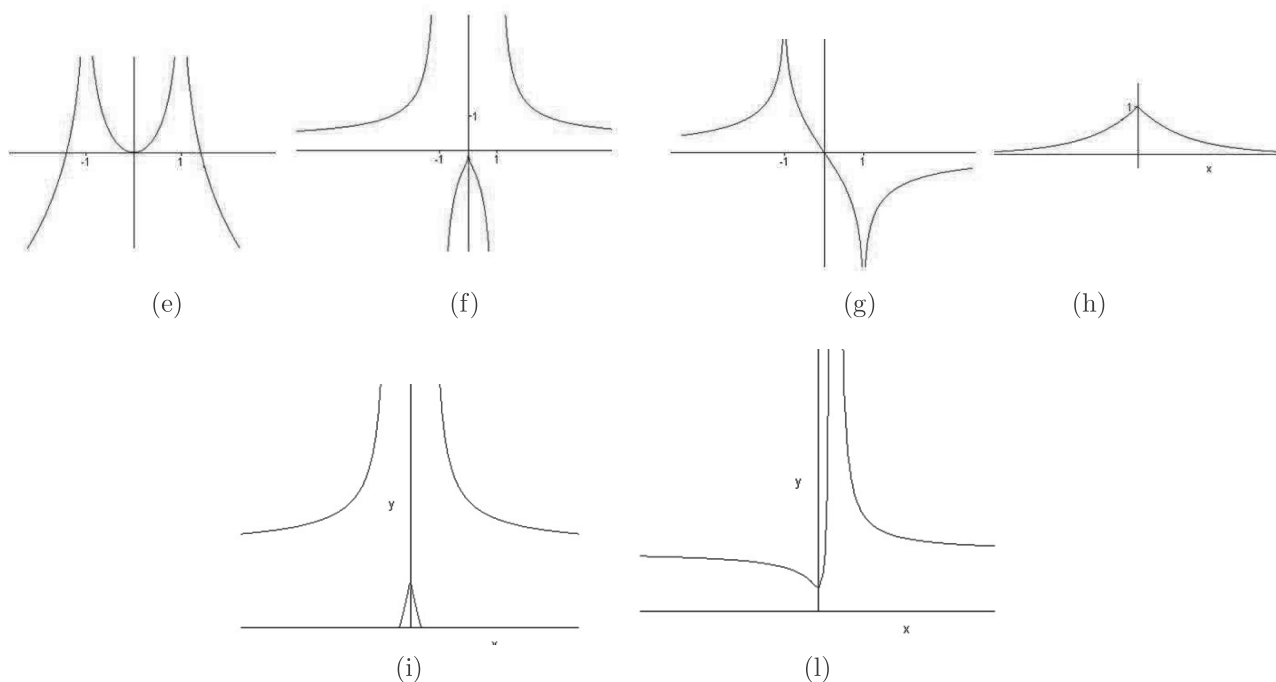




TRIGONOMETRIA

(8.1) Basta applicare la formula di passaggio da un sistema di misura all'altro.

- a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{3}{2}\pi$; c) 2π ; d) $\frac{\pi}{180}$; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\frac{3}{4}\pi$; g) $\frac{5}{4}\pi$; h) $\frac{\pi}{12}$; i) $\frac{105}{1800}\pi$; j) $\frac{130025}{1800000}\pi$;
 k) $\frac{145025}{1800000}\pi$; l) $22^\circ 30'$; m) 360° ; n) 270° ; o) 120° ; p) $57^\circ 17' 45''$; q) 15° ; r) $67^\circ 30'$;
 s) 330° ; t) 252° ; u) $82^\circ 30'$; v) 52° .

(8.2)

- a) terzo; b) primo; c) terzo; d) secondo; e) secondo; f) primo; g) secondo; h) quarto;
 i) quarto; j) terzo; k) secondo; l) terzo; m) primo; n) primo.

(8.3) Ricordare che una funzione $f(x)$ è *periodica di periodo* $T > 0$ se T è il più piccolo numero positivo tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni x nel dominio della funzione.

(a) Il periodo è 2π ; infatti

$$\cos(x + 2\pi - 2) = \cos(x - 2).$$

(b) Il periodo è $\frac{2}{3}\pi$; infatti

$$\sin\left[3\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{\pi}{8}\right] = \sin\left(3x + 2\pi + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right).$$

(c) Il periodo è 8; infatti

$$\cos\left[\frac{\pi}{4}(x + 8) - 2\right] = \cos\left(\frac{\pi}{4}x + 2\pi - 2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x - 2\right).$$

(d) Il periodo è $\frac{\pi}{3}$; infatti

$$\tan\left[3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \tan(3x + \pi) = \tan 3x.$$

(e) Il periodo è 6π ; infatti la prima funzione ha periodo 2π , la seconda 6π , e 6π è il più piccolo multiplo intero positivo dei due periodi.

(f) Il periodo è 12π ; infatti la prima funzione ha periodo 4π , la seconda 6π .

(g) Osserviamo che per la formula di Werner è

$$\cos 3x \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos 2x),$$

che è la somma di una funzione periodica di periodo $\frac{\pi}{4}$ con una di periodo π . Quindi il suo periodo è π .

(h) Il periodo è π ; infatti la prima funzione ha periodo π , la seconda $\frac{\pi}{2}$.

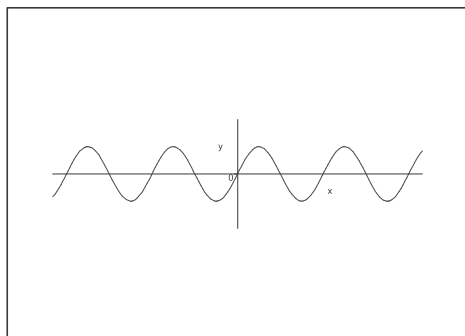
(i) La funzione non è periodica; infatti la prima ha periodo 2π la seconda ha periodo 2 e non esiste alcun multiplo intero di 2π che sia uguale ad un multiplo intero di 2.

(8.4) Negli esercizi da (g) fino a (l) si usi l'identità

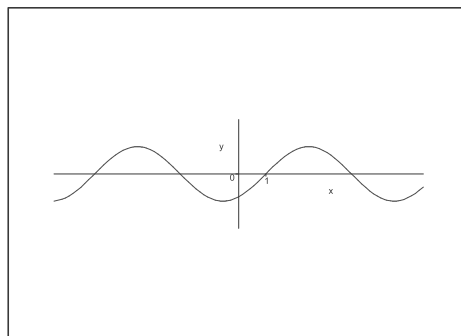
$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$$

con $\varphi \in \mathbb{R}$ da calcolare opportunamente (vedi ESEMPIO 206 del Capitolo 8).

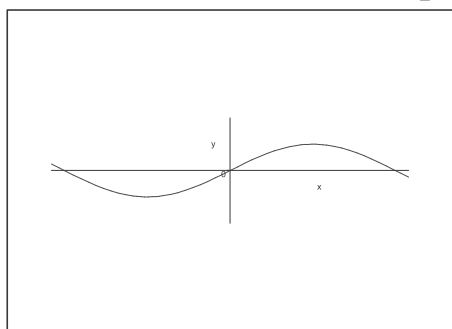
ESERCIZIO (8.4) (a) $x \longrightarrow \sin 2x$



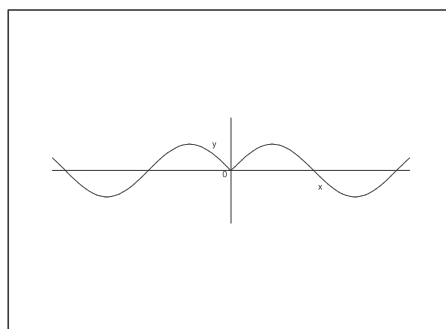
ESERCIZIO (8.4) (b) $x \longrightarrow \sin(x - 1)$



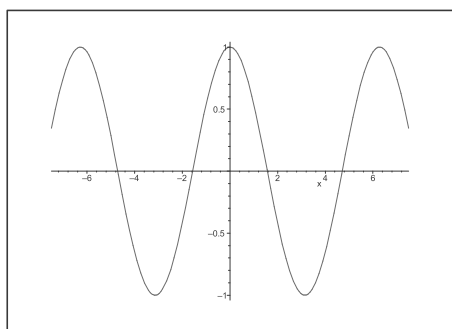
ESERCIZIO (8.4) (c) $x \longrightarrow \sin \frac{x}{2}$



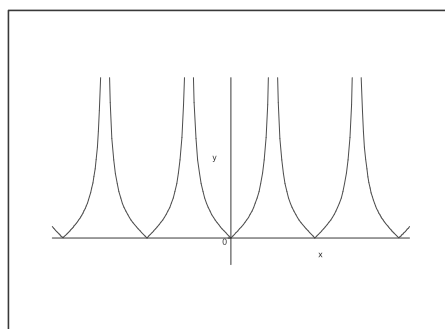
ESERCIZIO (8.4) (d) $x \longrightarrow \sin |x|$



ESERCIZIO (8.4) (e) $x \longrightarrow \cos |x|$



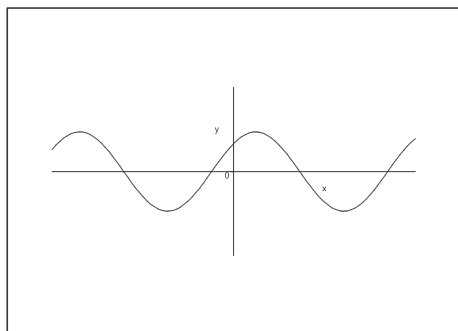
ESERCIZIO (8.4) (f) $x \longrightarrow |\tan x|$



ESERCIZIO (8.4) (g) $x \longrightarrow \sin x + \cos x$

Osservare che

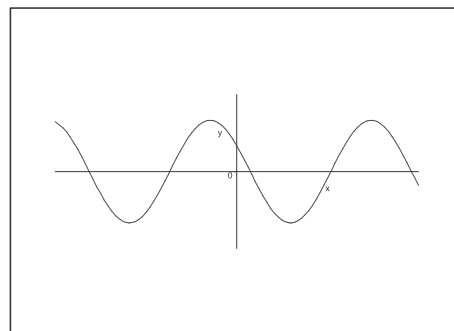
$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) ;$$



ESERCIZIO (8.4) (h) $x \longrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x$

Osservare che

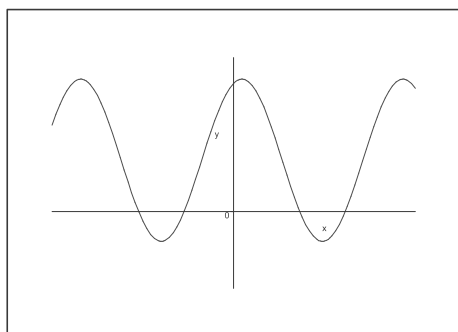
$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \sin \left(x + \frac{5}{6} \pi \right)$$



ESERCIZIO (8.4) (i) $x \longrightarrow 2 + \sin x + 3 \cos x$

Osservare che

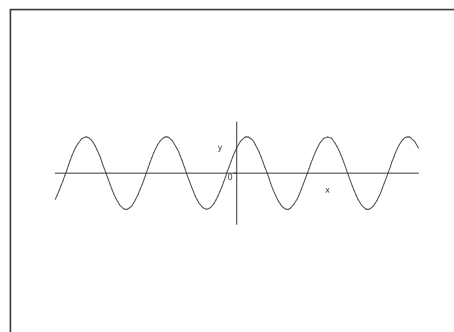
$$2 + \sin x + 3 \cos x = 2 + \sqrt{10} \sin(x + \arctan 3)$$



ESERCIZIO (8.4) (j) $x \longrightarrow \sin 2x + \cos 2x$

Osservare che

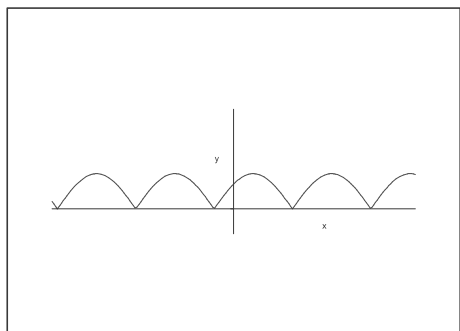
$$x \longrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$



ESERCIZIO (8.4) (k) $x \longrightarrow |\sin x + \cos x|$

Osservare che

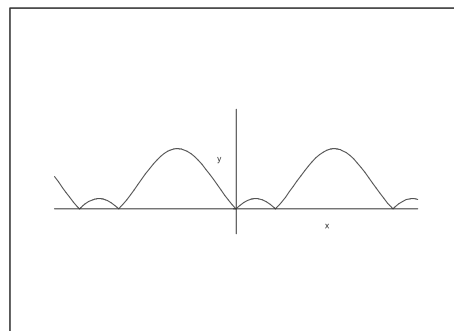
$$x \longrightarrow |\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$



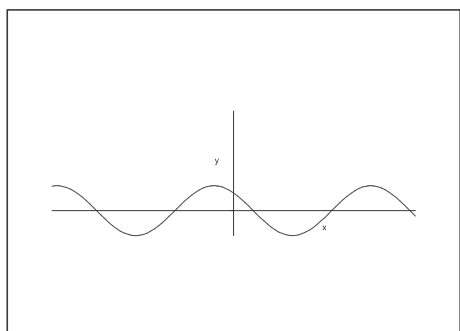
ESERCIZIO (8.4) (l) $x \longrightarrow |1 - \sin x - \cos x|$

Osservare che

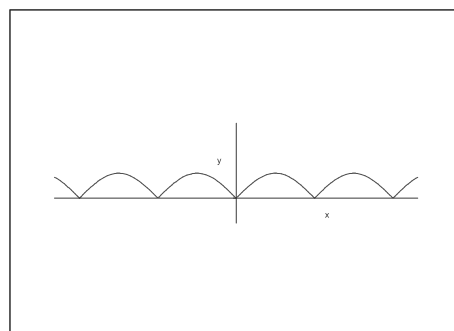
$$x \longrightarrow |1 - \sin x - \cos x| = \left| 1 - \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$



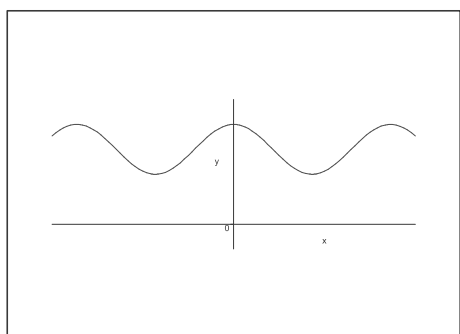
ESERCIZIO (8.4) (m) $x \longrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$



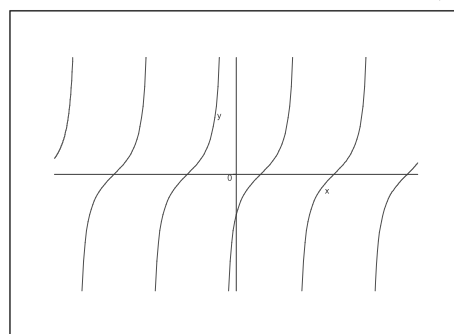
ESERCIZIO (8.4) (n) $x \longrightarrow |\sin |x||$



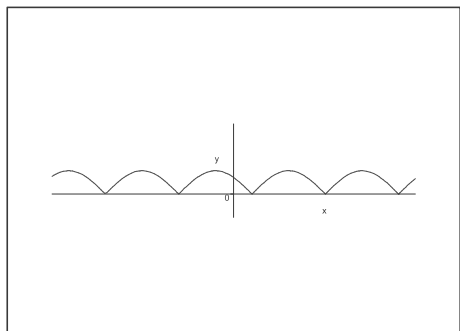
ESERCIZIO (8.4) (o) $x \longrightarrow 3 + \cos x$



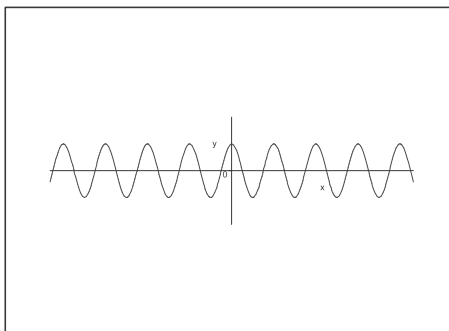
ESERCIZIO (8.4) (p) $x \longrightarrow \tan \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$



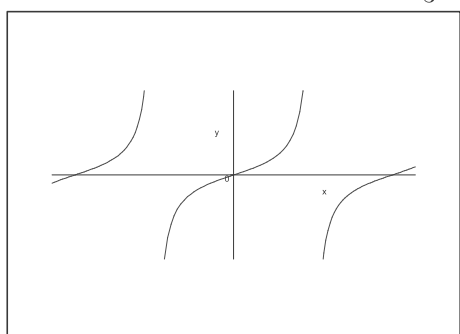
ESERCIZIO (8.4) (q) $x \longrightarrow \left| \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right|$



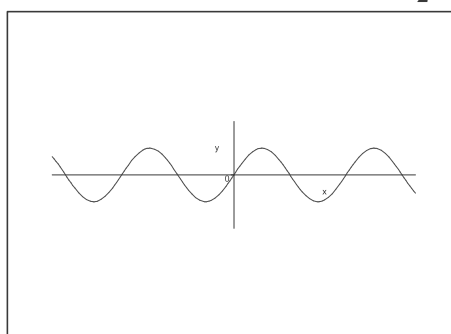
ESERCIZIO (8.4) (r) $x \longrightarrow \cos 4x$



ESERCIZIO (8.4) (s) $x \longrightarrow \tan \frac{x}{3}$



ESERCIZIO (8.4) (t) $x \longrightarrow \sin \frac{3}{2} x$



(8.5)

(a) $\alpha = 60^\circ$, $b = 10 \sin 30^\circ = 5$, $a = 10 \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}$.

(b) $\cos \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = 75^\circ 31'$, $\beta = 14^\circ 29'$, $b = 16 \sin \beta = 4$, $a = 16 \cos \beta = 4\sqrt{15}$.

(c) $\sin \beta = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

$\alpha = 26^\circ 34'$, $\beta = 63^\circ 26'$, $b = 0,6 \sin \beta = 0,537$, $a = 0,6 \cos \beta = 0,268$.

(d) $b = 3$, $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{3}{5}$, $\alpha = 53^\circ 8'$, $\beta = 36^\circ 52'$.

(e) $\beta = 15^\circ$; $c = \frac{a}{\sin 75^\circ} = 18,63$; $b = c \cos 75^\circ = 4,82$.

(f) $\cos \beta = \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin \beta = \cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = 70^\circ 31'$, $\beta = 19^\circ 29'$, $c = \frac{b}{\sin \beta} = 24$, $a = c \cos \beta = 16\sqrt{2}$.

(g) $c = 2\sqrt{3}$, $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

(h) $\alpha = 53^\circ 40'$; $c = \frac{72,5}{\sin \beta} = 122,37$; $a = c \sin \alpha = 98,58$.

(8.6)

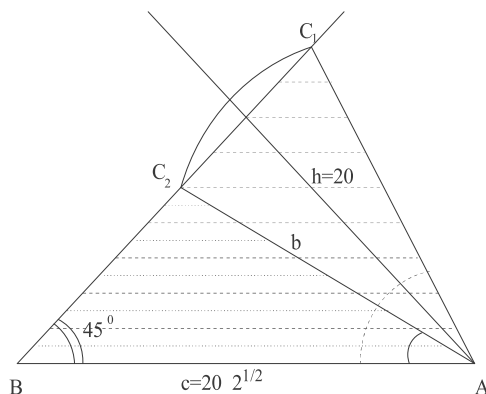
(a) $\beta = 53^\circ 7' 48''$, $\gamma = 96^\circ 52' 12''$, $a = 5,036$, $b = 8,058$

(b) $\alpha = 36^\circ 52' 12''$, $\beta = 73^\circ 44' 23''$, $\gamma = 69^\circ 23' 25''$, $a = 25$, $b = 40$

(c) Innanzitutto è verificata la condizione necessaria, perché $b > c \sin \beta$ (infatti $b = 20\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$, $c \sin \beta = 20$). Inoltre esistono due soluzioni perché $b < c$. Applicando il *teorema dei seni*, si ottiene:

$$\frac{\sin \gamma}{20\sqrt{2}} = \frac{\sin 45^\circ}{20\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = 0,966 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 75^\circ \\ \alpha_1 = 60^\circ \\ a_1 = 20\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \gamma_2 = 105^\circ \\ \alpha_2 = 30^\circ \\ a_2 = 20(\sqrt{3} - 1) \end{cases}$$



(d) La condizione necessaria per l'esistenza del triangolo ($b > c \sin \beta$) è verificata, in quanto $c \sin \beta = 20 < 40$.

È verificata anche la condizione di unicità di soluzione, in quanto $b > c$. Appliciamo il *teorema dei seni*:

$$\frac{\sin \gamma}{20\sqrt{2}} = \frac{\sin 45^\circ}{40} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 30^\circ$$

(la soluzione $\gamma = 150^\circ$ è da scartare).

Infine $\alpha = 105^\circ$ e $a = 54,64$.

(e) $\beta = 19^\circ 28' 16''$, $h = 12 \sin \beta = 4 = b$; esiste dunque un unico triangolo ed è quello rettangolo.

Infine $\gamma = 90^\circ$, $a = 8\sqrt{2} = 11,31$, $\alpha = 70^\circ 31' 44''$

(f) $\beta = 16^\circ 36' 6''$, $h = 14 \sin \beta = 4 > b$, quindi non esiste alcun triangolo.

(g) Ricaviamo $\cos \beta = -\frac{1}{9}$ e quindi $\beta = 96^\circ 22' 46''$, $\alpha = 48^\circ 11' 23''$, $\gamma = 35^\circ 25' 51''$.

I lati sono ottenuti dal *teorema dei seni*:

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = 1,29 \quad b = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 1,71.$$

(h) $\alpha = 70^\circ 31' 44''$. Dal *teorema di Carnot* otteniamo $a^2 = 13 - 12 \cos \alpha = 9$ ovvero $a = 3$; inoltre $\gamma = \alpha$ e $\beta = 38^\circ 56' 32''$.

(i) $\alpha = 104^\circ 28' 39''$, $\sin \alpha = \frac{0,968}{8}$; dal *teorema di Carnot* $a^2 = 52 - 48 \cos \alpha = 64$ cioè $a = 8$. Appliciamo il *teorema dei seni*

$$\frac{\sin \beta}{6} = \frac{\sin \gamma}{4} = \frac{0,968}{8} \Rightarrow \beta = 46^\circ 34' 3'', \quad \gamma = 28^\circ 57' 18''.$$

(8.7) (a) Gli angoli sono uguali a quelli formati dalle rette $y = 3x$ e $y = x$ (parallele alle precedenti).

Essendo $\tan \alpha = 3$, $\tan \beta = 1$, si ha

$$\tan \gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 26^0 33' 54''.$$

L'altro angolo è dunque $\gamma' = 153^0 26' 6''$.

(b) Gli angoli sono quelli che la retta $y = \frac{3}{2}x$ forma con l'asse x .
Dunque $\gamma = \arctan \frac{3}{2} = 56^0 18' 36''$, $\gamma' = 123^0 41' 24''$.

(c) Gli angoli sono quelli tra le rette $y = -x$ e $y = \frac{x}{4}$. Essendo $\tan \alpha = -1$ e $\tan \beta = \frac{1}{4}$, si ha:

$$\tan \gamma = \tan(\alpha - \beta) = -\frac{5}{3}, \quad \gamma = 120^0 57' 50'', \quad \gamma' = 59^0 2' 10''.$$

(8.8)

$$(a) \quad \cos \alpha = 2\frac{\sqrt{2}}{3} \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(b) \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(c) \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \tan \alpha = -\frac{4}{3}$$

$$(d) \quad \sin \alpha = -\frac{7}{25} \quad \tan \alpha = \frac{7}{24}$$

$$(e) \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{8} \quad \tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$(f) \quad \sin \alpha = -2\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(8.9)

$$(a) \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

$$(b) \quad \tan \alpha = -1 \quad y = \frac{10}{3} - x$$

$$(c) \quad \tan \alpha = -\frac{3}{4} \quad y = -\frac{3}{4}x - 4$$

$$(d) \quad \tan \alpha = \frac{7}{24} \quad y = -\frac{295}{96} + \frac{7}{24}x$$

(8.10)

$$(a) \quad \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = \\ = \sin \alpha (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$(b) \quad \cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \\ = \cos \alpha (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) = \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

$$(c) \quad \sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$(d) \quad \cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ = (2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 4 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1.$$

(8.11)

- (a) 0 (b) $-\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$ (c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$
- (d) $-4\sin\alpha\cos\alpha$ (e) 0 (f) $\frac{4\tan\alpha}{(1-\tan\alpha)^2}$
- (g) $\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$ (h) $-\tan\alpha$ (i) 1
- (l) $2\cos^2\alpha$ (m) $\frac{4\sin\alpha\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ (n) $-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$
- (o) $\frac{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$ (p) $2(\cos\alpha - \sin\alpha)$ (q) $2\frac{1+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$
- (r) $\frac{1}{4}$ (s) $-\frac{\sin^2\alpha}{4}$ (t) $\frac{4\cos\alpha - \sin^2\alpha}{2(\cos\alpha + 1)}$
- (u) $\frac{3}{4}(1 - \cos\alpha)$ (v) $\frac{1}{\cos\alpha}$ (z) $3 - \cos\alpha - 3\cos^2\alpha$

(8.12)

Poniamo $t = \tan \frac{\alpha}{2}$

- (a) $-\frac{2t^2+2t}{t^2+1}$ (b) $\frac{2t^4-4t^3+2t^2+4t}{(t^2+1)^2}$ (c) $\frac{4t(1-t^2)}{t^4-6t^2+1}$
- (d) $\frac{1-2t^2}{1+t^2}$ (e) $\frac{1-t}{1+t}$ (f) t

(8.13)

- (a) $2\sin\frac{5}{2}\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$
- (b) $2\sin\alpha\cos4\alpha$
- (c) $-2\cos\frac{5}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{5}{2}\alpha\right)$
- (d) $2\cos\alpha\cos2\beta$
- (e) $\sin\alpha - \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\frac{\pi}{2}}{2}$
- (f) $\frac{1}{2}(\sin5\alpha + \sin\alpha)$
- (g) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{6}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin2\alpha\right)$
- (h) $\sin(\alpha - \beta) - [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\beta - \alpha)] = -\sin(\alpha + \beta)$

(8.14)

Supponiamo ad esempio siano noti a , b , γ e proviamo che l'area del triangolo è data da $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Se $\gamma = 90^\circ$ il risultato è ovvio. Distinguiamo due casi, verificando che il valore $b\sin\gamma$ rappresenta

la misura dell'altezza relativa al lato a in entrambi i casi.

1° caso: $0 < \gamma < 90^\circ$

Indicata con AH l'altezza in questione e considerato il triangolo AHC , si ottiene subito l'asserto in quanto $h = b \sin \gamma$ (vedi Figura (i)).

2° caso : $90^\circ < \gamma < 180^\circ$

Consideriamo nella Figura (ii) il triangolo AHC , si ha:

$$AH = b \sin(180^\circ - \gamma) = b \sin \gamma.$$

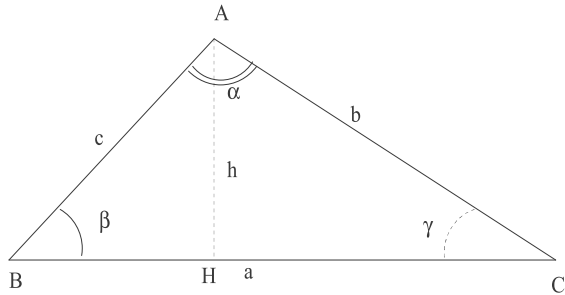


Figura (i)

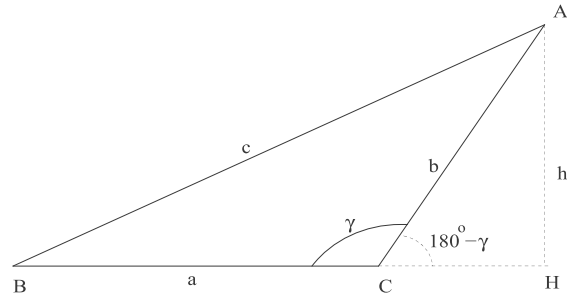


Figura (ii)

(8.15)

(a) $3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $3x = \frac{5\pi}{6} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, e dunque $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2}{3}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
oppure $x = \frac{5\pi}{18} + h\frac{2}{3}\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(b) $x - \frac{\pi}{3} = 2x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x - \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, e dunque $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
oppure $x = \frac{4\pi}{9} + h\frac{2}{3}\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(c) $\frac{\pi}{12} - x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cioè $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) $2x - \frac{\pi}{12} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $2x - \frac{\pi}{12} = -x - \frac{\pi}{3} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, e dunque
 $x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = -\frac{\pi}{12} + h\frac{2}{3}\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(e) $2x = x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $2x = -x + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$; dunque $x = k2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$,
oppure $x = h\frac{2}{3}\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(f) $x - \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi - x + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; dunque $x = \frac{3\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(g) $\sin x = 0$ oppure $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; dunque $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = \frac{4}{3}\pi + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$
oppure $x = \frac{5\pi}{3} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(h) $\cos x = 1$ (la soluzione $\cos x = 2$ non è accettabile) dunque $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $\tan x = 1$ dunque $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(j)

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin^2 x - \sin x + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \sin x < 0 \\ \sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\sin x = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(k) $\cos x = 1$ oppure $\cos x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (la soluzione $\cos x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ non è accettabile), quindi $x = k2\pi, \in \mathbb{Z}$
 oppure $x = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + h2\pi, h \in \mathbb{Z}$

(l) Nessuna soluzione.

(m) $\tan x = \pm 1$ ovvero $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

(n) $\cos x = 0$ oppure $\cos x = 1$ da cui $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = h2\pi, h \in \mathbb{Z}$.

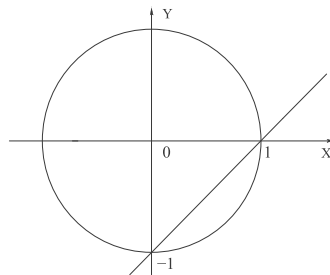
(o) Poiché i valori per cui $\cos x = 0$ non risolvono l'equazione, questa equivale a $\tan x = -1$ e dunque $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(p) Posto $X = \cos x, Y = \sin x$:

$$\begin{cases} Y - X + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono (vedi figura): $(X, Y) = (1, 0)$ oppure $(X, Y) = (0, -1)$, da cui

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow x = k2\pi, \text{ oppure } x = -\frac{\pi}{2} + h2\pi, h, k \in \mathbb{Z}.$$



(q) Equivale a $\cos x - \sqrt{3}\sin x + 1 = 0$. Posto $X = \cos x, Y = \sin x$:

$$\begin{cases} X - \sqrt{3}Y + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow x = \pi + k2\pi \text{ oppure } x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, h, k \in \mathbb{Z}.$$

(r) Sostituendo il termine noto con $\frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x)$, possiamo riscrivere:

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

Poiché i valori che annullano il *coseno* non risolvono l'equazione, possiamo dividere per $\cos^2 x$:

$$\tan^2 x + 2 \tan x - 1 = 0$$

Questa è un'equazione di secondo grado in $\tan x$ che per soluzioni $\tan x = -1 \pm \sqrt{2}$, e dunque $x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(s) L'equazione equivale a $\sin^2 + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 1$ ovvero, sostituendo il secondo membro con $\sin^2 x + \cos^2 x$,

$$2\sqrt{3}\sin x \cos x = \cos^2 x,$$

da cui $\cos x = 0$ oppure $\tan x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, che implicano $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = \arctan \frac{1}{2\sqrt{3}} + h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(t) Si sostituisce il termine noto con $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$, l'equazione equivale a

$$\sqrt{3}\sin^2 x + (\sqrt{3} - 1)\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

Dividendo per $\cos^2 x$ (i valori che annullano $\cos x$ non soddisfano l'equazione) si ottiene

$$\sqrt{3}\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - 1 = 0$$

che fornisce

$$\tan x = \frac{(1 - \sqrt{3}) \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm (1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 \end{cases}$$

da cui $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = -\frac{\pi}{4} + h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(u) Il sistema equivale a

$$\begin{cases} x - y = k\pi \\ x + y = \frac{\pi}{3} + h\pi \end{cases}, \quad k, h \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + (h + k)\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{6} + (h - k)\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Poniamo $h + k = m$, $m \in \mathbb{Z}$; di conseguenza $h - k = (h + k) - 2k = m - 2k$, da cui

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + m\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{6} + m\frac{\pi}{2} - k\pi \end{cases}, \quad m, k \in \mathbb{Z}.$$

(v)

$$\begin{cases} \sin y = \sqrt{3} \sin x \\ \tan x \tan y > 0 \\ \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \frac{3 \sin^2 x}{1 - 3 \sin^2 x} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y = \sqrt{3} \sin x \\ \tan x \tan y > 0 \\ \sin^2 x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

che equivalgono a

$$\begin{cases} \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x \tan y > 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x \tan y > 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ y = \frac{\pi}{3} + h2\pi \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ y = \frac{2\pi}{3} + h2\pi \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ y = -\frac{\pi}{3} + h2\pi \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ y = -\frac{2\pi}{3} + h2\pi \end{cases}$$

$h, k \in \mathbb{Z}$.

(w) I valori per cui $\cos x = 0$ ($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) non risolvono l'equazione. Possiamo dunque dividere per $\cos^4 x$:

$$\tan^4 x - 4 \tan^2 x + 3 = 0, \Rightarrow \tan x = \pm 1, \pm \sqrt{3},$$

da cui $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(x) L'equazione può essere riscritta nella forma

$$\sin 2x = \frac{3}{2} + \frac{\cos x}{|\cos x|},$$

cioè

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin 2x = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ (che non ha soluzioni) oppure } \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Nel secondo sistema l'equazione ha come soluzioni $2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $2x = \frac{5\pi}{6} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, da cui $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = \frac{5\pi}{12} + h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$. Perché sia poi soddisfatta anche la condizione sul coseno deve essere $x = \frac{\pi}{12} + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oppure $x = \frac{5\pi}{12} + (2h+1)\pi$, $h \in \mathbb{Z}$.

(y)

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}.$$

Poiché

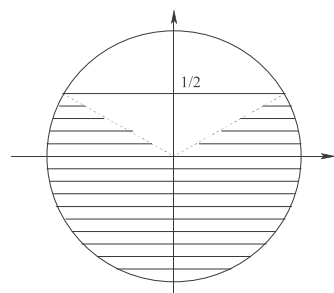
$$\sqrt{2} + \frac{1}{1+x^2} > \sqrt{2},$$

l'equazione non ha soluzioni.

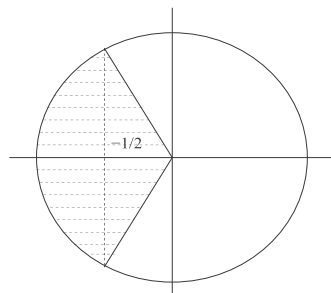
(z) L'equazione equivale a $\sin^2 x = \frac{4-\alpha}{7}$ ed ammette soluzioni se e solo se $0 \leq \frac{4-\alpha}{7} \leq 1$, cioè $-3 \leq \alpha \leq 4$. Se $\alpha = -3$ allora $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Se invece $-3 < \alpha < 4$ allora $x = \pm \arcsin \sqrt{\frac{4-\alpha}{7}} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = \pi \pm \arcsin \sqrt{\frac{4-\alpha}{7}} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$. Infine per $\alpha = 4$ risulta $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(8.16)

(a) $5\frac{\pi}{6} + k2\pi < x < 13\frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (b) $\frac{2}{3}\pi + k2\pi < x < \frac{4}{3}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

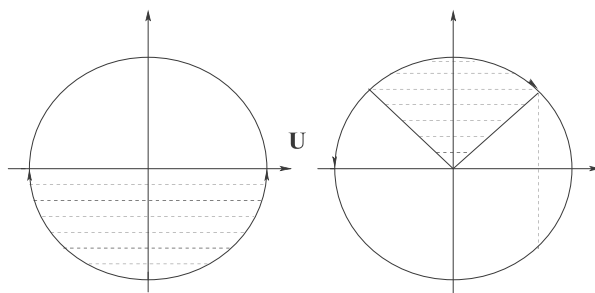


8.16 (a)



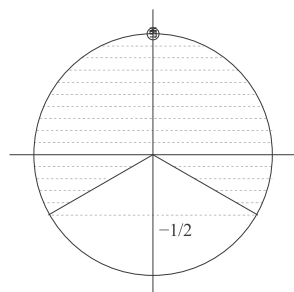
8.16 (b)

(c) $\sin x < 0$ oppure $\sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ da cui $\pi + h2\pi < x < 2\pi + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, oppure $\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

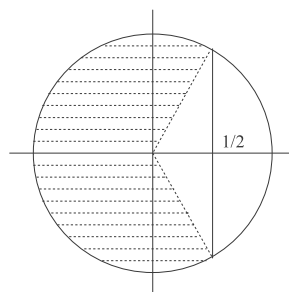


(d) $-\frac{1}{2} < \sin x < 1$ da cui $-\frac{\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{7\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(e) $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 > 0$ da cui $\cos x < \frac{1}{2}$ oppure $\cos x > 2$; quest'ultima non ha soluzioni, mentre la prima è risolta da $\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



8.16 (d)



8.16 (e)

(f) Equivale a $\tan^2 x \geq 3$ cioè $\tan x \geq \sqrt{3}$ oppure $\tan x \leq -\sqrt{3}$. Dunque deve essere $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ oppure $\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{2}{3}\pi + k\pi$, cioè $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + k\pi$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(g) Posto $X = \cos x$, $Y = \sin x$

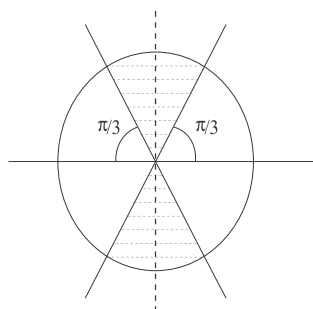
$$\begin{cases} Y + X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui $-\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

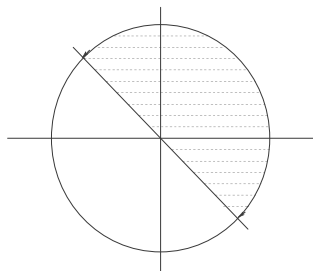
(h) Posto $X = \cos x$, $Y = \sin x$

$$\begin{cases} Y + X - 1 < 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

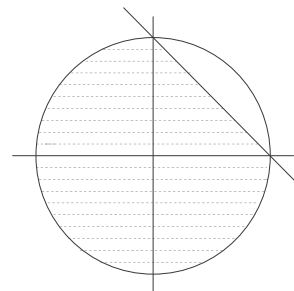
da cui $\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



8.16 (f)



8.16 (g)



8.16 (h)

(i) $\frac{1}{2}(\sin x - \sqrt{3} \cos x) + \frac{1}{2}(\cos x - \sqrt{3} \sin x) \leq 0$ che equivale a $\sin x + \cos x \geq 0$; a questo punto procediamo come nell'esercizio precedente ed otteniamo $-\frac{\pi}{4} + k2\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + k2\pi$.

(j) $\cos x = 0$ oppure $\tan^2 x > 1$, da cui $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(k) $(\cos x = 0 \text{ e } \sin x = 1)$ oppure $\cos^3 x (\tan^3 x + 1) > 0$; queste condizioni equivalgono alle seguenti

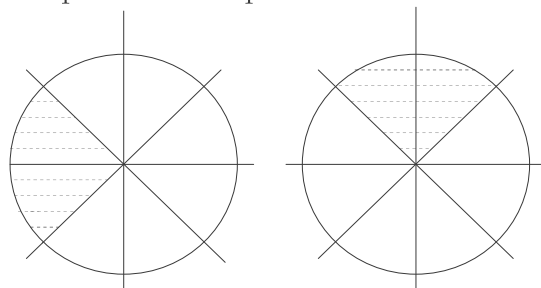
$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos x > 0 \\ \tan x > -1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos x < 0 \\ \tan x < -1 \end{cases}$$

da cui otteniamo $-\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(l) $2 \cos^2 x (\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x) < 0$ ovvero $(2 \cos^2 x - 1)(\cos x + \sin x) < 0$ che equivale a

$$\begin{cases} \cos x > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{oppure} \quad \cos x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x + \sin x < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x + \sin x > 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{5}{4}\pi + k2\pi$, $x \neq \frac{3}{4}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



(m) Utilizziamo la formula $\tan x = \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$. Poniamo $t = \tan \frac{x}{2}$ e sostituiamo nel testo:

$$\frac{t(t^2 + 1)}{t^2 - 1} > 0.$$

Le soluzioni sono $-1 < t < 0$ oppure $t > 1$. Dunque $-\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{x}{2} < k\pi$ oppure $\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ cioè $-\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < k2\pi$ oppure $\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Queste condizioni si possono sintetizzare scrivendo $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(n) Utilizziamo la formula $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$, ottenendo $3 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) \cot x \geq 0$, da cui seguono

$$\begin{cases} \cos^2 \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2} \\ \cot x \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos^2 \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \\ \cot x \leq 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi \leq \frac{x}{2} \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ \frac{\pi}{2} + k\pi \leq x < \pi + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

ovvero

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} + k\pi \leq x < \pi + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dal primo sistema si ottiene $2k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ oppure $x = \frac{3}{2}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dal secondo sistema si ottiene $\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x < \pi + k2\pi$ oppure $x = \frac{3}{2}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

In definitiva $k2\pi < x < \pi + k2\pi$ oppure $x = \frac{3}{2}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(o) $\tan x < 0$ oppure $\tan x > 1$. Le soluzioni sono dunque $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(p) Perché sia definita $\tan \frac{x}{2}$ deve essere $x \neq \pi + k2\pi$. Utilizzando le formule parametriche, la disequazione diventa $\tan^2 \frac{x}{2} \left(\tan^2 \frac{x}{2} - 1 \right) > 0$ cioè

$$\begin{cases} \tan \frac{x}{2} \neq 0 \\ \tan \frac{x}{2} > 1 \quad \text{oppure} \quad \tan \frac{x}{2} < -1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{3}{2}\pi + k2\pi \\ x \neq \pi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(q) La disequazione ha senso se

$$\begin{cases} \cos 2x \neq 1 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La disequazione equivale a

$$\sin x \cos x > \cos^2 x \Longleftrightarrow \cos x (\sin x - \cos x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

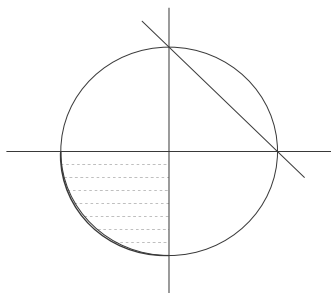
(r) La disequazione ha senso se $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, ed equivale a

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x \cos x} < 0$$

Ponendo $Y = \sin x$, $X = \cos x$ diventa

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ \frac{Y + X - 1}{XY} < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $\pi + k2\pi < x < \frac{3}{2}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



(s) La disequazione ha senso per $x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ ed equivale a

$$\frac{4 \sin^3 x \cos x}{(\cos^2 x - \sin^2 x)^2} \leq 0 \iff -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq k\pi, \quad x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

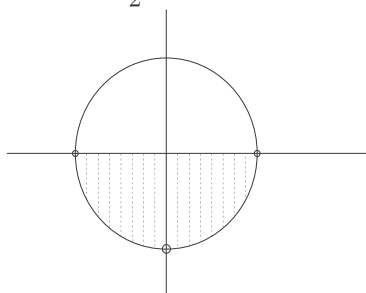
(t) La disequazione proposta equivale alla seguente:

$$\frac{\sin x (\cos x + 1)}{\sqrt{2} \cos^2 x} < 0$$

Ponendo $X = \cos x$, $Y = \sin x$ ci siamo ricondotti a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{Y(X+1)}{X^2} < 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}.$$

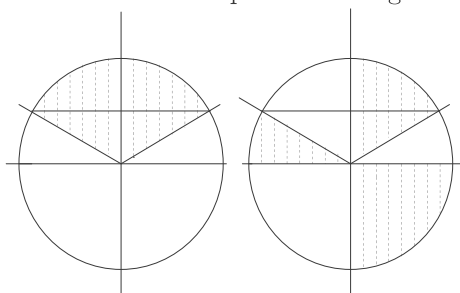
Le soluzioni sono $\pi + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi$, $x \neq \frac{3}{2}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



(u) La disequazione proposta equivale alla seguente

$$\frac{(2 \sin^2 x + \sin x - 1) \tan x}{\sin x - \sqrt{3} \cos x + 1} \geq 0$$

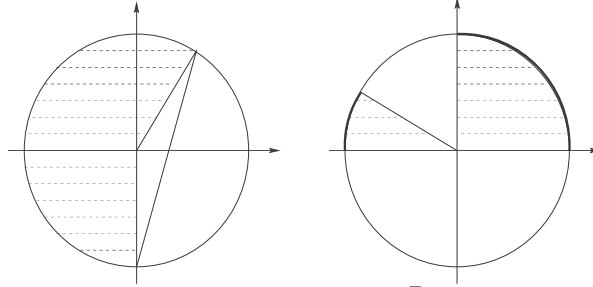
Consideriamo il numeratore: $2 \sin^2 x + \sin x - 1 \geq 0 \iff \sin x \leq -1$ oppure $\sin x \geq \frac{1}{2}$ (figura sotto, a sinistra). Il segno del numeratore è espresso nella figura sotto, a destra.



Consideriamo il denominatore: ponendo $X = \cos x$, $Y = \sin x$ otteniamo:

$$\begin{cases} Y - \sqrt{3}X + 1 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}.$$

La soluzione geometrica è indicata nella figura sotto, a sinistra.



Infine le soluzioni (figura sopra, a destra) sono $0 + k2\pi \leq x < \frac{\pi}{2}\pi + k2\pi$ oppure $\frac{5}{6}\pi + k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi$, $x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(v) Studiamo il segno del numeratore: $\tan^2 2x \geq 1$ equivale a $\tan 2x \geq 1$ oppure $\tan 2x \leq -1$ da cui $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}$, con $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Semplifichiamo l'espressione al denominatore per poterne studiare il segno:

$$2 \sin x \cos x + \cos^2 x > 0 \iff \cos^2 x (2 \tan x + 1) > 0.$$

Le soluzioni sono $-\arctan \frac{1}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le soluzioni della disequazione di partenza si hanno quando numeratore e denominatore hanno segno discorde; in definitiva deve dunque essere

$$-\frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\pi \quad \text{oppure} \quad \frac{3}{8}\pi + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{oppure} \\ \frac{13}{8}\pi + k\pi \leq x < -\arctan \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

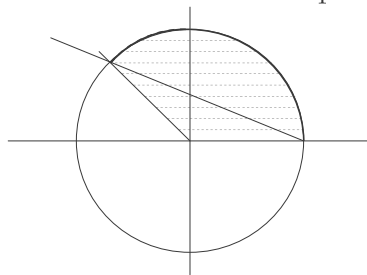
(w) La prima disequazione del sistema ha soluzioni $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mentre la seconda è risolta da $\frac{\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Il sistema ha dunque soluzioni: $\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(x) Ponendo $X = \cos x$ e $Y = \sin x$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} Y + (\sqrt{2} - 1)X > \sqrt{2} - 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Il punto di intersezione tra la retta $Y + (\sqrt{2} - 1)X = \sqrt{2} - 1$ e la circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$ è il punto di coordinate $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, da cui segue (vedi figura) $k2\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



(8.17)

(a) Poniamo $\alpha = 2x$, $\beta = 2y$ con $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; la disuguaglianza assume la forma

$$\frac{\sin 2x + \sin 2y}{2} \leq \sin(x + y).$$

Usando la formula di duplicazione e quelle di addizione:

$$\sin x \cos x + \sin y \cos y \leq \sin x \cos y + \sin y \cos x \iff \sin x(\cos x - \cos y) \leq \sin y(\cos x - \cos y)$$

ovvero

$$(\sin x - \sin y)(\cos x - \cos y) \leq 0.$$

La disuguaglianza è vera perchè in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la funzione *seno* è *crescente*, mentre la funzione *coseno* è *decrecente* (quindi se $x < y$, $\sin x - \sin y < 0$, $\cos x - \cos y > 0$).
L'eguaglianza vale se e solo se $x = y$ cioè $\alpha = \beta$.

(b) Osserviamo che $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$, con $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Analogamente $\cos \beta = \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin y$, con $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Tenuto conto di questo e della disuguaglianza dimostrata nel punto (a) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} &= \frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x + y}{2} = \\ &= \sin\left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \end{aligned}$$

(c) Poniamo $\alpha = 2x$, $\beta = 2y$, con $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

La disuguaglianza proposta equivale alla seguente

$$\tan(x + y) \leq \frac{\tan 2x + \tan 2y}{2}.$$

Otteniamo una disuguaglianza equivalente applicando al primo membro le formule di addizione ed al secondo quelle di duplicazione:

$$\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \leq \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} + \frac{\tan y}{1 - \tan^2 y}.$$

I denominatori sono maggiori di zero in quanto $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$; svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} \tan^3 x + \tan^3 y \geq \tan^2 x \tan y + \tan x \tan^2 y &\iff \tan^2 x(\tan x - \tan y) \geq \tan^2 y(\tan x - \tan y) \\ &\iff (\tan x - \tan y)^2(\tan x + \tan y) \geq 0 \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza è sempre verificata perché $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ e quindi $\tan x > 0$ e $\tan y > 0$.

Vale il segno di eguaglianza se e solo se $\tan x = \tan y$ ovvero $x = y$.

Anche per quest'ultima implicazione si tenga presente che $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

(8.18) Supponiamo che il triangolo sia isoscele in a , b (quindi $a = b$, $\alpha = \beta$); allora dalla relazione $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

ricaviamo $\alpha = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ e quindi:

$$\tan \alpha = \tan\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{\tan \frac{\gamma}{2}}.$$

Sostituendo nella formula proposta,

$$\tan \frac{\gamma}{2} (a \tan \alpha + b \tan \beta) = 2a \tan \frac{\gamma}{2} \tan \alpha = 2a = a + b.$$

Viceversa, supponiamo valga la relazione data e riscriviamola nella forma

$$a \left(1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \alpha \right) + b \left(1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \beta \right) = 0;$$

utilizzando il *teorema dei seni*:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

otteniamo

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = - \frac{1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \beta}{1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \alpha}.$$

Osserviamo che

$$1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \alpha = \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\gamma}{2} \sin \alpha}{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \alpha} = \frac{\cos \left(\frac{\gamma}{2} + \alpha \right)}{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \alpha}.$$

Analogamente

$$1 - \tan \frac{\gamma}{2} \tan \beta = \frac{\cos \left(\frac{\gamma}{2} + \beta \right)}{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \beta}.$$

Sostituendo nella relazione sopra e semplificando:

$$(*) \quad \tan \alpha \cos \left(\frac{\gamma}{2} + \alpha \right) + \tan \beta \cos \left(\frac{\gamma}{2} + \beta \right) = 0.$$

Poiché

$$\frac{\gamma}{2} + \alpha = 180^\circ - \left(\frac{\gamma}{2} + \beta \right) \Rightarrow \cos \left(\frac{\gamma}{2} + \alpha \right) = -\cos \left(\frac{\gamma}{2} + \beta \right),$$

da (*) otteniamo

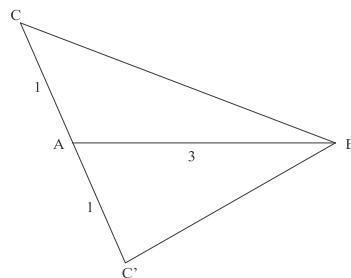
$$\tan \alpha - \tan \beta = 0 \quad \text{oppure} \quad \cos \left(\frac{\gamma}{2} + \beta \right) = 0.$$

Dalla prima equazione segue $\alpha = \beta$, dalla seconda $\frac{\gamma}{2} + \beta = 90^\circ$ e quindi $\frac{\gamma}{2} + \alpha = 90^\circ$, cioè anche in questo caso $\alpha = \beta$.

(8.19) Applicando due volte il teorema del coseno, si ha:

$$BC^2 = 10 - 6 \cos 120^\circ = 13, \quad BC'^2 = 10 - 6 \cos 60^\circ = 7$$

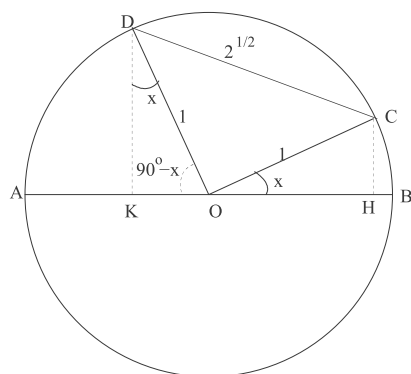
Il perimetro vale $2 + \sqrt{7} + \sqrt{13}$



(8.20)

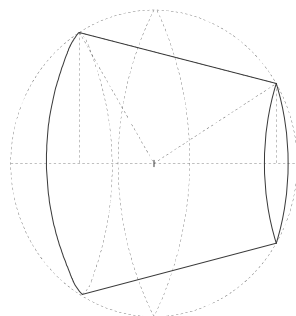
Poniamo (vedi figura)

$$OK = \sin x, \quad OH = \cos x, \quad DK = \cos x, \quad CH = \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$



Da cui $V_1 = \pi(\sin x + \cos x)$ e $V_2 = \frac{4}{3}\pi$.

Il volume V_3 è il tronco di cono ottenuto dalla rotazione di DC a cui si tolgono due coni ottenuti dalla rotazione di OD e di OC .



Volume del tronco di cono:

$$\frac{1}{3}\pi KH(DK^2 + CH^2 + DK \cdot CH) = \frac{1}{3}\pi(\sin x \cos x)(1 + \sin x \cos x)$$

Volume del cono generato da OD

$$\frac{1}{3}\pi KD^2 \cdot OK = \frac{1}{3}\pi \cos^2 x \sin x$$

Volume del cono generato da OC

$$\frac{1}{3}\pi CH^2 \cdot OH = \frac{1}{3}\pi \sin^2 x \cos x$$

Da cui segue

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi(\sin x + \cos x).$$

Possiamo quindi scrivere

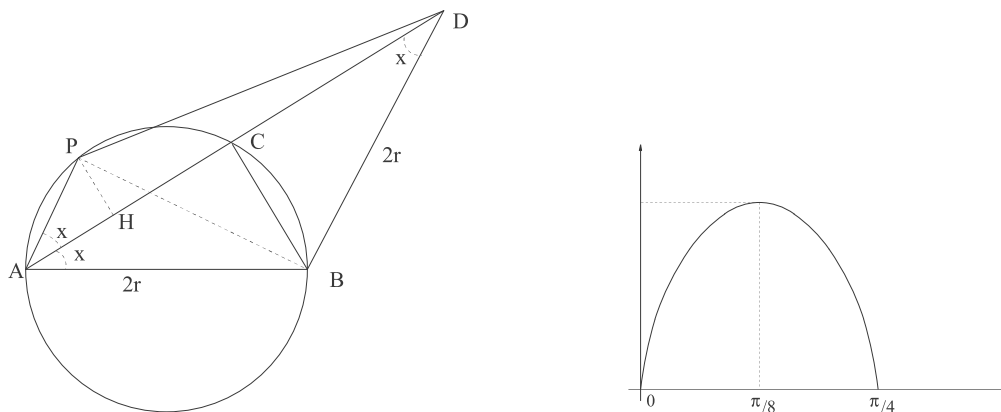
$$f(x) = 3 + \frac{4}{\sin x + \cos x} = 3 + \frac{4}{\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})}$$

La funzione è minima quando il denominatore è massimo.

Questo accade per $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ cioè $x = \frac{\pi}{4}$.

(8.21) Il triangolo ABD è isoscele e dunque l'altezza BC è anche mediana (vedi figura). Quindi

$$\begin{aligned} AD = 2AC &= 4r \cos x, \quad AP = 2r \cos 2x, \quad PH = 2r \cos 2x \sin x, \\ \text{area } PAD &= 2r \cos x \cdot 2r \cos 2x \sin x = 2r^2 \sin 2x \cos 2x = r^2 \sin 4x \\ \text{area } ACB &= \frac{1}{2} AC \cdot BC = 2r^2 \sin x \cos x = r^2 \sin 2x. \end{aligned}$$



L'area di PAD è massima per $4x = \frac{\pi}{2}$ cioè $x = \frac{\pi}{8}$.

Inoltre, $area PAD = area ACB$ per $\sin 4x = \sin 2x$.

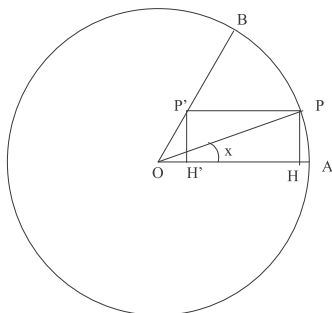
L'equazione è verificata per i seguenti valori di x

$$\begin{aligned} 4x &= 2x + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\ 4x &= \pi - 2x + h2\pi, \quad h \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

In definitiva la soluzione del problema è $x = \frac{\pi}{6}$ (la soluzione $x = 0$ ovviamente non è accettabile).

(8.22) Osserviamo quanto segue (vedi figura):

$$\begin{aligned} PH &= r \sin x, \quad OH = r \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ OH' &= \frac{P'H'}{\tan 60^\circ} = \frac{PH}{\tan 60^\circ} = \frac{r \sin x}{\sqrt{3}} \\ HH' &= OH - OH' = r \cos x - \frac{r}{\sqrt{3}} \sin x \end{aligned}$$



Da queste relazioni ricaviamo

$$\begin{aligned} area H'P'PH &= r \sin x \left(r \cos x - \frac{r}{\sqrt{3}} \sin x \right) = \frac{r^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \sin^2 x \right) = \\ &= \frac{r^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \right) = \frac{r^2}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{r^2}{\sqrt{3}} \left[\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} \right] = \end{aligned}$$

Il termine $2x + \frac{\pi}{6}$ varia tra $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$.

Il seno è massimo per $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, cioè per $x = \frac{\pi}{6}$.

(8.23) Dimostriamo l'identità applicando il *principio di induzione*.

Per $n = 1$ l'eguaglianza è banalmente verificata.

Posto

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{i=1}^n \sin i\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2} \alpha \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}};$$

dimostriamo che $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. A tale scopo si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \sin i\alpha &= \quad (\text{per la proprietà del simbolo di sommatoria}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sin i\alpha + \sin(n+1)\alpha = \quad (\text{per l'ipotesi induttiva}) \\ &= \frac{\sin \frac{n}{2} \alpha \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \sin(n+1)\alpha = \\ &= \frac{\sin \frac{n}{2} \alpha \sin \frac{n+1}{2} \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \sin(n+1)\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = (\text{per le formule di Werner}) \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2n+1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \cos \frac{2n+1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \sin(n + \frac{3}{2}) \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin(n + \frac{3}{2}) \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Tenuto conto che

$$\mathcal{P}(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1} \sin i\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n+2}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

otteniamo la tesi ancora con le *formule di Werner*:

$$\frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n+2}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin(n + \frac{3}{2}) \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

(8.24) *Campo di esistenza*: deve essere $\sin x \neq \pm 1$, cioè (limitatamente al dominio assegnato) $x \neq \pm \frac{\pi}{2}$.

Segno e zeri: studiamo la disequazione $f(x) \geq 0$, che equivale successivamente a:⁽¹⁴⁾

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \geq 1 \iff 1 + \sin x \geq 1 - \sin x \iff \sin x \geq 0.$$

Dunque:

$$f(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$f(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 0, x = \pm\pi.$$

Immagine: studiamo l'equazione $f(x) = \alpha$ al variare del parametro α ; questa equivale successivamente alle seguenti equazioni ⁽¹⁵⁾

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = e^\alpha \iff \sin x = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} \quad (8.33)$$

¹⁴Si tenga presente la proprietà del logaritmo: $\log y \geq 0 \iff y \geq 1$.

¹⁵Si ricordi il legame tra *esponenziale* e *logaritmo*: $\log y = \alpha \iff e^\alpha = y, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall y > 0$.

Perché l'equazione ammetta soluzioni, nel campo di esistenza della funzione, deve essere

$$\left| \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} \right| < 1 \iff -e^\alpha - 1 < e^\alpha - 1 < e^\alpha + 1,$$

e questa condizione è sempre verificata; dunque $Im f = \mathbb{R}$.

Iniettività: la funzione non è iniettiva perché, per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione (8.33) ammette due soluzioni (limitatamente all'intervallo di variazione scelto).

Funzione inversa: restringendo il dominio alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, la condizione su α per la risolubilità dell'equazione (8.33) non cambia e dunque anche per la restrizione vale $Im f = \mathbb{R}$. Questa volta però l'equazione (8.33) ha un'unica soluzione

$$x = \arcsin \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1}$$

che fornisce la funzione inversa.

Riassumendo

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1}(\alpha) = \arcsin \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1}.$$

(8.25) *Campo di esistenza:* deve essere $\left| \frac{1}{2^x} \right| \leq 1$, cioè $2^x \geq 1$ che è verificata per $x \geq 0$.

Segno, zeri: poichè l'immagine della funzione $\arccos y$ è $[0, \pi]$, anche la funzione $f(x)$ è sempre positiva o nulla. In particolare è nulla se

$$\frac{1}{2^x} = \frac{\pi}{2} \iff 2^{x-1} = \frac{1}{\pi} \iff x = 1 - \log_2 \pi = \log_2 \frac{2}{\pi}. \quad (8.34)$$

Poiché il valore trovato non appartiene al *campo di esistenza* la funzione non si annulla.

Immagine: studiamo l'equazione $f(x) = \alpha$, al variare del parametro α :

$$\arccos \frac{1}{2^x} = \alpha \iff \frac{1}{2^x} = \cos \alpha \iff 2^x = \frac{1}{\cos \alpha} \iff x = \log_2 \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Perché la soluzione trovata abbia senso, deve essere

$$\frac{1}{\cos \alpha} > 0 \quad \text{ovvero} \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Riassumendo:

$$f : [0, +\infty) \longrightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow [0, +\infty), \quad f^{-1}(\alpha) = \log_2 \frac{1}{\cos \alpha}.$$

(8.26) Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore B si trovi sull'asse x (vedi figura). Quindi $B = (b_1, b_2) = (7, 0)$, $A = (a_1, a_2)$.

Nel triangolo rettangolo AHO l'angolo $\widehat{HOA}$ misura 45° e quindi

$$a_2 = HA = 9 \sin 45^\circ = 6,3639; \quad a_1 = -9 \cos 45^\circ = -6,3639.$$

Da questo otteniamo le coordinate di C

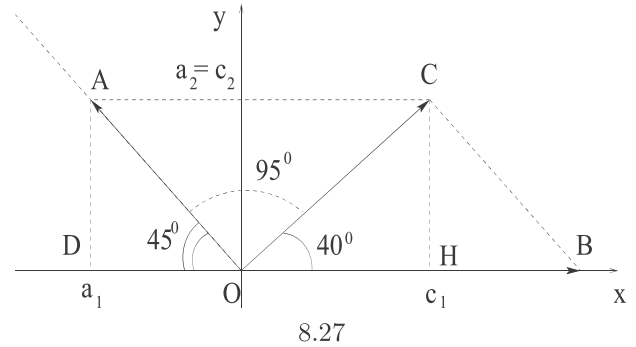
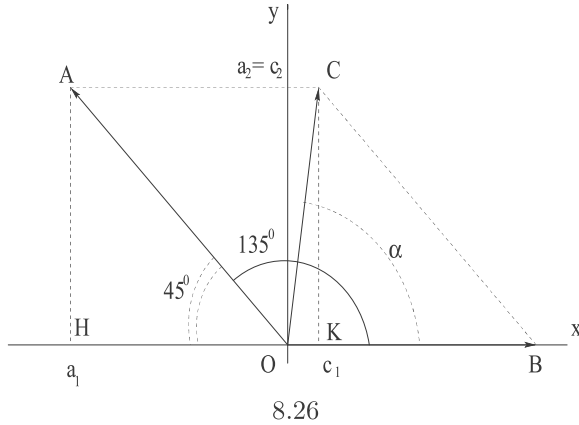
$$C = (c_1, c_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (7 - 6,3639; 6,3639) = (0,6360; 6,3639)$$

e dunque

$$\|C\| = \sqrt{(6,3639)^2 + (0,6360)^2} = 6,3956.$$

L'angolo α può essere ricavato dalla relazione

$$\tan \alpha = \frac{c_2}{c_1} = \frac{6,3639}{0,6360} \Rightarrow \alpha = 84^0 26' 1''.$$



(8.27) Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore B si trovi sull'asse x (vedi figura).

Consideriamo il triangolo CHO :

$$CH = 9 \sin 40^0 = 5,785 = c_2 \quad \text{e} \quad OH = 9 \cos 40^0 = 6,984 = c_1$$

Osserviamo che $AD = CH$, quindi $a_2 = 5,785$. Nel triangolo rettangolo ADO l'angolo $\widehat{DOA}$ misura 45^0 , per cui essendo $OD = DA = 5,785$ si ha $a_1 = -5,785$.

Le coordinate di B si deducono dalla relazione $B = C - A$: $b_1 = c_1 - a_1 = 6,984 + 5,785 = 12,679$, mentre, ovviamente, $b_2 = 0$.

Per concludere $\|B\| = 12,679$ mentre $\|A\| = \frac{a_2}{\sin 45^0} = 8,181$.

(8.28) Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore A si trovi sull'asse x (vedi figura). Calcoliamo le componenti (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) dei vettori A, B, C :

$$\begin{aligned} a_1 &= 10, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 12 \cos 30^0 = 10,392, \quad b_2 = 12 \sin 30^0 = 6, \\ c_1 &= 15 \cos 105^0 = -15 \cos 75^0 = -3,882 \quad c_2 = 15 \sin 105^0 = 14,488. \end{aligned}$$

Da questi risultati, essendo $D = A + B + C$, otteniamo

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 + b_1 + c_1 = 10 + 10,392 - 3,882 = 16,510, \\ d_2 &= a_2 + b_2 + c_2 = 0 + 6 + 14,488 = 20,488, \end{aligned}$$

e dunque $\|D\| = 26,312$.