', \quad \gamma = 28^\circ 57' 18''.$$

(8.7) (a) Gli angoli sono uguali a quelli formati dalle rette $y = 3x$ e $y = x$ (parallele alle precedenti).

Essendo $\tan \alpha = 3$, $\tan \beta = 1$, si ha

$$\tan \gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 26^0 33' 54''.$$

L'altro angolo è dunque $\gamma' = 153^0 26' 6''$.

(b) Gli angoli sono quelli che la retta $y = \frac{3}{2}x$ forma con l'asse x .
Dunque $\gamma = \arctan \frac{3}{2} = 56^0 18' 36''$, $\gamma' = 123^0 41' 24''$.

(c) Gli angoli sono quelli tra le rette $y = -x$ e $y = \frac{x}{4}$. Essendo $\tan \alpha = -1$ e $\tan \beta = \frac{1}{4}$, si ha:

$$\tan \gamma = \tan(\alpha - \beta) = -\frac{5}{3}, \quad \gamma = 120^0 57' 50'', \quad \gamma' = 59^0 2' 10''.$$

(8.8)

$$(a) \quad \cos \alpha = 2 \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(b) \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(c) \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \tan \alpha = -\frac{4}{3}$$

$$(d) \quad \sin \alpha = -\frac{7}{25} \quad \tan \alpha = \frac{7}{24}$$

$$(e) \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{8} \quad \tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$(f) \quad \sin \alpha = -2 \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(8.9)

$$(a) \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

$$(b) \quad \tan \alpha = -1 \quad y = \frac{10}{3} - x$$

$$(c) \quad \tan \alpha = -\frac{3}{4} \quad y = -\frac{3}{4}x - 4$$

$$(d) \quad \tan \alpha = \frac{7}{24} \quad y = -\frac{295}{96} + \frac{7}{24}x$$

(8.10)

$$(a) \quad \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = \\ = \sin \alpha (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$(b) \quad \cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \\ = \cos \alpha (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) = \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

$$(c) \quad \sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$(d) \quad \cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ = (2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 4 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1.$$

(8.11)

- (a) 0 (b) $-\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$ (c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$
- (d) $-4\sin\alpha\cos\alpha$ (e) 0 (f) $\frac{4\tan\alpha}{(1-\tan\alpha)^2}$
- (g) $\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$ (h) $-\tan\alpha$ (i) 1
- (l) $2\cos^2\alpha$ (m) $\frac{4\sin\alpha\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ (n) $-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$
- (o) $\frac{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$ (p) $2(\cos\alpha - \sin\alpha)$ (q) $2\frac{1+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$
- (r) $\frac{1}{4}$ (s) $-\frac{\sin^2\alpha}{4}$ (t) $\frac{4\cos\alpha - \sin^2\alpha}{2(\cos\alpha + 1)}$
- (u) $\frac{3}{4}(1 - \cos\alpha)$ (v) $\frac{1}{\cos\alpha}$ (z) $3 - \cos\alpha - 3\cos^2\alpha$

(8.12)

Poniamo $t = \tan \frac{\alpha}{2}$

- (a) $-\frac{2t^2+2t}{t^2+1}$ (b) $\frac{2t^4-4t^3+2t^2+4t}{(t^2+1)^2}$ (c) $\frac{4t(1-t^2)}{t^4-6t^2+1}$
- (d) $\frac{1-2t^2}{1+t^2}$ (e) $\frac{1-t}{1+t}$ (f) t

(8.13)

- (a) $2\sin\frac{5}{2}\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$
- (b) $2\sin\alpha\cos4\alpha$
- (c) $-2\cos\frac{5}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{5}{2}\alpha\right)$
- (d) $2\cos\alpha\cos2\beta$
- (e) $\sin\alpha - \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\frac{\pi}{2}}{2}$
- (f) $\frac{1}{2}(\sin5\alpha + \sin\alpha)$
- (g) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{6}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin2\alpha\right)$
- (h) $\sin(\alpha - \beta) - [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\beta - \alpha)] = -\sin(\alpha + \beta)$

(8.14)

Supponiamo ad esempio siano noti a , b , γ e proviamo che l'area del triangolo è data da $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.
Se $\gamma = 90^\circ$ il risultato è ovvio. Distinguiamo due casi, verificando che il valore $b\sin\gamma$ rappresenta

la misura dell'altezza relativa al lato a in entrambi i casi.

1° caso: $0 < \gamma < 90^\circ$

Indicata con AH l'altezza in questione e considerato il triangolo AHC , si ottiene subito l'asserto in quanto $h = b \sin \gamma$ (vedi Figura (i)).

2° caso : $90^\circ < \gamma < 180^\circ$

Consideriamo nella Figura (ii) il triangolo AHC , si ha:

$$AH = b \sin(180^\circ - \gamma) = b \sin \gamma.$$

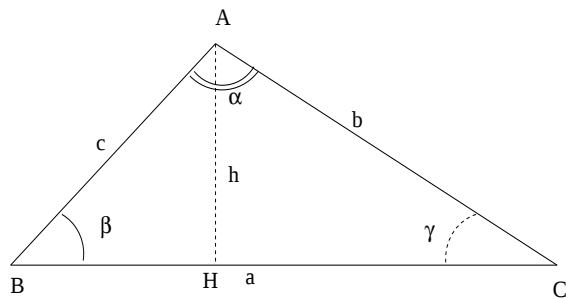


Figura (i)

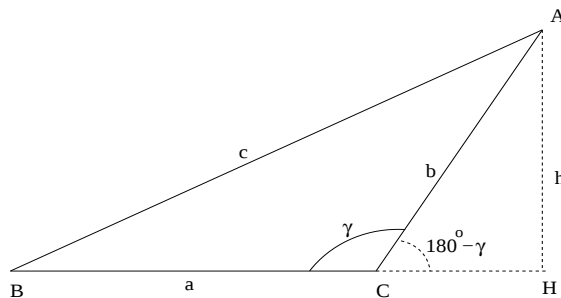


Figura (ii)

(8.15)

(a) $3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $3x = \frac{5\pi}{6} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, e dunque $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2}{3}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
oppure $x = \frac{5\pi}{18} + h\frac{2}{3}\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(b) $x - \frac{\pi}{3} = 2x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x - \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, e dunque $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
oppure $x = \frac{4\pi}{9} + h\frac{2}{3}\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(c) $\frac{\pi}{12} - x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cioè $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) $2x - \frac{\pi}{12} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $2x - \frac{\pi}{12} = -x - \frac{\pi}{3} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, e dunque
 $x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = -\frac{\pi}{12} + h\frac{2}{3}\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(e) $2x = x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $2x = -x + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$; dunque $x = k2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$,
oppure $x = h\frac{2}{3}\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(f) $x - \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi - x + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; dunque $x = \frac{3\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(g) $\sin x = 0$ oppure $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; dunque $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = \frac{4}{3}\pi + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$
oppure $x = \frac{5\pi}{3} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(h) $\cos x = 1$ (la soluzione $\cos x = 2$ non è accettabile) dunque $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $\tan x = 1$ dunque $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(j)

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin^2 x - \sin x + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \sin x < 0 \\ \sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\sin x = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(k) $\cos x = 1$ oppure $\cos x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (la soluzione $\cos x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ non è accettabile), quindi $x = k2\pi, \in \mathbb{Z}$
oppure $x = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + h2\pi, h \in \mathbb{Z}$

(l) Nessuna soluzione.

(m) $\tan x = \pm 1$ ovvero $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

(n) $\cos x = 0$ oppure $\cos x = 1$ da cui $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = h2\pi, h \in \mathbb{Z}$.

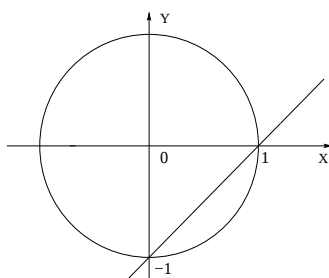
(o) Poiché i valori per cui $\cos x = 0$ non risolvono l'equazione, questa equivale a $\tan x = -1$ e dunque $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(p) Posto $X = \cos x, Y = \sin x$:

$$\begin{cases} Y - X + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono (vedi figura): $(X, Y) = (1, 0)$ oppure $(X, Y) = (0, -1)$, da cui

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = k2\pi, \text{ oppure } x = -\frac{\pi}{2} + h2\pi, h, k \in \mathbb{Z}.$$



(q) Equivale a $\cos x - \sqrt{3}\sin x + 1 = 0$. Posto $X = \cos x, Y = \sin x$:

$$\begin{cases} X - \sqrt{3}Y + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \pi + k2\pi \text{ oppure } x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, h, k \in \mathbb{Z}.$$

(r) Sostituendo il termine noto con $\frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x)$, possiamo riscrivere:

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

Poiché i valori che annullano il *coseno* non risolvono l'equazione, possiamo dividere per $\cos^2 x$:

$$\tan^2 x + 2 \tan x - 1 = 0$$

Questa è un'equazione di secondo grado in $\tan x$ che per soluzioni $\tan x = -1 \pm \sqrt{2}$, e dunque $x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(s) L'equazione equivale a $\sin^2 + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 1$ ovvero, sostituendo il secondo membro con $\sin^2 x + \cos^2 x$,

$$2\sqrt{3}\sin x \cos x = \cos^2 x,$$

da cui $\cos x = 0$ oppure $\tan x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, che implicano $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = \arctan \frac{1}{2\sqrt{3}} + h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(t) Si sostituisce il termine noto con $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$, l'equazione equivale a

$$\sqrt{3}\sin^2 x + (\sqrt{3} - 1)\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

Dividendo per $\cos^2 x$ (i valori che annullano $\cos x$ non soddisfano l'equazione) si ottiene

$$\sqrt{3}\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - 1 = 0$$

che fornisce

$$\tan x = \frac{(1 - \sqrt{3}) \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm (1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 \end{cases}$$

da cui $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = -\frac{\pi}{4} + h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(u) Il sistema equivale a

$$\begin{cases} x - y = k\pi \\ x + y = \frac{\pi}{3} + h\pi \end{cases}, \quad k, h \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + (h + k)\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{6} + (h - k)\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Poniamo $h + k = m$, $m \in \mathbb{Z}$; di conseguenza $h - k = (h + k) - 2k = m - 2k$, da cui

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + m\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{6} + m\frac{\pi}{2} - k\pi \end{cases}, \quad m, k \in \mathbb{Z}.$$

(v)

$$\begin{cases} \sin y = \sqrt{3} \sin x \\ \tan x \tan y > 0 \\ \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \frac{3 \sin^2 x}{1 - 3 \sin^2 x} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y = \sqrt{3} \sin x \\ \tan x \tan y > 0 \\ \sin^2 x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

che equivalgono a

$$\begin{cases} \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x \tan y > 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x \tan y > 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

da cui segue

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ y = \frac{\pi}{3} + h2\pi \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ y = \frac{2\pi}{3} + h2\pi \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ y = -\frac{\pi}{3} + h2\pi \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ y = -\frac{2\pi}{3} + h2\pi \end{array} \right.$$

$h, k \in \mathbb{Z}$.

(w) I valori per cui $\cos x = 0$ ($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) non risolvono l'equazione.
Possiamo dunque dividere per $\cos^4 x$:

$$\tan^4 x - 4 \tan^2 x + 3 = 0, \Rightarrow \tan x = \pm 1, \pm \sqrt{3},$$

da cui $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(x) L'equazione può essere riscritta nella forma

$$\sin 2x = \frac{3}{2} + \frac{\cos x}{|\cos x|},$$

cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x > 0 \\ \sin 2x = \frac{5}{2} \end{array} \right. \text{ (che non ha soluzioni) oppure } \left\{ \begin{array}{l} \cos x < 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{array} \right. .$$

Nel secondo sistema l'equazione ha come soluzioni $2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $2x = \frac{5\pi}{6} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$,
da cui $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = \frac{5\pi}{12} + h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$. Perché sia poi soddisfatta anche la condizione
sul coseno deve essere $x = \frac{\pi}{12} + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = \frac{5\pi}{12} + (2h+1)\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(y)

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}.$$

Poiché

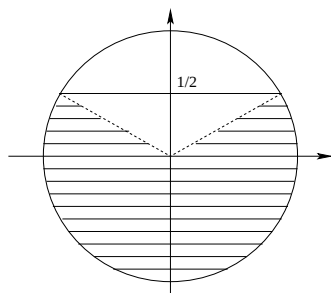
$$\sqrt{2} + \frac{1}{1+x^2} > \sqrt{2},$$

l'equazione non ha soluzioni.

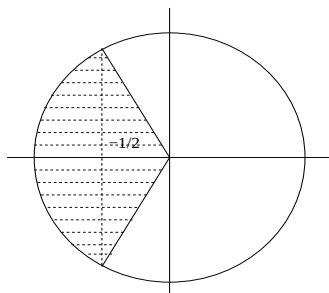
(z) L'equazione equivale a $\sin^2 x = \frac{4-\alpha}{7}$ ed ammette soluzioni se e solo se $0 \leq \frac{4-\alpha}{7} \leq 1$, cioè
 $-3 \leq \alpha \leq 4$. Se $\alpha = -3$ allora $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Se invece $-3 < \alpha < 4$ allora $x = \pm \arcsin \sqrt{\frac{4-\alpha}{7}} + k2\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = \pi \pm \arcsin \sqrt{\frac{4-\alpha}{7}} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$. Infine per $\alpha = 4$ risulta $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(8.16)

(a) $5\frac{\pi}{6} + k2\pi < x < 13\frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (b) $\frac{2}{3}\pi + k2\pi < x < \frac{4}{3}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

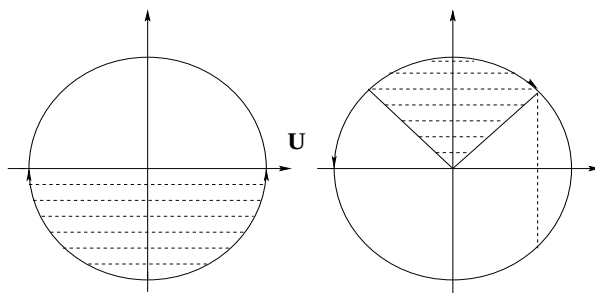


8.16 (a)



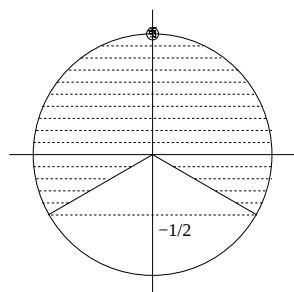
8.16 (b)

(c) $\sin x < 0$ oppure $\sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ da cui $\pi + h2\pi < x < 2\pi + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, oppure $\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

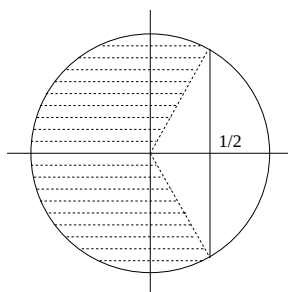


(d) $-\frac{1}{2} < \sin x < 1$ da cui $-\frac{\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{7\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(e) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 > 0$ da cui $\cos x < \frac{1}{2}$ oppure $\cos x > 2$; quest'ultima non ha soluzioni, mentre la prima è risolta da $\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



8.16 (d)



8.16 (e)

(f) Equivale a $\tan^2 x \geq 3$ cioè $\tan x \geq \sqrt{3}$ oppure $\tan x \leq -\sqrt{3}$. Dunque deve essere $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ oppure $\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi$, cioè $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(g) Posto $X = \cos x$, $Y = \sin x$

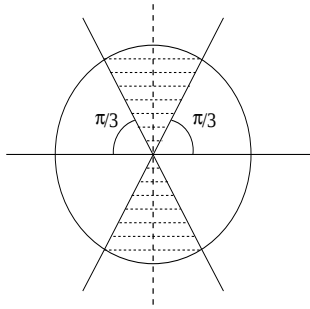
$$\begin{cases} Y + X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui $-\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

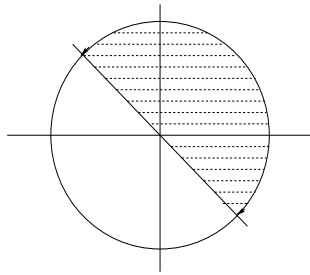
(h) Posto $X = \cos x$, $Y = \sin x$

$$\begin{cases} Y + X - 1 < 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

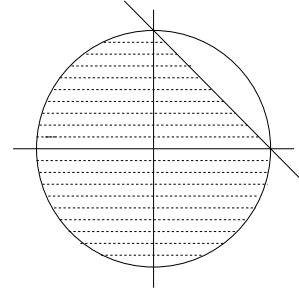
da cui $\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



8.16 (f)



8.16 (g)



8.16 (h)

(i) $\frac{1}{2}(\sin x - \sqrt{3} \cos x) + \frac{1}{2}(\cos x - \sqrt{3} \sin x) \leq 0$ che equivale a $\sin x + \cos x \geq 0$; a questo punto procediamo come nell'esercizio precedente ed otteniamo $-\frac{\pi}{4} + k2\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + k2\pi$.

(j) $\cos x = 0$ oppure $\tan^2 x > 1$, da cui $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(k) $(\cos x = 0 \text{ e } \sin x = 1)$ oppure $\cos^3 x (\tan^3 x + 1) > 0$; queste condizioni equivalgono alle seguenti

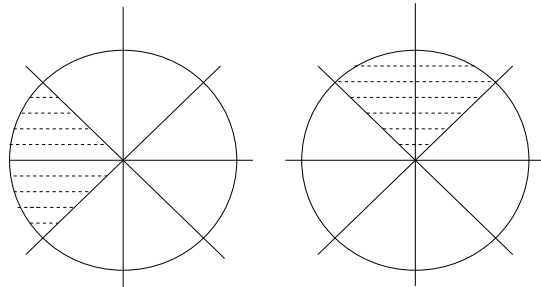
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} \cos x > 0 \\ \tan x > -1 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} \cos x < 0 \\ \tan x < -1 \end{array} \right.$$

da cui otteniamo $-\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(l) $2 \cos^2 x (\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x) < 0$ ovvero $(2 \cos^2 x - 1)(\cos x + \sin x) < 0$ che equivale a

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oppure } \cos x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x + \sin x < 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x + \sin x > 0 \end{array} \right.$$

Le soluzioni sono: $\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{5}{4}\pi + k2\pi$, $x \neq \frac{3}{4}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



(m) Utilizziamo la formula $\tan x = \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$. Poniamo $t = \tan \frac{x}{2}$ e sostituiamo nel testo:

$$\frac{t(t^2 + 1)}{t^2 - 1} > 0.$$

Le soluzioni sono $-1 < t < 0$ oppure $t > 1$. Dunque $-\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{x}{2} < k\pi$ oppure $\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ cioè $-\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < k2\pi$ oppure $\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Queste condizioni si possono sintetizzare scrivendo $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(n) Utilizziamo la formula $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$, ottenendo $3 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) \cot x \geq 0$, da cui seguono

$$\begin{cases} \cos^2 \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2} \\ \cot x \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos^2 \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \\ \cot x \leq 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi \leq \frac{x}{2} \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ \frac{\pi}{2} + k\pi \leq x < \pi + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

ovvero

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} + k\pi \leq x < \pi + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dal primo sistema si ottiene $2k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ oppure $x = \frac{3}{2}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dal secondo sistema si ottiene $\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x < \pi + k2\pi$ oppure $x = \frac{3}{2}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

In definitiva $k2\pi < x < \pi + k2\pi$ oppure $x = \frac{3}{2}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(o) $\tan x < 0$ oppure $\tan x > 1$. Le soluzioni sono dunque $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(p) Perché sia definita $\tan \frac{x}{2}$ deve essere $x \neq \pi + k2\pi$. Utilizzando le formule parametriche, la disequazione diventa $\tan^2 \frac{x}{2} \left(\tan^2 \frac{x}{2} - 1 \right) > 0$ cioè

$$\begin{cases} \tan \frac{x}{2} \neq 0 \\ \tan \frac{x}{2} > 1 \quad \text{oppure} \quad \tan \frac{x}{2} < -1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{3}{2}\pi + k2\pi \\ x \neq \pi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(q) La disequazione ha senso se

$$\begin{cases} \cos 2x \neq 1 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La disequazione equivale a

$$\sin x \cos x > \cos^2 x \Longleftrightarrow \cos x (\sin x - \cos x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

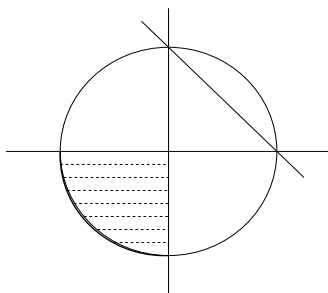
(r) La disequazione ha senso se $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, ed equivale a

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x \cos x} < 0$$

Ponendo $Y = \sin x$, $X = \cos x$ diventa

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ \frac{Y + X - 1}{XY} < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $\pi + k2\pi < x < \frac{3}{2}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



(s) La disequazione ha senso per $x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ ed equivale a

$$\frac{4 \sin^3 x \cos x}{(\cos^2 x - \sin^2 x)^2} \leq 0 \iff -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq k\pi, \quad x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

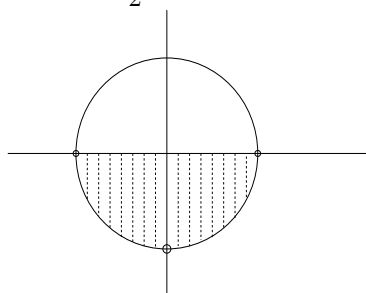
(t) La disequazione proposta equivale alla seguente:

$$\frac{\sin x (\cos x + 1)}{\sqrt{2} \cos^2 x} < 0$$

Ponendo $X = \cos x$, $Y = \sin x$ ci siamo ricondotti a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{Y(X+1)}{X^2} < 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}.$$

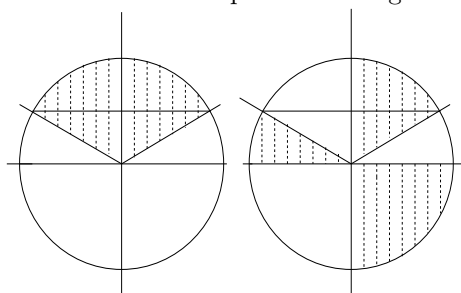
Le soluzioni sono $\pi + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi$, $x \neq \frac{3}{2}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



(u) La disequazione proposta equivale alla seguente

$$\frac{(2 \sin^2 x + \sin x - 1) \tan x}{\sin x - \sqrt{3} \cos x + 1} \geq 0$$

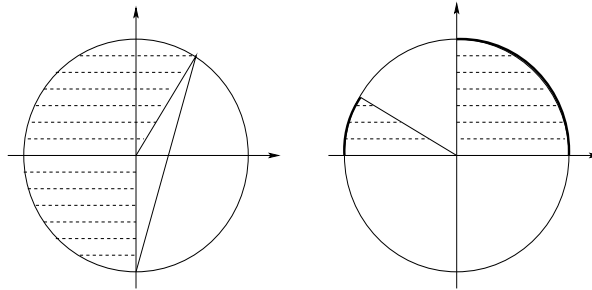
Consideriamo il numeratore: $2 \sin^2 x + \sin x - 1 \geq 0 \iff \sin x \leq -1$ oppure $\sin x \geq \frac{1}{2}$ (figura sotto, a sinistra). Il segno del numeratore è espresso nella figura sotto, a destra.



Consideriamo il denominatore: ponendo $X = \cos x$, $Y = \sin x$ otteniamo:

$$\begin{cases} Y - \sqrt{3}X + 1 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}.$$

La soluzione geometrica è indicata nella figura sotto, a sinistra.



Infine le soluzioni (figura sopra, a destra) sono $0 + k2\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$ oppure $\frac{5}{6}\pi + k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi$, $x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(v) Studiamo il segno del numeratore: $\tan^2 2x \geq 1$ equivale a $\tan 2x \geq 1$ oppure $\tan 2x \leq -1$ da cui $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}$, con $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Semplifichiamo l'espressione al denominatore per poterne studiare il segno:

$$2 \sin x \cos x + \cos^2 x > 0 \iff \cos^2 x (2 \tan x + 1) > 0.$$

Le soluzioni sono $-\arctan \frac{1}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le soluzioni della disequazione di partenza si hanno quando numeratore e denominatore hanno segno discorde; in definitiva deve dunque essere

$$-\frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\pi \quad \text{oppure} \quad \frac{3}{8}\pi + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{oppure} \\ \frac{13}{8}\pi + k\pi \leq x < -\arctan \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

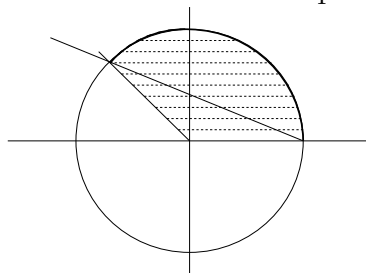
(w) La prima disequazione del sistema ha soluzioni $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mentre la seconda è risolta da $\frac{\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Il sistema ha dunque soluzioni: $\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(x) Ponendo $X = \cos x$ e $Y = \sin x$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} Y + (\sqrt{2} - 1)X > \sqrt{2} - 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Il punto di intersezione tra la retta $Y + (\sqrt{2} - 1)X = \sqrt{2} - 1$ e la circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$ è il punto di coordinate $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, da cui segue (vedi figura) $k2\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



(8.17)

(a) Poniamo $\alpha = 2x$, $\beta = 2y$ con $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; la disuguaglianza assume la forma

$$\frac{\sin 2x + \sin 2y}{2} \leq \sin(x + y).$$

Usando la formula di duplicazione e quelle di addizione:

$$\sin x \cos x + \sin y \cos y \leq \sin x \cos y + \sin y \cos x \iff \sin x(\cos x - \cos y) \leq \sin y(\cos x - \cos y)$$

ovvero

$$(\sin x - \sin y)(\cos x - \cos y) \leq 0.$$

La disuguaglianza è vera perchè in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la funzione *seno* è *crescente*, mentre la funzione *coseno* è *decrecente* (quindi se $x < y$, $\sin x - \sin y < 0$, $\cos x - \cos y > 0$).

L'eguaglianza vale se e solo se $x = y$ cioè $\alpha = \beta$.

(b) Osserviamo che $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$, con $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Analogamente $\cos \beta = \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin y$, con $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Tenuto conto di questo e della disuguaglianza dimostrata nel punto (a) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} &= \frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x + y}{2} = \\ &= \sin\left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \end{aligned}$$

(c) Poniamo $\alpha = 2x$, $\beta = 2y$, con $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

La disuguaglianza proposta equivale alla seguente

$$\tan(x + y) \leq \frac{\tan 2x + \tan 2y}{2}.$$

Otteniamo una disuguaglianza equivalente applicando al primo membro le formule di addizione ed al secondo quelle di duplicazione:

$$\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \leq \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} + \frac{\tan y}{1 - \tan^2 y}.$$

I denominatori sono maggiori di zero in quanto $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$; svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} \tan^3 x + \tan^3 y \geq \tan^2 x \tan y + \tan x \tan^2 y &\iff \tan^2 x(\tan x - \tan y) \geq \tan^2 y(\tan x - \tan y) \\ &\iff (\tan x - \tan y)^2(\tan x + \tan y) \geq 0 \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza è sempre verificata perché $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ e quindi $\tan x > 0$ e $\tan y > 0$.

Vale il segno di eguaglianza se e solo se $\tan x = \tan y$ ovvero $x = y$.

Anche per quest'ultima implicazione si tenga presente che $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

(8.18) Supponiamo che il triangolo sia isoscele in a , b (quindi $a = b$, $\alpha = \beta$); allora dalla relazione $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

ricaviamo $\alpha = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ e quindi:

$$\tan \alpha = \tan\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{\tan \frac{\gamma}{2}}.$$

Sostituendo nella formula proposta,

$$\tan \frac{\gamma}{2} (a \tan \alpha + b \tan \beta) = 2a \tan \frac{\gamma}{2} \tan \alpha = 2a = a + b.$$

Viceversa, supponiamo valga la relazione data e riscriviamola nella forma

$$a \left(1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \alpha \right) + b \left(1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \beta \right) = 0;$$

utilizzando il *teorema dei seni*:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

otteniamo

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = - \frac{1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \beta}{1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \alpha}.$$

Osserviamo che

$$1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \alpha = \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\gamma}{2} \sin \alpha}{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \alpha} = \frac{\cos \left(\frac{\gamma}{2} + \alpha \right)}{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \alpha}.$$

Analogamente

$$1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \beta = \frac{\cos \left(\frac{\gamma}{2} + \beta \right)}{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \beta}.$$

Sostituendo nella relazione sopra e semplificando:

$$(*) \quad \tan \alpha \cos \left(\frac{\gamma}{2} + \alpha \right) + \tan \beta \cos \left(\frac{\gamma}{2} + \beta \right) = 0.$$

Poiché

$$\frac{\gamma}{2} + \alpha = 180^\circ - \left(\frac{\gamma}{2} + \beta \right) \Rightarrow \cos \left(\frac{\gamma}{2} + \alpha \right) = -\cos \left(\frac{\gamma}{2} + \beta \right),$$

da (*) otteniamo

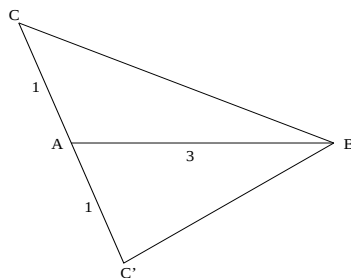
$$\tan \alpha - \tan \beta = 0 \quad \text{oppure} \quad \cos \left(\frac{\gamma}{2} + \beta \right) = 0.$$

Dalla prima equazione segue $\alpha = \beta$, dalla seconda $\frac{\gamma}{2} + \beta = 90^\circ$ e quindi $\frac{\gamma}{2} + \alpha = 90^\circ$, cioè anche in questo caso $\alpha = \beta$.

(8.19) Applicando due volte il teorema del coseno, si ha:

$$BC^2 = 10 - 6 \cos 120^\circ = 13, \quad BC'^2 = 10 - 6 \cos 60^\circ = 7$$

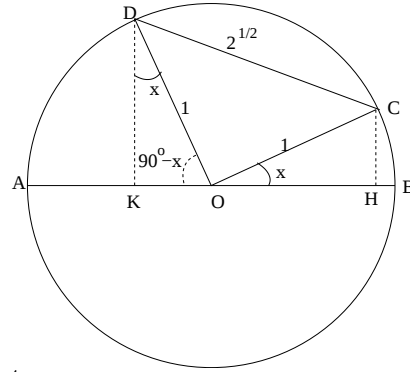
Il perimetro vale $2 + \sqrt{7} + \sqrt{13}$



(8.20)

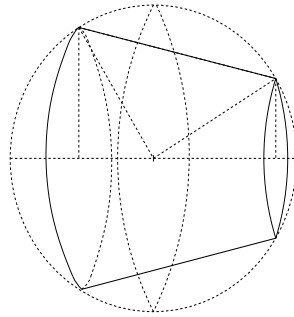
Poniamo (vedi figura)

$$OK = \sin x, \quad OH = \cos x, \quad DK = \cos x, \quad CH = \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$



Da cui $V_1 = \pi(\sin x + \cos x)$ e $V_2 = \frac{4}{3}\pi$.

Il volume V_3 è il tronco di cono ottenuto dalla rotazione di DC a cui si tolgono due coni ottenuti dalla rotazione di OD e di OC .



Volume del tronco di cono:

$$\frac{1}{3}\pi KH(DK^2 + CH^2 + DK \cdot CH) = \frac{1}{3}\pi(\sin x \cos x)(1 + \sin x \cos x)$$

Volume del cono generato da OD

$$\frac{1}{3}\pi KD^2 OK = \frac{1}{3}\pi \cos^2 x \sin x$$

Volume del cono generato da OC

$$\frac{1}{3}\pi CH^2 OH = \frac{1}{3}\pi \sin^2 x \cos x$$

Da cui segue

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi(\sin x + \cos x).$$

Possiamo quindi scrivere

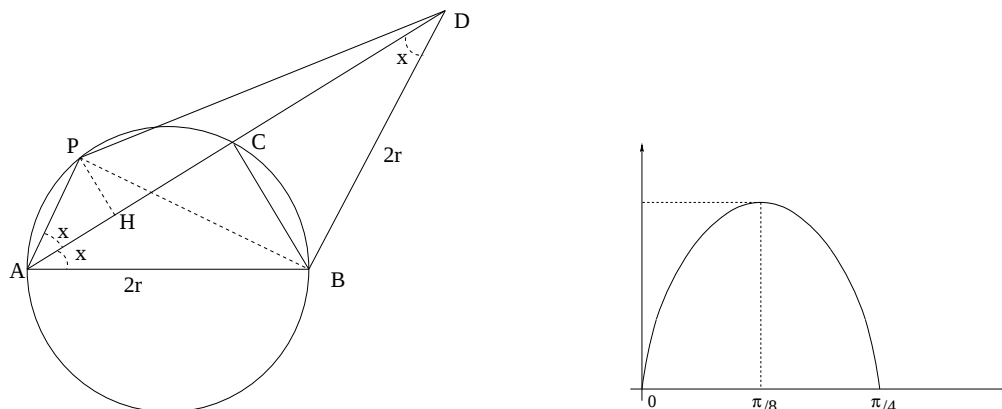
$$f(x) = 3 + \frac{4}{\sin x + \cos x} = 3 + \frac{4}{\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})}$$

La funzione è minima quando il denominatore è massimo.

Questo accade per $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ cioè $x = \frac{\pi}{4}$.

(8.21) Il triangolo ABD è isoscele e dunque l'altezza BC è anche mediana (vedi figura). Quindi

$$\begin{aligned} AD = 2AC &= 4r \cos x, \quad AP = 2r \cos 2x, \quad PH = 2r \cos 2x \sin x, \\ \text{area } PAD &= 2r \cos x \cdot 2r \cos 2x \sin x = 2r^2 \sin 2x \cos 2x = r^2 \sin 4x \\ \text{area } ACB &= \frac{1}{2} AC \cdot BC = 2r^2 \sin x \cos x = r^2 \sin 2x. \end{aligned}$$



L'area di PAD è massima per $4x = \frac{\pi}{2}$ cioè $x = \frac{\pi}{8}$.

Inoltre, $area PAD = area ACB$ per $\sin 4x = \sin 2x$.

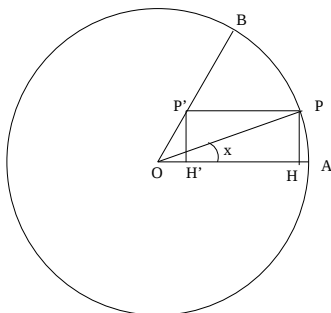
L'equazione è verificata per i seguenti valori di x

$$\begin{aligned} 4x &= 2x + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\ 4x &= \pi - 2x + h2\pi, \quad h \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

In definitiva la soluzione del problema è $x = \frac{\pi}{6}$ (la soluzione $x = 0$ ovviamente non è accettabile).

(8.22) Osserviamo quanto segue (vedi figura):

$$\begin{aligned} PH &= r \sin x, \quad OH = r \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ OH' &= \frac{P'H'}{\tan 60^\circ} = \frac{PH}{\tan 60^\circ} = \frac{r \sin x}{\sqrt{3}} \\ HH' &= OH - OH' = r \cos x - \frac{r}{\sqrt{3}} \sin x \end{aligned}$$



Da queste relazioni ricaviamo

$$\begin{aligned} area H'P'PH &= r \sin x \left(r \cos x - \frac{r}{\sqrt{3}} \sin x \right) = \frac{r^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \sin^2 x \right) = \\ &= \frac{r^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \right) = \frac{r^2}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{r^2}{\sqrt{3}} \left[\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} \right] = \end{aligned}$$

Il termine $2x + \frac{\pi}{6}$ varia tra $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$.

Il seno è massimo per $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, cioè per $x = \frac{\pi}{6}$.

(8.23) Dimostriamo l'identità applicando il *principio di induzione*.
Per $n = 1$ l'eguaglianza è banalmente verificata.

Posto

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{i=1}^n \sin i\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2} \alpha \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}};$$

dimostriamo che $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. A tale scopo si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \sin i\alpha &= \quad (\text{per la proprietà del simbolo di sommatoria}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sin i\alpha + \sin(n+1)\alpha = \quad (\text{per l'ipotesi induttiva}) \\ &= \frac{\sin \frac{n}{2} \alpha \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \sin(n+1)\alpha = \\ &= \frac{\sin \frac{n}{2} \alpha \sin \frac{n+1}{2} \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \sin(n+1)\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = (\text{per le formule di Werner}) \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2n+1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \cos \frac{2n+1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \sin(n + \frac{3}{2}) \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin(n + \frac{3}{2}) \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Tenuto conto che

$$\mathcal{P}(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1} \sin i\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n+2}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

otteniamo la tesi ancora con le *formule di Werner*:

$$\frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n+2}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin(n + \frac{3}{2}) \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

(8.24) *Campo di esistenza*: deve essere $\sin x \neq \pm 1$, cioè (limitatamente al dominio assegnato) $x \neq \pm \frac{\pi}{2}$.

Segno e zeri: studiamo la disequazione $f(x) \geq 0$, che equivale successivamente a:⁽¹⁴⁾

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \geq 1 \iff 1 + \sin x \geq 1 - \sin x \iff \sin x \geq 0.$$

Dunque:

$$f(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$f(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 0, x = \pm\pi.$$

Immagine: studiamo l'equazione $f(x) = \alpha$ al variare del parametro α ; questa equivale successivamente alle seguenti equazioni ⁽¹⁵⁾

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = e^\alpha \iff \sin x = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} \quad (8.33)$$

¹⁴Si tenga presente la proprietà del logaritmo: $\log y \geq 0 \iff y \geq 1$.

¹⁵Si ricordi il legame tra *esponenziale* e *logaritmo*: $\log y = \alpha \iff e^\alpha = y, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall y > 0$.

Perché l'equazione ammetta soluzioni, nel campo di esistenza della funzione, deve essere

$$\left| \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} \right| < 1 \iff -e^\alpha - 1 < e^\alpha - 1 < e^\alpha + 1,$$

e questa condizione è sempre verificata; dunque $Im f = \mathbb{R}$.

Iniettività: la funzione non è iniettiva perché, per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione (8.33) ammette due soluzioni (limitatamente all'intervallo di variazione scelto).

Funzione inversa: restringendo il dominio alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, la condizione su α per la risolubilità dell'equazione (8.33) non cambia e dunque anche per la restrizione vale $Im f = \mathbb{R}$. Questa volta però l'equazione (8.33) ha un'unica soluzione

$$x = \arcsin \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1}$$

che fornisce la funzione inversa.

Riassumendo

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1}(\alpha) = \arcsin \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1}.$$

(8.25) *Campo di esistenza:* deve essere $\left| \frac{1}{2^x} \right| \leq 1$, cioè $2^x \geq 1$ che è verificata per $x \geq 0$.

Segno, zeri: poichè l'immagine della funzione $\arccos y$ è $[0, \pi]$, anche la funzione $f(x)$ è sempre positiva o nulla. In particolare è nulla se

$$\frac{1}{2^x} = \frac{\pi}{2} \iff 2^{x-1} = \frac{1}{\pi} \iff x = 1 - \log_2 \pi = \log_2 \frac{2}{\pi}. \quad (8.34)$$

Poiché il valore trovato non appartiene al *campo di esistenza* la funzione non si annulla.

Immagine: studiamo l'equazione $f(x) = \alpha$, al variare del parametro α :

$$\arccos \frac{1}{2^x} = \alpha \iff \frac{1}{2^x} = \cos \alpha \iff 2^x = \frac{1}{\cos \alpha} \iff x = \log_2 \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Perché la soluzione trovata abbia senso, deve essere

$$\frac{1}{\cos \alpha} > 0 \quad \text{ovvero} \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Riassumendo:

$$f : [0, +\infty) \longrightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow [0, +\infty), \quad f^{-1}(\alpha) = \log_2 \frac{1}{\cos \alpha}.$$

(8.26) Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore B si trovi sull'asse x (vedi figura). Quindi $B = (b_1, b_2) = (7, 0)$, $A = (a_1, a_2)$.

Nel triangolo rettangolo AHO l'angolo $\widehat{HOA}$ misura 45° e quindi

$$a_2 = HA = 9 \sin 45^\circ = 6,3639; \quad a_1 = -9 \cos 45^\circ = -6,3639.$$

Da questo otteniamo le coordinate di C

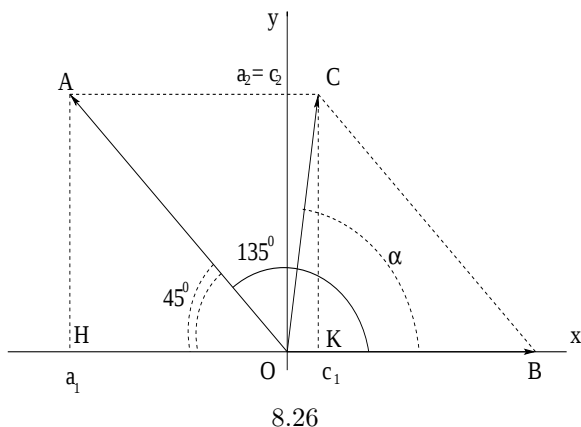
$$C = (c_1, c_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (7 - 6,3639; 6,3639) = (0,6360; 6,3639)$$

e dunque

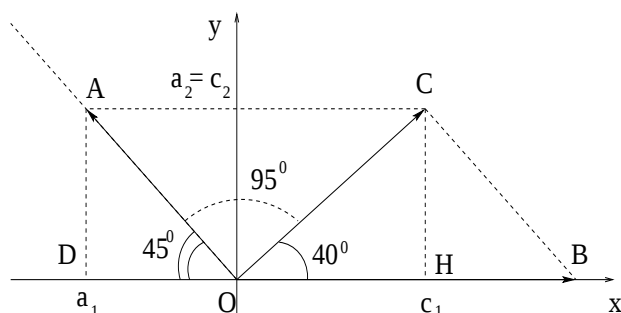
$$\|C\| = \sqrt{(6,3639)^2 + (0,6360)^2} = 6,3956.$$

L'angolo α può essere ricavato dalla relazione

$$\tan \alpha = \frac{c_2}{c_1} = \frac{6,3639}{0,6360} \Rightarrow \alpha = 84^{\circ}26'1''.$$



8.26



8.27

(8.27) Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore B si trovi sull'asse x (vedi figura).

Consideriamo il triangolo CHO :

$$CH = 9 \sin 40^{\circ} = 5,785 = c_2 \quad \text{e} \quad OH = 9 \cos 40^{\circ} = 6,984 = c_1$$

Osserviamo che $AD = CH$, quindi $a_2 = 5,785$. Nel triangolo rettangolo ADO l'angolo $\widehat{DOA}$ misura 45° , per cui essendo $OD = DA = 5,785$ si ha $a_1 = -5,785$.

Le coordinate di B si deducono dalla relazione $B = C - A$: $b_1 = c_1 - a_1 = 6,984 + 5,785 = 12,679$, mentre, ovviamente, $b_2 = 0$.

Per concludere $\|B\| = 12,679$ mentre $\|A\| = \frac{a_2}{\sin 45^{\circ}} = 8,181$.

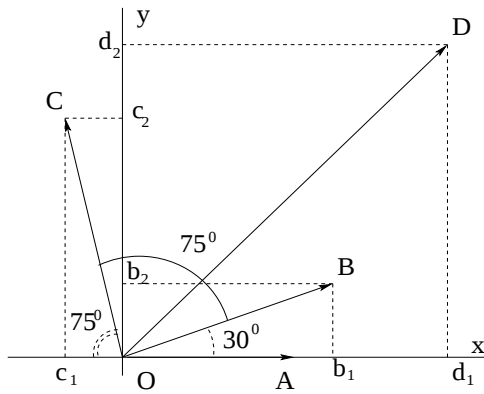
(8.28) Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore A si trovi sull'asse x (vedi figura). Calcoliamo le componenti (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) dei vettori A, B, C :

$$\begin{aligned} a_1 &= 10, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 12 \cos 30^{\circ} = 10,392, \quad b_2 = 12 \sin 30^{\circ} = 6, \\ c_1 &= 15 \cos 105^{\circ} = -15 \cos 75^{\circ} = -3,882 \quad c_2 = 15 \sin 105^{\circ} = 14,488. \end{aligned}$$

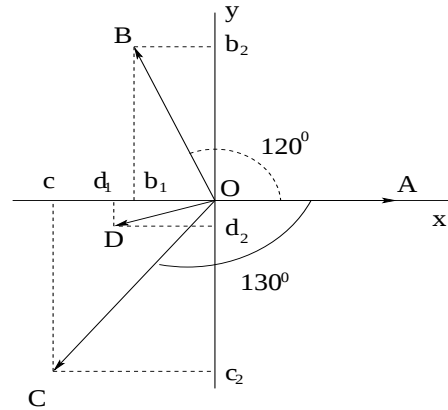
Da questi risultati, essendo $D = A + B + C$, otteniamo

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 + b_1 + c_1 = 10 + 10,392 - 3,882 = 16,510, \\ d_2 &= a_2 + b_2 + c_2 = 0 + 6 + 14,488 = 20,488, \end{aligned}$$

e dunque $\|D\| = 26,312$.



8.28



8.29

(8.29) Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore A si trovi sull'asse x (vedi figura). Calcoliamo le componenti (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) dei vettori A , B , C :

$$\begin{aligned} a_1 &= 6, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 8 \cos 120^\circ = -8 \cos 60^\circ = -4, \quad b_2 = 8 \sin 120^\circ = 6,928, \\ c_1 &= -10 \cos 50^\circ = -6,427 \quad c_2 = -10 \sin 50^\circ = -7,660 \end{aligned}$$

Essendo $D = A + B + C$, otteniamo

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 + b_1 + c_1 = 6 - 4 - 6,427 = -4,427, \\ d_2 &= a_2 + b_2 + c_2 = 0 + 6,928 - 7,660 = -0,732, \end{aligned}$$

ovvero $\|D\| = 4,487$.

Parte IV

TABELLE RIASSUNTIVE DELLE PRINCIPALI FORMULE

CAPITOLO I - CENNI DI LOGICA E TEORIA DEGLI INSIEMI

$\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)$	è vero per i valori di x che rendono veri entrambi gli enunciati
$\mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)$	è vero per i valori di x che rendono vero almeno uno dei due enunciati
$\text{non}\mathcal{P}(x)$	è vero per i valori di x che rendono falso l'enunciato $\mathcal{P}(x)$
$\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$	è vero per i valori di x che rendono falsa $\mathcal{P}(x)$ oppure vera $\mathcal{Q}(x)$
$\mathcal{P}(x) \Longleftrightarrow \mathcal{Q}(x)$	è vera per i valori di x per i quali $\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ e $\mathcal{Q}(x) \Rightarrow \mathcal{P}(x)$, cioè per i valori di x che rendono $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$ entrambe vere o entrambe false.

(1)	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$	(proprietà commutativa)
(2)	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$	(proprietà commutativa)
(3)	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$	(proprietà associativa)
(4)	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$	(proprietà associativa)
(5)	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$	$\Longleftrightarrow$	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$	(proprietà distributiva)
(6)	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$	$\Longleftrightarrow$	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$	(proprietà distributiva)
(7)	$\text{non}(\text{non}\mathcal{P})$	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{P}$	(doppia negazione)
(8)	$\text{non}(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$	$\Longleftrightarrow$	$(\text{non } \mathcal{P}) \vee (\text{non } \mathcal{Q})$	(prima legge di De Morgan)
(9)	$\text{non}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$	$\Longleftrightarrow$	$(\text{non } \mathcal{P}) \wedge (\text{non } \mathcal{Q})$	(seconda legge di De Morgan).

Dimostrazione per assurdo

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow (\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$$

$$(\mathcal{P} \text{ e } \text{non}\mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R} \quad (\text{con } \mathcal{R} \text{ falsa})$$

Negazione di un enunciato

$$\text{non}[\forall x, \mathcal{P}(x)] \Longleftrightarrow \exists x : \text{non}\mathcal{P}(x)$$

$$\text{non}[\exists x : \mathcal{P}(x)] \Longleftrightarrow \forall x, \text{non}\mathcal{P}(x)$$

Insiemi e predicati

$$A = \{x : \mathcal{P}(x)\}, \quad B = \{x : \mathcal{Q}(x)\},$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x : \mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)\} \\ A \cap B &= \{x : \mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)\} \\ A - B &= \{x : \mathcal{P}(x) \wedge \text{non}\mathcal{Q}(x)\} \\ \mathcal{C}B &= \{x : \text{non}\mathcal{Q}(x)\} \end{aligned}$$

PROPRIETÀ	OPERAZIONI TRA INSIEMI	OPERAZIONI TRA PREDICATI
(1) Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \iff \mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$
Commutativa	$A \cap B = B \cap A$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \iff \mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$
(2) Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \iff \mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \iff \mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$
(3) Distributiva	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \iff (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$
Distributiva	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \iff (\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$
(4) Doppia negazione	$\mathcal{C}\mathcal{C}B = B$	$\text{non}(\text{non}\mathcal{P}) \iff \mathcal{P}$
(5) 1ª Legge di De Morgan	$\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$	$\text{non}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \iff \text{non}\mathcal{P} \wedge \text{non}\mathcal{Q}$
(6) 2ª Legge di de Morgan	$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$	$\text{non}(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \iff \text{non}\mathcal{P} \vee \text{non}\mathcal{Q}$

Il simbolo di sommatoria

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^1 a_i = a_1 \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i = a_{n+1} + \sum_{i=1}^n a_i \end{array} \right.$$

$$1. \sum_{i=1}^n c = \overbrace{c + c + \dots + c}^{n \text{ volte}} = nc$$

$$2. \sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i$$

$$3. \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$4. \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j$$

$$5. \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i, \quad m < n$$

$$6. \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}$$

$$7. \sum_{i,j=1}^n a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j$$

CAPITOLO II - RICHIAMI DI GEOMETRIA ANALITICA

RETTA

Equazione della retta:

$$ax + by + c = 0$$

Equazione della retta (non parallela a nessun asse coordinato) passante per due punti distinti
 $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Parallela alla retta di equazione $y = mx + q$ passante per $P = (x_0, y_0)$

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Perpendicolare alla retta (non parallela a nessun asse coordinato) di equazione $y = mx + q$ passante per $P = (x_0, y_0)$

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

Forma parametrica di un segmento di estremi $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$

$$\begin{cases} x_t = tx_A + (1-t)x_B \\ y_t = ty_A + (1-t)y_B, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Forma parametrica di una retta passante per i punti $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$

$$\begin{cases} x_t = tx_A + (1-t)x_B \\ y_t = ty_A + (1-t)y_B, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Distanza tra i punti $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

Punto medio di un segmento di estremi (x_A, y_A) (x_B, y_B) :

$$(x_S, y_S) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Equazione dell'asse del segmento di estremi $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$

$$2(x_B - x_A)x + 2(y_B - y_A)y = x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 - y_A^2$$

Distanza del punto $P = (x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by + c = 0$;

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Equazioni delle bisettrici tra le due rette $ax + by + c = 0$ e $r' : a'x + b'y + c' = 0$

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

CIRCONFERENZA

Equazione di una circonferenza

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Coordinate del centro

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

Raggio

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}, \quad \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$$

ELLISSE

Equazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (35)$$

Intersezioni dell'ellisse con gli assi coordinati (vertici)

$$A_1 = (-a, 0), \quad A_2 = (a, 0), \quad B_1 = (0, -b), \quad B_2 = (0, b)$$

Fuochi ($a > b$)

$$F_1 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) = (-c, 0), \quad F_2 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0) = (c, 0)$$

Eccentricità ($a > b$)

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

IPERBOLE

Equazione dell'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (36)$$

Fuochi

$$F_1 = (\sqrt{a^2 + b^2}, 0), \quad F_2 = (-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$$

Vertici dell'iperbole:

$$V_1 = (a, 0), \quad V_2 = (-a, 0)$$

Asintoti

$$y = \pm \frac{b}{a} x;$$

Eccentricità

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

Iperbole equilatera

- $x^2 - y^2 = a^2$ se i fuochi sono sull'asse x ,
- $x^2 - y^2 = -a^2$ se i fuochi sono sull'asse y .

Iperbole equilatera con fuochi sulle bisettrici dei quadranti

$$xy = k$$

con $k \neq 0$ e $|k| = \frac{a^2}{2}$.

Se $k > 0$, l'iperbole è situata nel primo e terzo quadrante. I vertici appartengono alle bisettrici dei due quadranti ed hanno coordinate $(-\sqrt{k}, -\sqrt{k})$, $(\sqrt{k}, \sqrt{k})$; i fuochi sono nei punti $(-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$, $(\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$.
 Se $k < 0$ l'iperbole è situata nel secondo e quarto quadrante.

I vertici appartengono alle bisettrici di questi quadranti ed hanno coordinate $(-\sqrt{-k}, \sqrt{-k})$, $(\sqrt{-k}, -\sqrt{-k})$; i fuochi sono nei punti $(-\sqrt{-2k}, \sqrt{-2k})$, $(\sqrt{-2k}, -\sqrt{-2k})$.

PARABOLA

Parabola con asse verticale:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{con } a \neq 0$$

Asse

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Vertice

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

(dove $\Delta = b^2 - 4ac$)

Fuoco

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a} \right);$$

Direttrice

$$y = -\frac{1 + \Delta}{4a}$$

La parabola è concava verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$.

Parabola con asse orizzontale:

$$x = ay^2 + by + c$$

- l'asse ha equazione $y = -\frac{b}{2a}$
- il vertice è in $V = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right)$
- il fuoco è in $F = \left(\frac{1 - \Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right)$
- la direttrice ha equazione $x = -\frac{1 + \Delta}{4a}$.

Se $a > 0$ la parabola volge la concavità nella direzione positiva delle x , se $a < 0$ al contrario.

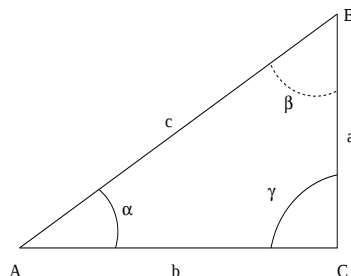
CAPITOLO VI - EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

n dispari	$\sqrt[n]{P(x)} = Q(x) \iff P(x) = [Q(x)]^n$
n pari	$\sqrt[n]{P(x)} = Q(x) \iff \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = [Q(x)]^n \end{cases}$
n dispari	$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x) \iff P(x) > [Q(x)]^n$
n pari	$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x) \iff \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) > [Q(x)]^n \end{cases}$
n dispari	$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \iff P(x) < [Q(x)]^n$
n pari	$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \iff \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) < [Q(x)]^n \end{cases}$
n dispari	$\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x) \iff P(x) \geq [Q(x)]^n$
n pari	$\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x) \iff \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} Q(x) > 0 \\ P(x) \geq [Q(x)]^n \end{cases}$
n dispari	$\sqrt[n]{P(x)} \leq Q(x) \iff P(x) \leq [Q(x)]^n$
n pari	$\sqrt[n]{P(x)} \leq Q(x) \iff \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \leq [Q(x)]^n \end{cases}$

CAPITOLO VIII - INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA

Relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{BC}{AB} & \cos \alpha &= \frac{AC}{AB} \\ a &= c \sin \alpha & b &= c \cos \alpha. \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. & \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned}$$



Relazione tra gradi e radianti

$$\alpha^{\circ} : \alpha_{rad} = 180^{\circ} : \pi$$

Relazione Pitagorica o identità fondamentale della trigonometria e formule derivate

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

Noto	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$
$\tan \alpha$	$\frac{\tan \alpha}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\tan \alpha$	$\frac{1}{\tan \alpha}$
$\cot \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$	$\frac{\cot \alpha}{\pm \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cot \alpha}$	$\cot \alpha$

N.B. Quando nelle formule sopra compare $\pm$ non si intende che vadano bene entrambe le opzioni, ma il segno si sceglie in base al quadrante dove cade il secondo lato dell'angolo.

α°	α_{rad}	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	non esiste
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
360°	2π	0	1	0

Angoli associati.

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha \\ \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha \\ \tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \\ \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha \\ \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha \end{cases}$$

Formule di addizione.

Formule di sottrazione

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{cases}$$

Formule di duplicazione.

Formule di bisezione.¹⁶

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \\ = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \pm \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \end{cases}$$

Formule di prostaferesi.

Formule di Werner.⁽¹⁷⁾

$$\begin{cases} \sin p \pm \sin q = 2 \sin \frac{p \pm q}{2} \cos \frac{p \mp q}{2} \\ \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \end{cases}$$

Espressioni di $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ come funzioni razionali di $\tan \frac{\alpha}{2}$.

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Equazioni trigonometriche

$$\sin x = m$$

Questa equazione ha soluzione se e solo se $m \in [-1, 1]$ (vedi definizione di seno); se $\alpha \in \mathbb{R}$ è una soluzione, tutte le soluzioni si possono scrivere nella forma:

$$x = \alpha + 2h\pi \quad \text{oppure} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad h, k \in \mathbb{Z},$$

ovvero, in maniera più concisa, $x = (-1)^k \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos x = m$$

Questa equazione ha soluzione se e solo se $m \in [-1, 1]$ (vedi definizione di coseno); se $\alpha \in \mathbb{R}$ è una soluzione, tutte le soluzioni si possono scrivere nella forma

$$x = \pm \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\tan x = m$$

Questa equazione ha soluzione per ogni valore reale di m ; se $\alpha \in \mathbb{R}$ è una soluzione, tutte le altre si possono scrivere nella forma

$$x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema dei seni o di Eulero

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Teorema del coseno o di Carnot

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

