

CAPITOLO 7. SOLUZIONI: ESPONENZIALI E LOGARITMI

(7.1)

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \quad \log_3 81 = 4 & \text{(b)} \quad \log_5 1 = 0 & \text{(c)} \quad \log_{16} \frac{1}{64} = -\frac{3}{2} & \text{(d)} \quad \log_4 \frac{1}{16} = -2 \\ \text{(e)} \quad \log_{25} 125 = \frac{3}{2} & \text{(f)} \quad \log_{27} 3 = \frac{1}{3} & \text{(g)} \quad 10^3 = 1000 & \text{(h)} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \\ \text{(i)} \quad 5^3 = 125 & \text{(l)} \quad 9^{\frac{3}{2}} = 27 & \text{(m)} \quad 16^{\frac{3}{2}} = 64 & \text{(n)} \quad 7^1 = 7 \end{array}$$

(7.2) Procedendo come suggerito nel testo si ottiene:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} -3 & \text{(b)} \frac{1}{3} & \text{(c)} -2 & \text{(d)} \frac{1}{3} \\ \text{(e)} -5 & \text{(f)} -\frac{4}{5} & & \\ \text{(g)} -\frac{1}{3} & \text{(h)} \frac{3}{5} & \text{(i)} 3 & \text{(l)} \frac{3}{2} \\ \text{(m)} 2 & \text{(n)} -1 & & \end{array}$$

(7.3) Nel primo caso (base assegnata, argomento da determinare) si deve prendere l'esponenziale di ambo i membri, la base essendo quella data; in questo modo il primo membro si semplifica in x , il secondo fornisce il valore richiesto.

Nel secondo caso (argomento assegnato, base da determinare) si ripete il procedimento, prendendo x come base; in questo modo il primo membro si semplifica nell'argomento, mentre al secondo membro compare una potenza di x ; a questo punto rimane da risolvere l'equazione risultante.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} e^4 & \text{(b)} \frac{4}{25} & \text{(c)} 2^{\frac{1}{4}} & \text{(d)} \frac{8}{343} \\ \text{(e)} \frac{1}{8} & \text{(f)} \frac{2}{3} & \text{(g)} 3^{\frac{3}{2}} & \\ \text{(h)} 1 & \text{(i)} 5 & \text{(l)} \frac{1}{8} & \text{(m)} 3 \\ \text{(n)} \frac{5}{4} & \text{(o)} \frac{1}{3} & \text{(p)} \frac{1}{10} & \\ \text{(q)} 9 & \text{(r)} 4^{\frac{1}{9}} & \text{(s)} \sqrt{3} & \text{(t)} \frac{1}{125} \\ \text{(u)} \frac{1}{e} & \text{(v)} 5^{\frac{1}{4}} & \text{(z)} 100 & \end{array}$$

(7.4)

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} 2 \log x + 3 \log y & \text{(b)} \frac{\log x + \log y - \log z}{2} & \text{(c)} 2 \log x + \frac{\log y}{3} \\ \text{(d)} \frac{2 \log x}{3} + \frac{\log y}{6} + \frac{\log z}{2} - \frac{4 \log t}{3} & \text{(e)} -\frac{4 \log x}{5} - \frac{2 \log y}{5} - \frac{13 \log z}{12} & \text{(f)} 3 \log x + 2 \log y - \frac{\log t}{2} - \frac{\log z}{4} \end{array}$$

(7.5)

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \log \frac{xz^2}{y} & \text{(b)} \log \frac{x^3 \sqrt{y}}{\sqrt[4]{z}} & \text{(c)} \log \frac{e^2 x}{\sqrt{yz}} & \text{(d)} \log \frac{\sqrt[4]{xy^7}}{125z^2} \end{array}$$

(7.6) Si tratta di applicare la formula di cambiamento di base ed eventualmente applicare le proprietà dei logaritmi per semplificare il risultato.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \frac{\log x}{\log 2} & \text{(b)} -\frac{\log x}{\log 2} & \text{(c)} \frac{\log x}{2} & \text{(d)} 2 \log x \\ \text{(e)} \frac{\log x}{\log \frac{2}{e}} & \text{(f)} \frac{\log 2}{\log x} & \text{(g)} \frac{\log x}{2 \log x} & \text{(h)} \frac{\log x}{\log x} \end{array}$$

Le espressioni (g) e (h) si semplificano rispettivamente in $\frac{1}{2}$ e in 1 per i valori che danno loro significato, cioè per $x > 0$, $x \neq 1$.

(7.7) Occorre imporre che l'argomento del logaritmo sia maggiore di zero; per quanto riguarda la semplificazione ricordare che le proprietà dei logaritmi valgono per variabili positive; quando non si è in questo caso, bisogna utilizzare il valore assoluto.

- (a) $x \neq 0$; $2 \log |x|$ (b) $x > 0$; $3 \log x$ (c) sempre definito; x
 (d) $x > 0$, $x \neq 1$; 1 (e) $x > 0$, $x \neq 1$; $\log x + 2 \log |x - 1|$ (f) $x > -1$; $\frac{1}{2} \log(x + 1)$
 (g) $x > 0$, $x \neq 1$; 3 (h) $x > 0$, $x \neq 1$; e

(7.8)

- (a) Possiamo scambiare l'ordine con cui compaiono i due esponenti, ottenendo come risultato $\frac{1}{4^x}$.
 (b) Intervenendo sul numeratore: $4 \cdot 3^{2x} - 1 = (2 \cdot 3^x)^2 - 1 = (2 \cdot 3^x - 1)(2 \cdot 3^x + 1)$
 A questo punto possiamo semplificare con il denominatore, ottenendo $2 \cdot 3^x - 1$.
 (c) $3 \frac{(3^2)^{x^2} - (3^2)^x}{3^{x^2} + 3^x} = 3 \frac{(3^{x^2})^2 - (3^x)^2}{3^{x^2} + 3^x} = 3 \frac{(3^{x^2} - 3^x)(3^{x^2} + 3^x)}{3^{x^2} + 3^x} = 3(3^{x^2} - 3^x)$

(7.9) Utilizzando le proprietà degli esponenziali, riconduciamo le equazioni ad una ad una delle seguenti forme:

- $a^x = a^y$, da cui segue che deve essere $x = y$
- $a^x = b$, che fornisce $x = \log_a b$ (solo nel caso $b > 0$)
- $ha^x = kb^x$, che possiamo riscrivere nella forma $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{k}{h}$.

In certi casi un cambiamento di variabile della forma $t = a^x$ riconduce ad un'equazione algebrica in t ; dopo aver trovato le soluzioni positive in t , prendendone il logaritmo si ottengono le soluzioni in x .

- (a) 4 (b) -1 (c) $\log_7 9$ (d) $-\frac{1}{2}$ (e) 0 (f) $-\frac{11}{3}$ (g) $-\frac{3}{5}, 2$ (h) -3, 4 (i) $-\frac{4}{3}$
- (l) Dopo aver riscritto l'equazione nella forma $9(3^x)^2 + 3^x - 3 = 0$, ponendo $t = 3^x$ si ottiene l'equazione di secondo grado $9t^2 + t - 3 = 0$, da cui $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{109}}{18}$; di queste due soluzioni solo quella positiva è accettabile. La soluzione in x è dunque $\log_3 \frac{\sqrt{109} - 1}{18}$.
- (m) Ponendo $t = 2^x$, l'equazione diventa $t^2 = 4$, da cui $t_{1,2} = \pm 2$; di queste due soluzioni solo quella positiva è accettabile. La soluzione in x è dunque $x = 1$.
- (n) Ponendo $t = 3^x$, si ottiene $|t^2 - 2| = t$ che ha per soluzioni $t = 1$, $t = 2$; dunque $x = 0$, $x = \log_3 2$.
- (o) Ponendo $t = 3^x$, si ottiene $t^3 - 3t^2 + 2 = 0$ che ha per soluzioni $t = 1$, $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$; la soluzione $1 - \sqrt{3}$ va scartata perché negativa. Dunque $x = 0$, $x = \log_3(1 + \sqrt{3})$.
- (p) 0.
- (q) $\log_{\frac{5}{2}} \frac{5}{26}$
- (r) L'equazione si può riscrivere nella forma $6 \cdot 3^{2x} = 6 \cdot 7^{2x}$; l'unica soluzione è $x = 0$.
- (s) Con passaggi successivi possiamo riscrivere l'equazione nelle forme equivalenti: $(e^x)^2 + e^2 e^{\frac{1}{3}} = e^2 e^x + e^{\frac{1}{3}} e^x \iff e^x(e^x - e^2) = e^{\frac{1}{3}}(e^x - e^2) \iff (e^x - e^2)(e^x - e^{\frac{1}{3}}) = 0$, ottenendo infine $x = 2$ oppure $x = \frac{1}{3}$.
- (t) Ponendo $t = e^{\frac{x}{2}}$, l'equazione diventa $(et + 1)(e^3 t^2 - 1) = 0$, che ha come unica soluzione positiva il valore $t = e^{-\frac{3}{2}}$; dunque $x = -3$.
- (u) Riscritta l'equazione come $3 \cdot 3^x = \frac{5}{5^x}$, ovvero $15^x = \frac{5}{3}$, si ottiene $x = \log_{15} \frac{5}{3}$.

- (v) Posto $t = 2^x$, si ottiene $2^{2^{t+1}} = (t+1)^{2^t}$ cioè $2^{2 \cdot 2^t} = (t+1)^{2^t}$ ovvero $4^{2^t} = (t+1)^{2^t}$; dunque deve essere $t+1 = 4$, cioè $t = 3$, da cui segue $x = \log_2 3$.
- (w) Dalla seconda equazione si ricava $3^y = \frac{18}{2^x}$; sostituendo nella prima equazione e successivamente ponendo $t = 2^x$, si ottiene $t^2 - 11t + 18 = 0$; le soluzioni sono $t = 2$ o $t = 9$. Deve dunque essere $2^x = 2$, $3^y = 9$ oppure $2^x = 9$, $3^y = 2$, cioè $x = 1$, $y = 2$, oppure $x = \log_2 9$, $y = \log_3 2$. Si può osservare anche che il sistema fornisce la somma e il prodotto di 2^x con 3^y ; queste due quantità sono dunque le soluzioni dell'equazione $t^2 - 11t + 18 = 0$; deve dunque essere $2^x = 2$, $3^y = 9$ oppure $2^x = 9$, $3^y = 2$, da cui segue $x = 1$, $y = 2$ oppure $x = \log_2 9$, $y = \log_3 2$.
- (z) Riscritta la seconda equazione nella forma $\frac{x^3}{x^y} = \frac{1}{3}$ e sostituendo per x^y il valore che ricaviamo dalla prima, si ottiene $x^3 = 27$. La soluzione del sistema è dunque $x = 3$, $y = 4$.

(7.10) Come già osservato per il problema precedente, utilizzando le proprietà degli esponenziali, possiamo ricondurre le disequazioni ad una delle seguenti forme:

- $a^x < a^y$, da cui segue che deve essere $x < y$ se $a > 1$, $x > y$ se $a < 1$. Si ricordi che la funzione a^x è crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$.
- $a^x < b$, da cui per $b > 0$ segue $x < \log_a b$ se $a > 1$, $x > \log_a b$ se $0 < a < 1$. Non ha soluzioni se $b \leq 0$.
- $ha^x < kb^x$, che si può scrivere $\left(\frac{a}{b}\right)^x < \frac{k}{h}$ se $h > 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x > \frac{k}{h}$ se $h < 0$, in entrambi i casi ricollegandoci al caso precedente. In particolare la disequazione $a^x < b^x$ diventa $\left(\frac{a}{b}\right)^x < 1$; questa è verificata per $x < 0$ se $\frac{a}{b} > 1$, cioè se $a > b$, per $x > 0$ se $\frac{a}{b} < 1$, cioè se $a < b$.

Risultati analoghi se nella disequazione compare uno degli altri possibili segni ($>$, $\leq$, $\geq$).

Osserviamo in particolare che per $b \leq 0$ le disequazioni $a^x > b$ o $a^x \geq b$ sono sempre verificate, mentre la disequazione $a^x \leq b$ non ha alcuna soluzione.

In certi casi un cambiamento di variabile $t = a^x$, riconduce ad un'equazione algebrica in t . Prendendo il logaritmo delle soluzioni positive così trovate, si ottengono le soluzioni in x .

- (a) La disequazione si può riscrivere nella forma $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^2$; poichè la base è minore di 1, da questo segue che deve essere $\frac{x}{2} > 2$, cioè $x \in (4, +\infty)$.
- (b) Riscritta la disequazione nella forma $2^{4x} \leq 2^6$ e osservato che la base è maggiore di 1, si deve avere $4x \leq 6$, cioè $x \in (-\infty, \frac{3}{2}]$.
- (c) Prendendo il logaritmo in base 3 di ambo i membri, si ottiene $x \in [\log_3 7, +\infty)$.
- (d) Riscritta la disequazione nella forma $3^{x^2-3x} \geq 3^{2x-4}$, si ottiene che deve essere $x^2 - 3x \geq 2x - 4$ e questo avviene per $x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$.
- (e) Poiché la base del primo esponenziale è minore di quella del secondo, la disequazione è verificata se l'esponente è negativo.

Un modo equivalente per arrivare a questo risultato consiste nel riscrivere la disequazione nella forma

$\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-6x+5} \geq 1$. Poiché la base è minore di 1, l'esponente deve essere negativo. L'insieme delle soluzioni è $[1, 5]$.

- (f) Poiché la prima base è maggiore della seconda, l'esponente deve essere positivo; questo accade per $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$.

- (g) Per risolvere la disequazione, prendiamo il logaritmo in base $\frac{1}{5}$ di ambo i membri; poiché la base scelta è minore di 1, il verso della disequazione si inverte. Deve essere $x \in [-\log_5 9, +\infty)$.
- (h) L'esponente deve essere minore o uguale a 0, dunque $x \in (-\infty, -1) \cup [0, 1]$.
- (i) Si pone $t = 5^{2x} > 0$, ottenendo $\frac{|t-1|}{t+1} < 1$, che è verificata da ogni $t > 0$; l'insieme delle soluzioni in x è dunque $\mathbb{R}$.
- (l) Il numeratore è positivo se $|x+2| > 1$, il denominatore se $x > \frac{1}{2}$. Dunque il rapporto è negativo o nullo se $|x+2| \geq 1$, $x < \frac{1}{2}$; oppure $|x+2| \leq 1$, $x > \frac{1}{2}$; da questo segue $x \in (-\infty, -3] \cup [-1, \frac{1}{2})$.
- (m) Posto $2^x = t > 0$, si ottiene $t^3 - 8t \geq 0$. La disequazione è verificata per $t \in [\sqrt[3]{8}, +\infty)$ e dunque per $x \in [\frac{3}{2}, +\infty)$.
- (n) Si risolve la disequazione in e^x , ottenendo $e^x \in [4, 5]$, cioè $x \in [\log 4, \log 5]$.
- (o) Nella disequazione $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}$ deve essere $x^2 + 3 < 4x$, cioè $x \in (1, 3)$.
- (p) La disequazione equivale a $-1 < 2^x < 3$ e poiché la condizione $2^x > -1$ è verificata per ogni x , si ottiene che deve essere $2^x < 3$, da cui segue $x \in (-\infty, \log_2 3)$.
- (q) Poiché la base è minore di 1, deve essere $1 - 5x \leq \log_{\frac{3}{4}} 2$, cioè $x \in \left[\frac{1 - \log_{\frac{3}{4}} 2}{5}, +\infty\right)$.
- (r) $4 \cdot 4^{2x} - \frac{7}{3} \cdot 3^{2x} > 7 \cdot 3^{2x} + \frac{1}{16} \cdot 4^{2x} \iff \frac{9}{16} \cdot 4^{2x} > \frac{4}{3} \cdot 3^{2x} \iff \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} > \left(\frac{4}{3}\right)^3 \iff x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.
- (s) Poiché la base x deve essere positiva, i due esponenti sono positivi; dunque il primo esponenziale è maggiore del secondo se la sua base è maggiore dell'altra: questo accade se $x \in (0, e)$.
Allo stesso risultato arriviamo riscrivendo il secondo membro nella forma $e^{(x+1)\log x}$. Deve dunque essere $(x+1) > (x+1)\log x$, ovvero (essendo $x > 0$) $\log x < 1$.
- (t) Nella prima disequazione si pone $t = 3^x$, ottenendo $t^2 - 2t + 1 > 0$; questa è verificata per $t \neq 1$, dunque per $x \neq 0$.
Nella seconda disequazione si pone invece $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, ottenendo $t^2 - 8t - 9 \geq 0$; questa è verificata per $t \geq 9$ oppure $t \leq -1$. Ritornando alla variabile x , si trova che deve essere $x \leq -2$. Il sistema è dunque risolto per $x \in (-\infty, -2]$.
- (u) Riscritta la disequazione nella forma $2^{2\sqrt{x-1}+x} > 2^3$, deve essere $2\sqrt{x-1} > 3 - x$; questo vale per $x \in (5 - 2\sqrt{3}, +\infty)$.

(7.11)

- (a) L'uguaglianza segue dal fatto che $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.
Perché abbiano senso i tre logaritmi, deve essere $x > 3$; per questi valori l'uguaglianza è valida.
Si osservi però che il primo membro è definito anche per $x < -3$; per questi valori l'uguaglianza va sostituita con $\log(x^2 - 9) = \log(-x+3) + \log(-x-3)$.
In ogni caso vale $\log(x^2 - 9) = \log|x-3| + \log|x+3|$.
- (b) L'uguaglianza segue dal fatto che $9 + 6x + x^2 = (x+3)^2$.
Perché abbiano senso entrambi i logaritmi e quindi valga l'uguaglianza, deve essere $x > -3$.
Per $x < -3$ l'uguaglianza si sostituisce con $\log(9 + 6x + x^2) = 2\log(-x-3)$. In generale possiamo scrivere $\log(9 + 6x + x^2) = 2\log|x+3|$.

- (c) Entrambi i logaritmi sono definiti per $x \neq 0$ e l'uguaglianza è valida in tutto il campo di esistenza.
- (d) Mentre il primo logaritmo è definito per $x \neq 0$, il secondo lo è solo per $x > 0$; dunque l'uguaglianza vale solo per $x > 0$.
- (e) Il primo logaritmo è definito per $x \neq 0$, il secondo lo è solo per $x < 0$; dunque l'uguaglianza vale solo per $x < 0$.
- (f) Entrambi i logaritmi sono definiti per $x > 0$; l'uguaglianza vale in tutto il campo di esistenza.
- (g) Entrambi i logaritmi sono definiti per $x \neq \frac{1}{3}$; l'uguaglianza vale in tutto il campo di esistenza.
- (h) Il primo logaritmo è definito per $x \neq \frac{1}{3}$, il secondo per $x > \frac{1}{3}$: dunque l'uguaglianza vale solo per $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$.
 Per $x \in (-\infty, \frac{1}{3})$ l'uguaglianza diventa $\log(3x - 1)^4 = 4 \log(1 - 3x)$.
 In generale, $\log(3x - 1)^4 = 4 \log |3x - 1|$.
- (i) Il primo logaritmo è definito per $x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$, mentre i logaritmi a secondo membro sono definiti simultaneamente solo per $x \in (1, +\infty)$ ed è in questo sottoinsieme che vale l'uguaglianza.
 Per $x \in (-2, 0)$ l'uguaglianza deve essere modificata sostituendo il secondo membro con $\log(-x) + \log(x + 2) + \log(1 - x)$.
 In generale, $\log(x^3 + x^2 - 2x) = \log |x| + \log(x + 2) + \log |x - 1|$.
- (l) Perché abbia senso i logaritmi, deve essere $x > \frac{1}{2}$ e l'uguaglianza è verificata per questi valori. Il primo logaritmo è definito anche per $x < -\frac{1}{4}$; in questo caso l'uguaglianza diventa

$$\log \sqrt{\frac{2x-1}{4x+1}} = \frac{1}{2} [\log(1-2x) - \log(-1-4x)].$$

In generale,

$$\log \sqrt{\frac{2x-1}{4x+1}} = \frac{1}{2} [\log |2x-1| - \log |4x+1|].$$

- (m) L'uguaglianza vale per $x \in (-4, +\infty)$, in modo da dare significato ai logaritmi.
 Il primo logaritmo è definito anche per $x < -5$; per questi valori l'uguaglianza diventa:

$$\log \sqrt[3]{\frac{5+x}{4+x}} = \frac{1}{3} [\log(-x-5) - \log(-x-4)].$$

In generale,

$$\log \sqrt[3]{\frac{5+x}{4+x}} = \frac{1}{3} [\log |x+5| - \log |x+4|].$$

(7.12)

- (a) Il campo di esistenza (C.E.) dell'equazione è l'intervallo $(-4, 2)$. Dopo aver riscritto il primo logaritmo nella forma $\log(x+4)^2$, uguagliando i due argomenti si arriva all'equazione $x^2 + 9x + 14 = 0$; delle due soluzioni $x = -2$, $x = -7$, solo la prima cade nel campo di esistenza e quindi è accettabile.
- (b) C.E.: $(3, +\infty)$. Riscritto il primo logaritmo nella forma $\frac{1}{2} \log(x-3)$, ci riconduciamo all'equazione $x-3 = 3x-4$, che fornisce $x = \frac{1}{2}$; poiché questo valore non appartiene al campo di esistenza, l'equazione di partenza è impossibile.
- (c) C.E.: $(7, +\infty)$. Scritta l'equazione nella forma $\log[3(x-5)(x-7)] = 0$, deve essere $3(x-5)(x-7) = 1$ cioè $3x^2 - 36x + 104 = 0$. Delle due soluzioni $x_{1,2} = 6 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$, è accettabile solo $6 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

(d) C.E.: $(2, +\infty)$. Scritta l'equazione nella forma $\log[\frac{1}{2}(3x-5)(x-2)] = 0$, deve essere $\frac{1}{2}(3x-5)(x-2) = 1$. Delle due soluzioni $x = 1$, $x = \frac{8}{3}$, è accettabile solo la seconda.

(e) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{10\}$. Risolvendo l'equazione, si trova $\log_{10} x = 2$, cioè $x = 100$.

(f) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{e^{\pm 3}\}$. Svolgendo i calcoli, si ottiene $\log x = 0$, cioè $x = 1$.

(g) C.E.: $(0, +\infty)$. Svolgendo i calcoli, si ottiene $\log_2 x = -8$ oppure $\log_2 x = 2$, cioè $x = \frac{1}{256}$ oppure $x = 4$.

(h) C.E.: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. Deve essere $\log_{\sqrt{2}} x = 8$, cioè $x = (2^{\frac{1}{2}})^8 = 16$.

(i) C.E.: $(0, +\infty)$. I grafici delle funzioni logaritmo si intersecano solo per $x = 1$; $x = 1$ è dunque l'unica soluzione dell'equazione.

Ritroviamo lo stesso risultato scrivendo i due logaritmi con la stessa base, ad esempio quella naturale:

$\log x = \frac{\log x}{\log 10}$; deve essere $\log x = 0$ cioè $x = 1$.

(l) C.E.: $\mathbb{R}$. La soluzione è $x = \log(e^2 - e) = 1 + \log(e - 1)$.

(m) C.E.: $(0, +\infty)$. Ponendo $\log |x| = t$, ci riconduciamo all'equazione di secondo grado $t^2 + 2t - 15 = 0$, che fornisce $t = -5$ oppure $t = 3$; dunque deve essere $x_{1,2} = \pm e^{-5}$ oppure $x = \pm e^3$.

(n) C.E.: $[1, +\infty)$. Ponendo $\log x = t$, studiamo l'equazione $\sqrt{t} = 1 - t$, che equivale a $t^2 - 3t + 1 = 0$, con $0 \leq t \leq 1$. L'unica soluzione è $t = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, da cui ricaviamo $x = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.

(o) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{1\}$. Passando al logaritmo naturale, si ha $\frac{\log x}{\log \frac{2}{5}} = \frac{\log \frac{2}{5}}{\log x}$, da cui $\log x = \pm \log \frac{2}{5}$ e quindi $x = \frac{2}{5}$ oppure $x = \frac{5}{2}$.

(p) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{e}, 1, e\}$. Prendendo l'esponenziale di base e di entrambi i membri, si ottiene $|\log |\log x|| = 1$ e quindi $\log |\log x| = \pm 1$. Prendendo ancora l'esponenziale, si trova $|\log x| = e^{\pm 1}$ cioè $\log x = \pm \frac{1}{e}$, dunque $x_{1,2} = e^{\pm e}$ oppure $x_{3,4} = e^{\pm \frac{1}{e}}$.

(q) C.E.: $(-1, 1) \setminus \{0\}$. Cambiando base, si ottiene $\log_2 \sqrt{1-x^2} = \frac{\log_2 |x|}{\log_2 4}$ ovvero $\log_2(1-x^2) = \log_2 |x|$; deve dunque essere $1-x^2 = |x|$ cioè $x^2 + |x| - 1 = 0$.

Risolvendo l'equazione di secondo grado in $|x|$, si trova $|x| = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ovviamente è accettabile solo la soluzione positiva e dunque $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(r) C.E.: $(0, +\infty)$. Con il cambiamento di base, si ha $\log_2 \frac{x + \sqrt{x^2+9}}{2x} = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}$.

Poiché il secondo membro si semplifica in $-\log_2 x = \log_2 \frac{1}{x}$, siamo ricondotti a studiare l'equazione $x + \sqrt{x^2+9} = 2$ ovvero $\sqrt{x^2+9} = 2-x$. La sua soluzione $x = -\frac{5}{4}$ non sta nel campo di esistenza e dunque l'equazione iniziale è impossibile.

(s) C.E.: $(\frac{1}{16}, +\infty)$. Cambiando base, si ottiene $\log_2(4 - \log_{\frac{1}{2}} x) = \frac{\log_2 16}{\log_2 \frac{1}{4}}$. Poiché il secondo membro vale -2 , deve essere $4 - \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4}$, che ha per soluzione $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{4}}$; il valore trovato appartiene al campo di esistenza.

(t) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{1\}$. Prendendo l'esponente di base 2 di entrambi i membri, si ottiene $|\log_{\frac{1}{2}} x| = 2$ ovvero $\log_{\frac{1}{2}} x = \pm 2$ e dunque $x_{1,2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 2}$, cioè $x = \frac{1}{4}$ oppure $x = 4$; entrambe le soluzioni appartengono al campo di esistenza.

- (u) Riscritto il sistema nella forma equivalente $x + y = 3$, $xy = 2$ con la condizione $x, y > 0$, con facili calcoli si ottiene $x = 1$, $y = 2$ oppure $x = 2$, $y = 1$.
- (v) Possiamo riscrivere il sistema nella forma equivalente $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 2$ con la condizione $x, y > 0$. Con facili calcoli si ottiene $x = 1$, $y = 1$.

(7.13)

- (a) C.E.: $(0, +\infty)$. Prendendo l'esponenziale di base 4 di entrambi i membri, il segno della disequazione rimane invariato e otteniamo $x < 2$. Le soluzioni sono dunque le $x \in (0, 2)$.
- (b) C.E.: $(0, +\infty)$. Prendendo l'esponenziale di base $\frac{1}{2}$ di entrambi i membri, il segno della disequazione cambia e otteniamo $x > \frac{1}{16}$. Le soluzioni sono dunque le $x \in (\frac{1}{16}, +\infty)$.
- (c) C.E.: $(0, +\infty)$. Prendendo l'esponenziale di base $\frac{1}{10}$ di entrambi i membri, il segno della disequazione cambia ed otteniamo $x < \frac{1}{\sqrt{10}}$. Le soluzioni sono dunque le $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{10}})$.
- (d) C.E.: $(0, +\infty)$. Prendendo l'esponenziale di base 3, il segno delle disequazioni si conserva e otteniamo $\sqrt{3} < x < 9$.
- (e) C.E.: $(0, +\infty)$. Prendendo l'esponenziale di base $\frac{1}{49}$, il segno delle disequazioni cambia e otteniamo $\frac{1}{7} < x < 7$.
- (f) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Prendendo l'esponenziale di base 3, il segno della disequazione si conserva e otteniamo $|x + 2| > \frac{1}{27}$. Cioè $x \in (-\infty, -\frac{55}{27}) \cup (-\frac{53}{27}, +\infty)$.
- (g) C.E.: $(\frac{5}{3}, +\infty)$. Prendendo l'esponenziale di base $\frac{1}{2}$, il segno della disequazione cambia e otteniamo $3x - 5 < \frac{1}{4}$. Dunque $x \in (\frac{5}{3}, \frac{7}{4})$.
- (h) C.E.: $(\frac{5}{3}, +\infty)$. Cambiando la base del logaritmo: $\frac{\log_{\frac{1}{4}}(3x - 5)}{\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}} = 2\log_{\frac{1}{4}}(3x - 5)$. Deve dunque essere $(3x - 5)^2 > 2x - 1$. Risolvendo la disequazione e tenendo conto del C.E., si trova $x > \frac{16 + \sqrt{22}}{9}$.
- (i) C.E.: $(0, +\infty)$. Ci riconduciamo a studiare la disequazione $\sqrt{x^2 + 9} > 3x$. Risolvendo la disequazione e tenendo conto del C.E., si trova $0 < x < \frac{3\sqrt{2}}{4}$.
- (l) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{1\}$. Posto $\log_2 x = t$, possiamo riscrivere $\frac{3t^2 - 5t - 12}{t} < 0$. Deve essere $t < -\frac{4}{3}$ oppure $0 < t < 3$, dunque $0 < x < \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ oppure $1 < x < 8$.
- (m) C.E.: $(\frac{1}{16}, +\infty)$. Riscriviamo il secondo logaritmo in base 2, ottenendo $\frac{\log_2 16}{\log_2 \frac{1}{4}} = -\frac{\log_2 16}{2} = -2$. Deve dunque essere $\log_2(4 - \log_{\frac{1}{2}} x) \leq -2$ ovvero $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \frac{15}{4}$, da cui si ottiene $\frac{1}{16} < x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{4}}$.
- (n) C.E.: $(-5, 1) \setminus \{-1\}$. L'insieme delle soluzioni è $[-\frac{21}{5}, 1) \setminus \{-1\}$.
- (o) C.E.: $(0, 1)$ (si trova imponendo che l'argomento sia positivo e la base positiva e diversa da 1). Poiché la base risulta sempre minore di 1, il logaritmo è positivo quando l'argomento è (positivo e) minore di 1. Deve dunque essere $x \in (\sqrt{24} - 4, 1)$.
- (p) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{1\}$. Deve essere $x > 1$ e $x^3 > 2$ oppure $0 < x < 1$, $x^3 < 2$; le soluzioni sono dunque date da $x \in (0, 1) \cup (2^{\frac{1}{3}}, +\infty)$.

$$(q) \text{ C.E.: } (0, +\infty). \log_8 \sqrt{x} = \frac{\log_8 x}{2} = \frac{\log_4 x}{2 \log_4 8} = \frac{\log_4 x}{3} = \log_4 \sqrt[3]{x};$$

$$\log_4 \left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} \right) < \frac{5}{3} \iff \log_4 x^{\frac{5}{3}} < \frac{5}{3} \iff \log_4 x < 1.$$

L'insieme delle soluzioni è l'intervallo $(0, 4)$.

$$(r) \text{ C.E.: } (-\infty, -3) \cup (3, +\infty). \text{ L'insieme delle soluzioni è } (-\infty, -3) \cup \left[3 \frac{e+1}{e-1}, +\infty \right).$$

$$(s) \text{ C.E.: } (3, +\infty) \setminus \{4\}. \text{ L'insieme delle soluzioni è } (3, 4).$$

(t)

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ \sqrt{x^2 - 1} < x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [1, +\infty) \\ x^2 - 1 < (x - 1)^2 \end{cases}$$

Poiché la disequazione è verificata per $x < 1$, il sistema non ha soluzioni.

$$(u) e^{\frac{\log x}{x}} > 1 \iff \frac{\log x}{x} > 0 \iff x > 1.$$

$$(v) \text{ Prendendo il logaritmo naturale di entrambe i membri, la disequazione data equivale a } (4x - 6) \log x \geq (x^2 - x) \log x \iff (x^2 - 5x + 6) \log x \leq 0; \text{ l'insieme delle soluzioni è } (0, 1] \cup [2, 3].$$

$$(w) \text{ C.E.: } (-4, -1) \cup (1, +\infty). \log_2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 4} \geq \frac{1}{2} \log_2 \frac{(x + 4)^2}{x^2 - 1} = \log_2 \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 4} \geq \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 - 1}} \iff x \in \left(-4, -\frac{17}{8} \right].$$

$$(z) \text{ C.E.: } (-\infty, -1) \cup (2, +\infty). \log_2 \frac{x + 1}{x - 1} < -\log_2 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = \log_2 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

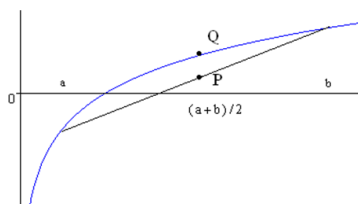
$$\frac{x + 1}{x - 1} < \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)} \iff (x - 2)(x + 1) < x^2 + 1.$$

la disequazione è verificata per $x > -3$; tenendo conto del C.E., deve essere $x \in (-3, -1) \cup (2, +\infty)$.

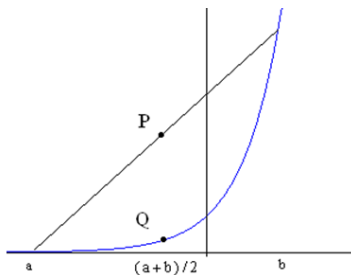
(7.14) Il significato geometrico della maggiorazione è illustrato nella figura precedente, dove Q è il punto di ordinata $\log \frac{a+b}{2}$, mentre P è il punto di ordinata $\frac{\log a + \log b}{2}$. Sostanzialmente il risultato stabilisce che in ogni intervallo (a, b) il grafico della funzione logaritmo sta al di sopra del segmento che unisce i punti del grafico di ascissa a e b ; questa proprietà è nota in analisi come concavità della funzione logaritmo naturale ed è valida per tutti i logaritmi di base maggiore di 1, mentre per quelli di base minore di 1 vale la proprietà opposta che viene detta convessità.

$$\log \sqrt{ab} \leq \log \frac{a+b}{2} \iff 2\sqrt{ab} \leq a+b \iff 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

che è ovviamente vera; in particolare si deduce che nella maggiorazione data vale il segno di uguaglianza solo se $a = b$.



7.14



7.15

(7.15)

Il significato geometrico della minoraione è illustrato nella figura precedente, dove Q è il punto di ordinata $e^{\frac{a+b}{2}}$, mentre P è il punto di ordinata $\frac{e^a + e^b}{2}$. Sostanzialmente il risultato stabilisce che in ogni intervallo (a, b) il grafico della funzione esponenziale sta al di sotto del segmento che unisce i punti del grafico di ascissa a e b ; tenendo conto di quanto detto nella soluzione del problema precedente, questa proprietà è detta convessità della funzione esponenziale ed è valida qualunque sia la base.

$$(e^{\frac{a}{2}})^2 + (e^{\frac{b}{2}})^2 \geq 2e^{\frac{a}{2}} e^{\frac{b}{2}} \iff (e^{\frac{a}{2}} - e^{\frac{b}{2}})^2 \geq 0$$

che è ovviamente vera; in particolare si deduce che nella minoraione data vale il segno di uguaglianza solo se $a = b$.

(7.16)

- (a) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

La funzione è positiva se $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, negativa se $x \in (0, 2) \setminus \{1\}$, nulla se $x = 0$ e se $x = 2$.

- (b) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

La funzione è positiva se $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, negativa se $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{-1, 0, 1\}$, nulla se $x = 0$ o $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

- (c) C.E.: $[1, +\infty)$.

La funzione è sempre positiva, eccetto se $x = 1$, valore per cui si annulla.

- (d) C.E.: $(0, +\infty) \setminus \{1\}$.

La funzione è positiva se $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$, negativa se $x \in (\frac{1}{e}, e) \setminus \{1\}$, nulla se $x = \frac{1}{e}$ e se $x = e$.

- (e) C.E.: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

La funzione è sempre positiva.

- (f) C.E.: $[-1, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$.

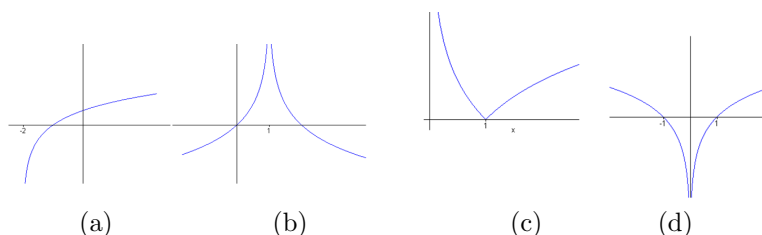
La funzione è positiva se $x \in (-1, 0)$, negativa se $x \in (0, 1) \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$, nulla se $x = -1$, $x = 0$ oppure $x = 1$.

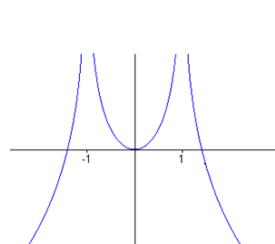
- (g) C.E.: $\mathbb{R}$.

La funzione è sempre positiva, eccetto che se $x = 0$, valore per cui si annulla.

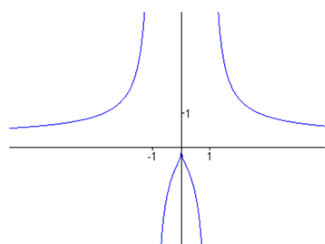
- (h) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{-1, \log 2\}$.

La funzione è positiva se $x \in (-\infty, -2) \cup (\log 2, +\infty)$, negativa se $x \in (-2, \log 2) \setminus \{-1, 0\}$, nulla se $x = -2$ e se $x = 0$.

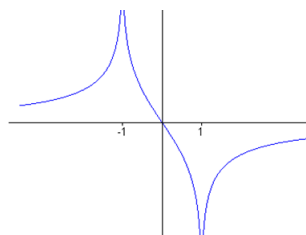
(7.17)



(e)



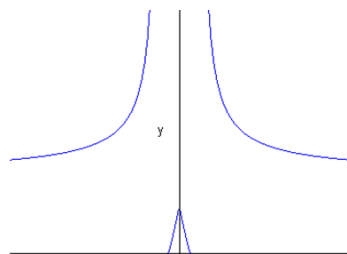
(f)



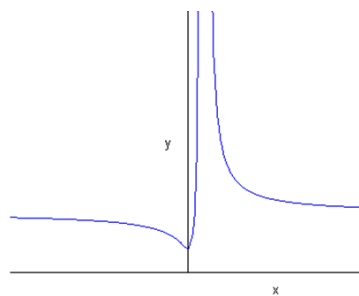
(g)



(h)



(i)



(l)