

CAPITOLO 6. SOLUZIONI: RADICI

(6.1) (a) $\sqrt[12]{64}$, $\sqrt[12]{16}$, $\sqrt[12]{27}$ (b) $\sqrt[30]{1024}$, $\sqrt[30]{64}$, $\sqrt[30]{27}$.

(6.2)

(a) $a \geq 0$; $\sqrt[12]{a^6}$, $\sqrt[12]{a^5}$, $\sqrt[12]{a^9}$.

(b) Le radici sono sempre definite; la terza se è $x^2 - y^2 \geq 0$, cioè $(x - y)(x + y) \geq 0$. Distinguiamo due casi:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| \leq x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Le radici diventano $\sqrt[6]{(x - y)^2}$, $\sqrt[6]{(x + y)^2}$, $\sqrt[6]{(x^2 - y^2)^3}$.

$$\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| \leq -x \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Le radici diventano $-\sqrt[6]{(x - y)^2}$, $-\sqrt[6]{(x + y)^2}$, $\sqrt[6]{(x^2 - y^2)^3}$.

Sintetizzando i due casi scrivendo la condizione nella forma $|y| \leq |x|$ e facendo precedere le prime due radici da $\operatorname{sgn} x$ (che vale 1 se $x > 0$, -1 se $x < 0$; si osservi che per $x = 0$ deve essere anche $y = 0$ e le tre radici si annullano).

(6.3)

(a) $\sqrt{\frac{5}{9}}$, (b) $\sqrt[3]{32}$ (c) $x, y \neq 0$; $\sqrt[3]{\frac{2}{x^5 y}}$.

(d) Procedendo come nell'esercizio 6.2(b), deve essere $|b| \leq |a|$, $b \neq a$ (questa conclusione assicura che sono positivi sia il termine sotto radice sia il termine precedente). Possiamo riscrivere l'espressione nella forma $\sqrt[4]{(a - b)^3(a + b)^5}$.

(e) $x \neq 0$; $\sqrt[3]{x^2 y}$ (f) $x \neq 0$, $y \geq 0$; $\operatorname{sgn} x \sqrt{y} = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{se } x > 0 \\ -\sqrt{y} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(6.4)

(a) $3ab^2 \sqrt[3]{3a^2 b}$ (b) $2\pi x^2 \sqrt{7\pi x}$ (c) $x \sqrt[3]{y}$
(d) $|x| \sqrt{xy}$ (e) $3y^2 \sqrt[5]{xy(3y^2 - 1)}$ (f) $2(x + y)z^2 \sqrt[4]{4(x + y)}$

(6.5) (a) 21, (b) $49 - 20\sqrt{6}$, (c) $2^{\frac{209}{21}}$

(d) $\sqrt{\sqrt{a}(a + 1 + 2\sqrt{a})(\sqrt{a} - 1)} = \sqrt{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)^2(\sqrt{a} - 1)} = \sqrt[4]{a}(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1) = \sqrt[4]{a}(a - 1)$

(e) $a + 3\sqrt[3]{a^2 b} + 3\sqrt[3]{ab^2} + b$

(f) Se n è pari l'espressione è definita per ogni x , se n è dispari per ogni $x \geq 0$; in entrambi i casi vale $\sqrt[30]{x^{26n+4}}$.

(g) L'espressione è definita per $a \geq 0$, $b \leq a^2$ e vale $a + \sqrt{b}$.

(6.6)

(a) $5 \frac{\sqrt[3]{4}}{6}$ (b) $\frac{3 + \sqrt{2}}{7}$ (c) $-\frac{(1 - \sqrt{\pi + 1})^2}{\pi}$
(d) $\frac{(a + b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$ (e) $3 - \sqrt{6}$ (f) $\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}$
(g) $\frac{a + 2\sqrt[3]{a^2 b} + 2\sqrt[3]{ab^2} + b}{a - b}$ (h) $\frac{(\sqrt[4]{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{2}$

(6.7) Prima di elevare al quadrato in una equazione o disequazione contenente una radice quadrata occorre prestare attenzione al segno dell'altro termine. La disequazione data equivale a:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 - 1 > x^2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema è impossibile, il secondo fornisce $x \in (-\infty, -1]$.

(6.8) L'errore consiste nell'aver sostituito $\sqrt{(x^2 - 1)^2}$ con $x - 1$ invece che con $|x - 1|$.
L'equazione data equivale a:

$|x - 1| = 1 \iff x - 1 = 1$ oppure $x - 1 = -1$, da cui segue $x = 2$ oppure $x = 0$.

(6.9) Le radici a primo membro delle uguaglianze sono definite per ogni valore di x ; occorre controllare che i due membri abbiano lo stesso segno.

- (a) Il primo membro si può riscrivere nella forma $|(x - 2)(x - 5)|$ e coincide con $(x - 2)(x - 5)$ per $x \in (-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$. Per $x \in (2, 5)$ dobbiamo sostituire il secondo membro con $(x - 2)(5 - x)$.
- (b) $|x||x - 1| = -x(x - 1) = x(1 - x)$ per $x \in [0, 1]$. Per $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ dobbiamo sostituire il secondo membro con $x(x - 1)$.
- (c) L'uguaglianza è sempre vera, in quanto la radice è di ordine dispari.
- (d) Il primo membro vale $x(x + 1)$ e coincide con $|x(x + 1)|$ per $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.

(6.10)

- (a) $[-1, 1]$; poiché in questo intervallo le due radici a secondo membro hanno senso, l'uguaglianza è sempre vera.
- (b) $(-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$; l'uguaglianza vale solo per $x \in [5, +\infty)$, mentre per $x \in (-\infty, 0]$ si deve modificare il secondo membro in $\sqrt[4]{-x} \sqrt[4]{5 - x}$.
- (c) $(-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$; l'uguaglianza vale in tutto il dominio.
- (d) $[-1, +\infty)$; l'uguaglianza vale solo per $x \in [0, +\infty)$, mentre per $[-1, 0)$ il secondo membro si deve cambiare con $-x\sqrt{x + 1}$.
- (e) $[-1, +\infty)$; l'uguaglianza è sempre vera.
- (f) $\mathbb{R}$; il primo membro vale $x + 1$ e coincide con $|x + 1|$ solo per $x \in [-1, +\infty)$.
- (g) $\mathbb{R}$; il primo membro vale $\sqrt[3]{x + 2}\sqrt[3]{x - 2}$ e coincide con il secondo se $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
- (h) $[-1, 1]$; il primo membro vale $|x|\sqrt{1 - x^2}$ e coincide con il secondo per $x \in [-1, 0]$.
- (i) $[-1, 1]$; l'uguaglianza è sempre vera.
- (l) $\mathbb{R}$; il primo membro si può riscrivere nella forma $|(x - 1)(x + 1)|$ e coincide con il secondo per $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
Per $x \in (-1, 1)$ dobbiamo sostituire il secondo membro con $(1 - x)(1 + x)$.

(6.11)

$$(a) \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 = 4(3x - 1) \end{cases} \iff x = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad & \begin{cases} 5x - 1 \geq 0 \\ (5x - 1)^2 = 10x + 6 \end{cases} \iff x = 1 \\
\text{(c)} \quad & \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x + 3 + 2\sqrt{x^2 + 3x + 2} = 25 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x^2 + 3x + 2} = 11 - x \end{cases} \iff \\
& \begin{cases} -1 \leq x \leq 11 \\ 25x = 1119 \end{cases} \iff x = \frac{119}{25} \\
\text{(d)} \quad & \sqrt{x+6} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \iff \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 3x - 4 + 2\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = x + 6 \end{cases} \iff \\
& \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ \sqrt{2x^2 - 3x - 5} = 5 - x \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{5}{2} \leq x \leq 5 \\ x^2 + 7x - 30 = 0 \end{cases} \iff x = 3. \\
\text{(e)} \quad & \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ (5x - 1)^2 = |10x + 6| \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ (5x - 1)^2 = 10x + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ 5x^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases} \iff x = 1. \\
\text{(f)} \quad & \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 = 4|3x - 1| \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 = 4(1 - 3x) \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 = 4(3x - 1) \end{cases} \iff \\
& \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 + 12x - 4 = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 12x + 4 = 0 \end{cases} \iff x = 2\frac{\sqrt{2}-1}{3} \text{ oppure } x = \frac{2}{3}. \\
\text{(g)} \quad & \begin{cases} x \leq -7 \\ 4x - 3x = (x + 7)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -7 \\ x^2 + 17x + 45 = 0 \end{cases} \iff x = \frac{-17 - \sqrt{109}}{2}. \\
\text{(h)} \quad & \begin{cases} x \geq -3 \\ x + 2 = (x + 3)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 5x + 7 = 0 \end{cases} . \text{ Non esistono soluzioni.} \\
\text{(i)} \quad & \begin{cases} x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 2x^4 + 1 = (x^2 - 1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ x^4 + 2x^2 = 0 \end{cases} . \text{ Non esistono soluzioni.} \\
\text{(l)} \quad & x^3 - 4x = (x - 1)^3 \iff 3x^2 - 7x + 1 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}. \\
\text{(m)} \quad & \begin{cases} x > 1 \\ x = 3\sqrt{x-1} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 9x + 9 = 0 \end{cases} \iff x_{1,2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2} \\
\text{(n)} \quad & \begin{cases} 7 - 2x \geq 0 \\ x - x^2 = 7 - 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq \frac{7}{2} \\ x^2 - 3x + 7 = 0 \end{cases} . \text{ Non esistono soluzioni.} \\
\text{(o)} \quad & \begin{cases} x \neq -1 \\ 64x^2(x + 1) = 27x^3 \end{cases} \iff x = 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \neq 1 \\ 64(x + 1) = 27x \end{cases} \iff x = 0 \text{ oppure } x = -\frac{64}{37}. \\
\text{(p)} \quad & \begin{cases} x > 3 \\ 2\sqrt{x-3} = x - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 3 \\ 4(x - 3) = (x - 2)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases} \iff x = 4. \\
\text{(q)} \quad & \begin{cases} x \geq 1 \\ x + \sqrt{x-1} = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} = 3 - x \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x - 1 = (3 - x)^2 \end{cases} \iff x = 2.
\end{aligned}$$

(6.12)

$$\text{(a)} \quad |x - 1| < 4 \iff x \in (-3, 5).$$

$$(b) \begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x - 5 > (x + 1)^2 \end{cases}.$$

Il primo sistema è ancora evidentemente impossibile; lo è anche il secondo, che equivale a $x \geq -1$, $x^2 \leq -6$.

$$(c) \begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ 3 - 2x \leq (x + 2)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left[-2, \frac{3}{2}\right] \\ x^2 + 6x + 1 \geq 0 \end{cases} \iff x \in \left[-3 + 2\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right].$$

$$(d) \begin{cases} 6x - x^2 \geq 0 \\ 3 - 2x \geq 0 \\ 6x - x^2 < (3 - 2x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \\ 5x^2 - 18x + 9 > 0 \end{cases} \iff x \in \left[0, \frac{3}{5}\right]$$

$$(e) \begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x^2 - 9 \leq 2x + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \\ x^2 - 2x - 10 \leq 0 \end{cases} \iff x \in [3, 1 + \sqrt{11}]$$

$$(f) x^3 - 1 < (x + 3)^3 \iff 9x^2 + 27x + 28 > 0, \text{ che è sempre verificata.}$$

$$(g) x^3 - 2x - 1 \geq 0 \iff (x + 1)(x^2 - x - 1) \geq 0 \iff x \in \left[-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

$$(h) x \leq 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ |x^2 - 1| \geq x^2 \end{cases} \iff x \leq 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq x^2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq -x^2 \end{cases} \iff x \in \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$(i) \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 2x > 3\sqrt{x^2 - 1} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x \geq 0 \\ 4x^2 > 9(x^2 - 1) \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ 5x^2 < 9 \end{cases} \iff x \in \left(1, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$(l) \begin{cases} 1 - x > 0 \\ \sqrt{2x - x^2} \geq 1 - x \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} 1 - x < 0 \\ \sqrt{2x - x^2} \leq 1 - x \end{cases}$$

Il secondo sistema è evidentemente impossibile; per quanto riguarda il primo, si ha:

$$\begin{cases} x < 1 \\ 2x - x^2 \geq (1 - x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1 \\ 2x^2 - 4x + 1 \leq 0 \end{cases} \iff x \in \left[\frac{2 - \sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

(m) L'espressione a primo membro è definita sotto le condizioni:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 1 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 1 \neq x + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore.

Numeratore: è positivo (nel senso debole ≥ 0) se

$$\sqrt{x} \leq 3x - 1 \iff \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x \leq (3x - 1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 7x + 1 \geq 0 \end{cases} \iff x \geq \frac{7 + \sqrt{13}}{18}.$$

Denominatore: è positivo (nel senso debole ≥ 0) se

$$\sqrt{x^2 + 1} \leq \sqrt{x + 2} \iff x^2 - x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Numeratore e denominatore sono discordi se $x \in \left[\frac{7 + \sqrt{13}}{18}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$; la disequazione è dunque verificata in questo intervallo.

- (n) La radice cubica è sempre definita, quella quadrata lo è per $x \in A = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Studiamo separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore in A .

Numeratore: è positivo (nel senso debole ≥ 0) se

$$x \geq \sqrt[3]{x^3 - x + 1} \iff x^3 \geq x^3 - x + 1 \iff x \geq 1.$$

Denominatore: è positivo (nel senso debole ≥ 0) se

$$x \in A, \sqrt{x(x-2)} \geq x-3 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [2, 3] \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 3 \\ 4x \geq 9 \end{cases}$$

Dunque in A il denominatore è sempre positivo.

Numeratore e denominatore sono discordi se $x \in (-\infty, 0]$; la disequazione è dunque verificata in questo intervallo.

- (o) Perché l'espressione al primo membro sia definita, deve essere $\begin{cases} 4x-1 \geq 0 \\ 4x-1 \neq 9 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases}$

In particolare, il denominatore è positivo per $x > \frac{5}{2}$, negativo per $\frac{1}{4} \leq x < \frac{5}{2}$. Studiamo la disequazione distinguendo i due casi.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 3x+5 > 2\sqrt{4x-1}-6 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{1}{4} < x < \frac{5}{2} \\ 3x+5 < 2\sqrt{4x-1}-6 \end{cases} \iff \\ & \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 2\sqrt{4x-1} < 3x+11 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{1}{4} < x < \frac{5}{2} \\ 2\sqrt{4x-1} > 3x+11 \end{cases} \iff \\ & \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 9x^2+50x+125 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{1}{4} < x < \frac{5}{2} \\ 9x^2+50x+125 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il secondo sistema è impossibile; il primo sistema (e dunque anche la disequazione) è verificato per $x > \frac{5}{2}$.

- (p) Perché siano definite le due radici deve essere $x \in A = [-3, 1]$. Studiamo separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore in A .

Numeratore: è positivo se

$$x \in A, \sqrt{1-x} \leq 3-4x \iff x \in \left[-3, \frac{3}{4}\right], 16x^2-23x+8 \geq 0 \iff x \in \left[-3, \frac{23-\sqrt{17}}{32}\right]$$

Denominatore: è positivo se

$$x \in A, \sqrt{x+3} \geq 4-2x \iff x \in A, 4x^2-17x+13 \geq 0.$$

In A il denominatore è sempre positivo (in particolare, vale 0 per $x = 1$).

Numeratore e denominatore sono discordi se $x \in \left[\frac{23-\sqrt{17}}{32}, 1\right)$; la disequazione è verificata in questo intervallo.

$$(q) \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ 2x + 3 + 2\sqrt{x^2 + 3x + 2} > x + 5 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3x + 2} > 2 - x \end{array} \right\} \iff$$

$$x > 2 \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 2 \\ 3x^2 + 16x + 4 > 0 \end{array} \right\} \iff x > 2 \text{ oppure } x \in \left(\frac{-8 + 2\sqrt{13}}{3}, 2 \right] \iff$$

$$x \in \left(\frac{-8 + 2\sqrt{13}}{3}, +\infty \right).$$

$$(r) \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \\ \left| \frac{x+2}{x-1} \right| > 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \\ |x+2| > |x-1| \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \\ x^2 + 4x + 4 > x^2 - 2x + 1 \end{array} \right\} \iff$$

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty).$$

$$(s) \left\{ \begin{array}{l} x + 3 \geq 0 \\ x + 3 > x^2 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x^2 - x - 3 < 0 \end{array} \right\} \iff x \in \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right).$$

$$(t) \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 > 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} < -x - 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ x \in (-\infty, -1] \\ x^2 - 4 < (x+1)^2 \end{array} \right\} \iff x \in \left(-\frac{5}{2}, -2\right).$$

(u) Basta dare significato alle radici, dopo di che, tenendo conto del segno negativo a primo membro e del fatto che le due radici non si annullano per uno stesso valore, la disequazione è sicuramente verificata. Deve dunque essere:

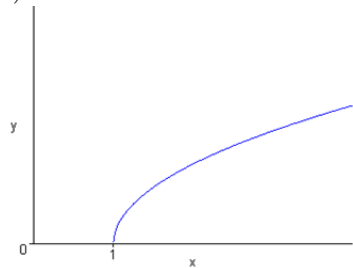
$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{array} \right\} \iff x \in [-4, -1] \cup [1, +\infty).$$

$$(v) \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x - 2 < 0 \end{array} \right\} \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ (x - 2)^2 \leq x^3 \end{array} \right\} \iff x \in [0, 2) \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x^3 - x^2 + 4x - 4 \geq 0 \end{array} \right\} \iff$$

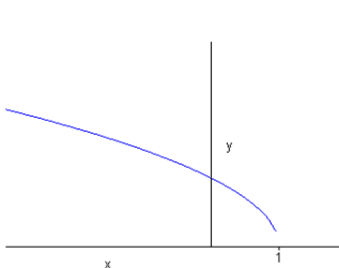
$$x \in [0, 2) \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ (x^2 + 4)(x - 1) \geq 0 \end{array} \right\} \iff x \in [0, 2) \cup [2, +\infty) = [0, +\infty).$$

(6.13)

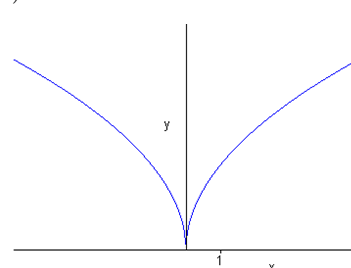
(a)



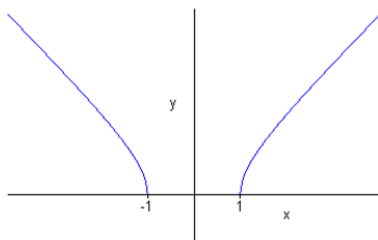
(b)



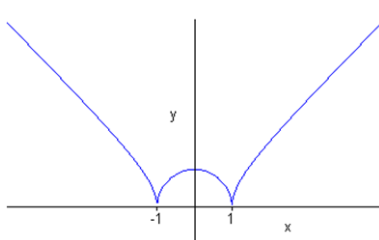
(c)



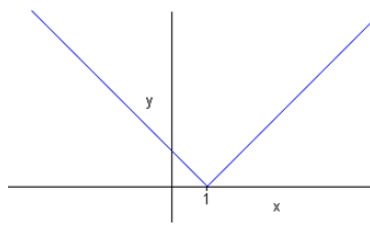
(d)



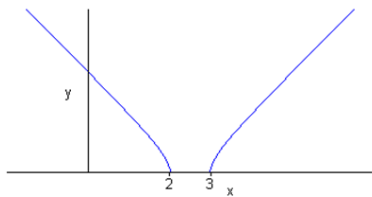
(e)



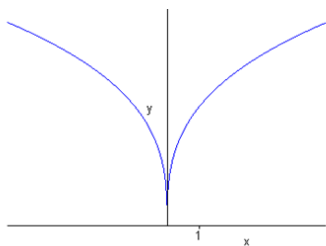
(f)



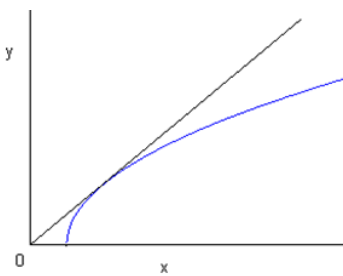
(g)



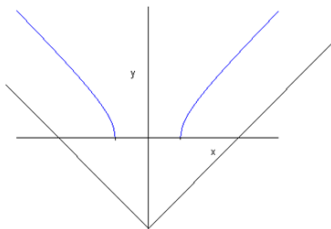
(h)

**(6.14)**

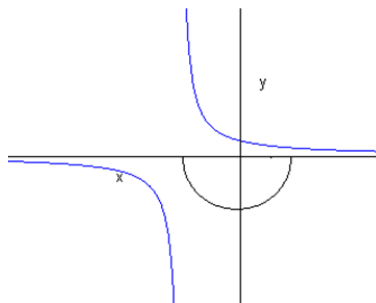
(a)



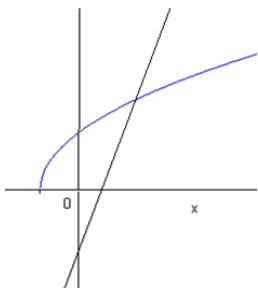
(b)



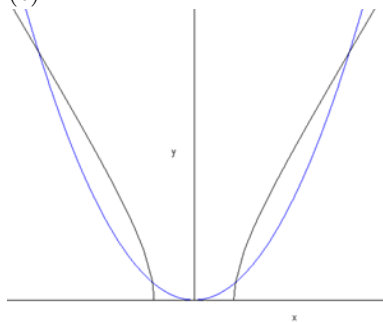
(c)



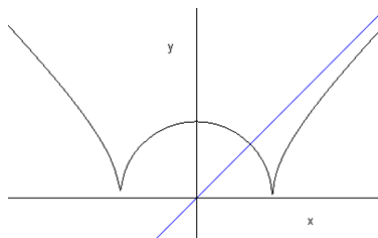
(d)



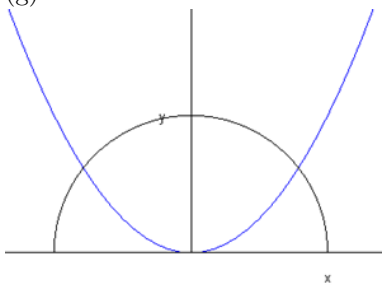
(e)



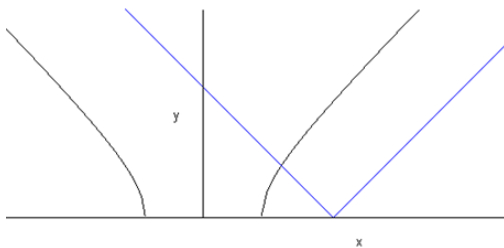
(f)



(g)



(h)



Soluzione per via algebrica:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 = 4(3x - 1) \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 12x + 4 = 0 \end{cases} \iff x = \frac{2}{3}. \\
 \text{(b)} \quad & \begin{cases} x^2 - 5 \geq 0 \\ |x| - 5 < 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x^2 - 5 \geq 0 \\ |x| - 5 \geq 0 \\ |x| > 3 \end{cases} \iff x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty).
 \end{aligned}$$

(c) Il campo di esistenza è $(-2, 2]$; in questo intervallo la disequazione è verificata, perché il primo membro è positivo, il secondo negativo.

$$(d) \begin{cases} x \geq -\frac{3}{5} \\ x \geq \frac{1}{5} \\ (5x-1)^2 = 10x+6 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ 5x^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases} \iff x = 1.$$

$$(e) \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^4 - 16x^2 + 16 \geq 0 \end{cases} \iff 1 \leq x^2 \leq 4(2 - \sqrt{3}) \text{ oppure } x^2 \geq 4(2 + \sqrt{3}) \dots\dots\dots$$

$$(f) \begin{aligned} &x < 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ |x^2 - 1| > x^2 \end{cases} \iff x < 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 > x^2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 < -x^2 \end{cases} \iff \\ &x < 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < \frac{1}{2} \end{cases} \iff x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$(g) \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^4 + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

$$(h) \begin{cases} x \geq \sqrt{5} \\ 10x > 30 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \leq -\sqrt{5} \\ 10x > 30 \end{cases} \iff x > 3.$$

(6.15) Nel primo caso, elevando al quadrato, si ottengono le maggiorazioni equivalenti:

$$a + b - 2\sqrt{ab} < a + b < a + b + 2\sqrt{ab} \iff -2\sqrt{ab} < 0 < 2\sqrt{ab}$$

che sono evidentemente verificate; si osservi in particolare che in queste maggiorazioni (e quindi in quelle iniziali) vale il segno di uguale se e solo se almeno uno tra a e b è nullo.

Nel secondo caso si ha:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \iff (a-b)^2 \geq 0$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \iff \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

che abbiamo già verificato.

Si osservi che in queste minorazioni vale il segno di uguaglianza se e solo se $a = b$.