

CAPITOLO 5. SOLUZIONI: EQUAZIONI, DISEQUAZIONI, SISTEMI

(5.1) Per prima cosa si osservi che l'equazione è definita per $x \neq 1$ ed ha per soluzione $x = 3$.

- (a) È equivalente
- (b) È equivalente, anche se la funzione che abbiamo aggiunto non è definita per $x = 0$; questo perché $x = 0$ non è soluzione.
- (c) Non è equivalente: la funzione che abbiamo aggiunto non è definita per $x = 3$ che è proprio la soluzione.
- (d) È equivalente: anche se abbiamo moltiplicato per una funzione che si annulla in un punto, dato che questo punto non appartiene al campo di esistenza delle due equazioni.
- (e) Non è equivalente, perché l'equazione ottenuta non contiene soltanto quella data, ma anche l'equazione $\frac{x+1}{x-1} = -2$ (che ha per soluzione $x = -\frac{1}{3}$).
- (f) È equivalente, dato che abbiamo diviso per una funzione che non si annulla.

(5.2)

- (a) È sempre equivalente.
- (b) Solo se $x = 0$ non è soluzione dell'equazione data.
- (c) Solo se $x = 1$ è soluzione dell'equazione data.
- (d) Solo se $x = 1$ e $x = -1$ non sono soluzioni dell'equazione data.
- (e) È sempre equivalente.
- (f) Solo se l'equazione data non ha soluzioni.

(5.3) La disequazione è definita per $x \neq 1$ ed è verificata per $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

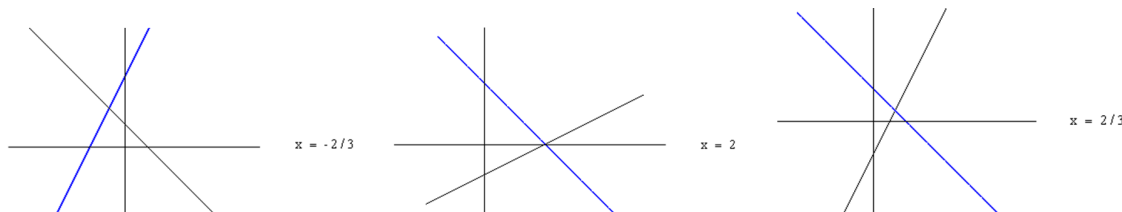
- (a) Non è equivalente (non si confonda con $\frac{x+1}{x-1} - 2 < 0$).
- (b) Non è equivalente (non si confonda con $\frac{1}{2} \frac{x+1}{x-1} < 1$).
- (c) Non è equivalente (equivale a $\frac{x+1}{x-1} > 2$).
- (d) Non è equivalente (equivale a $-2 < \frac{x+1}{x-1} < 2$).
- (e) È equivalente.
- (f) Non è equivalente (nell'insieme delle soluzioni dell'equazione data la funzione per cui si è moltiplicato non ha segno costante positivo).

(5.4)

- (a) Non è equivalente (a parte il caso banale $g(x) = 0$, per ogni x): non si confonda con $f - g < 0$.
- (b) Non è equivalente.
- (c) Non è equivalente (equivale a $f(x) > g(x)$).

- (d) Solo se nell'insieme di soluzione risulta $x > 1$ (infatti equivale a $(x-1)[f(x)-g(x)] < 0$).
- (e) È equivalente.
- (f) Solo se nell'insieme di soluzione risulta $g(x) > 0$.
- (g) Solo se nell'insieme di soluzione risulta anche $f(x)+g(x) > 0$ (infatti la disequazione equivale a scrivere $f^2(x)-g^2(x) < 0$, cioè $[f(x)-g(x)][f(x)+g(x)] < 0$).
- (h) Solo se nell'insieme delle soluzioni è $g(x) > 0$.

(5.5)



(5.6)

- (a) Per $k = 0$ e $h = 1$ è indeterminata; per $k = 0$ e $h \neq 1$ è impossibile; per $k \neq 0$: $x = \frac{h-1}{k}$.
- (b) Per $k = 1$ e $h = \pm 1$ è indeterminata; per $k = 1$ e $h \neq \pm 1$ è impossibile; per $k \neq 1$: $x = -\frac{h^2-1}{k-1}$.
- (c) Per $k = 0$ non ha senso; per $k = \pm 1$ e $h = 0$ è indeterminata; per $k = \pm 1$ e $h \neq 0$ è impossibile; per $k \neq \pm 1$ e $k \neq 0$ ha come unica soluzione $x = -\frac{hk}{k^2-1}$.

(5.7) Per l'interpretazione geometrica, si vedano le figure di **(5.5)**

- (a) $x \geq -\frac{2}{3}$ (b) $x > 2$ (c) $x \geq \frac{2}{3}$

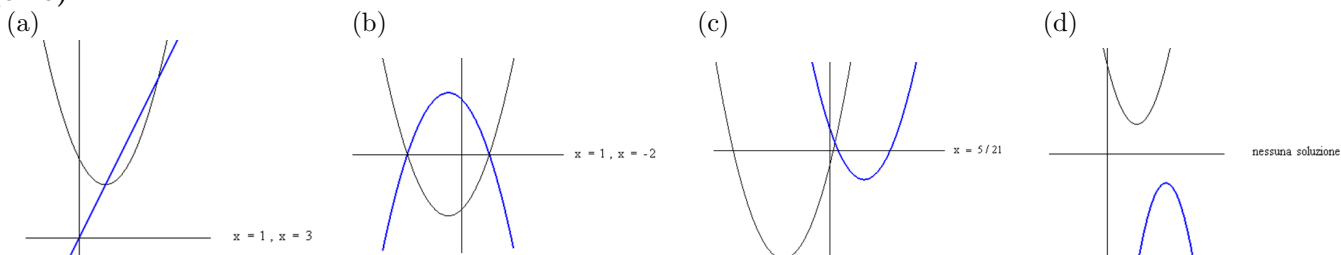
(5.8)

- (a) Per $k = 0$ è impossibile; per $k > 0$: $x \geq \frac{1}{k}$; per $k < 0$: $x \leq \frac{1}{k}$.
- (b) Per $k > 1$ oppure $k < 0$: $x < \frac{1}{k-1}$; per $0 < k < 1$: $x > \frac{1}{k-1}$; per $k = 0$ è impossibile; per $k = 1$ è sempre verificata.
- (c) Per $k > 1$: $x \leq \frac{h-1}{k-1}$; per $k < 1$: $x \geq \frac{h-1}{k-1}$; per $k = 1$ e $h \geq 1$ è indeterminata; per $k = 1$ e $h < 1$ è impossibile.
- (d) Per h e k non contemporaneamente nulli $x > \frac{hk}{h^2+k^2}$; per $h = k = 0$ è impossibile.

(5.9) Riscritta la disequazione nella forma $(a-c)x < (d-b)$, si ha:

$$\begin{array}{ll} \text{se } a < c & x > \frac{d-b}{a-c}; \\ \text{se } a > c & x < \frac{d-b}{a-c} \\ \text{se } a = c, b < d & \text{è sempre verificata;} \\ \text{se } a = c, b \geq d & \text{è impossibile} \end{array}$$

(5.10)



(5.11)

- (a) Per $k = 0$ l'equazione si abbassa di grado ed ha per soluzione $x = -1$. Per $k \neq 0$ risulta $\Delta = 1 - 4k$; dunque

$$\begin{array}{ll} \text{per } k > \frac{1}{4} & \text{nessuna soluzione} \\ \text{per } k = \frac{1}{4} & x = -2 \\ \text{per } k < \frac{1}{4}, k \neq 0 & x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k}}{2k} \end{array}$$

- (b) $\Delta = 5k^2$; dunque

$$\begin{array}{ll} \text{per } k = 0 & x = 0 \\ \text{per } k \neq 0 & x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}k \end{array}$$

- (c) $\Delta = k^2 + 4k$; dunque

$$\begin{array}{ll} \text{per } k < -4 \text{ oppure } k > 0 & x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4k}}{2} \\ \text{per } -4 < k < 0 & \text{nessuna soluzione} \\ \text{per } k = 0 & x = 0 \\ \text{per } k = -4 & x = 2 \end{array}$$

- (d) Per $k = 0$ l'equazione si abbassa di grado ed ha per soluzione $x = 0$. Per $k \neq 0$ risulta $\Delta = 1 - 4k^2$; dunque

$$\begin{array}{ll} \text{per } k > \frac{1}{2} \text{ oppure } k < -\frac{1}{2} & \text{nessuna soluzione} \\ \text{per } -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2} & x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k^2}}{2k} \\ \text{per } k = \frac{1}{2}: x = -1 & \text{per } k = -\frac{1}{2}: x = 1 \end{array}$$

(5.12)

- (a) nessuna soluzione (b) $x = -1$ (c) $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
 (d) $x \neq \frac{1}{2}$ (e) nessuna soluzione (f) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

(5.13)

- (a) Per $k \geq 0$ è sempre verificata; per $k < 0$: $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{-k}}, \frac{1}{\sqrt{-k}}\right]$.

- (b) $x = k$.

- (c) Il polinomio si annulla per $x = -1$ e per $x = k$ e la disequazione è verificata per i valori esterni all'intervallo delle radici. Dunque, se $k > -1$ deve essere $x \in (-\infty, -1) \cup (k, +\infty)$; se $k < -1$ risulta invece $x \in (-\infty, k) \cup (-1, +\infty)$; se $k = -1$ la disequazione diventa $(x + 1)^2 > 0$ ed è verificata per $x \neq -1$.

- (d) Se $k \neq 0$ il polinomio si annulla per $x = k$ e per $x = 2k$ ed è negativo per i valori interni all'intervallo delle radici. Dunque, se $k > 0$ deve essere $x \in (k, 2k)$, se $k < 0$: $x \in (2k, k)$. Se $k = 0$ la disequazione diventa $x^2 < 0$, che è impossibile.

(5.14)

- (a) Posto $t = x^2$, l'equazione $4t^2 - 37t + 9 = 0$ è verificata per $\frac{1}{4}$ e per $t = 9$; deve dunque essere $x = \pm \frac{1}{2}$ oppure $x = \pm 3$.

- (b) Posto $t = x^2$, la disequazione $4t^2 - 37t + 9 < 0$ è verificata per $\frac{1}{4} < t < 9$; deve dunque essere $\frac{1}{4} < x^2 < 9$ cioè $x \in (-3, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 3)$.

(c) Osservato che $x = 1$ è una soluzione, utilizzando il teorema di Ruffini possiamo scomporre il polinomio e riscrivere l'equazione nella forma $(x - 1)(x^2 + 4x + 1) = 0$; alla soluzione già nota si aggiungono le soluzioni $-2 \pm \sqrt{3}$.

(d) Tenendo conto di quanto trovato nel problema precedente possiamo riscrivere la disequazione nella forma $(x - 1)(x^2 + 4x + 1) \geq 0$; a questo punto occorre studiare il segno dei due fattori a primo membro e prendere gli intervalli in cui sono concordi. Possiamo sintetizzare i calcoli nella tabella successiva, in cui la linea continua indica intervalli di positività, quella tratteggiata intervalli di negatività:

$$P(x) = x - 1$$

$$Q(x) = x^2 + 4x + 1$$

La disequazione è dunque verificata per $x \in [-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}] \cup [1, +\infty)$.

(e) Posto $t = x^2$, l'equazione $t^2 - 5t + 4 = 0$ è verificata per $t = 1$ e per $t = 4$; deve dunque essere $x = \pm 1$ oppure $x = \pm 2$.

(f) Per quanto visto in (e), i fattori $x^2 - 4$, $x^2 - 1$ devono avere lo stesso segno; questo accade se $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$.

(g) Applicando il teorema di Ruffini, possiamo scomporre il polinomio a primo membro e riscrivere l'equazione nella forma $(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x^2 + 2) = 0$; da questa si deducono le soluzioni $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$.

(h) Tenendo conto di quanto trovato in (g), deve essere $(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x^2 + 2) \leq 0$ che si può semplificare in $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \leq 0$ (dividendo per il termine $x^2 + 2$ che è strettamente positivo)

$$P(x) = x + 2$$

$$Q(x) = x - 1$$

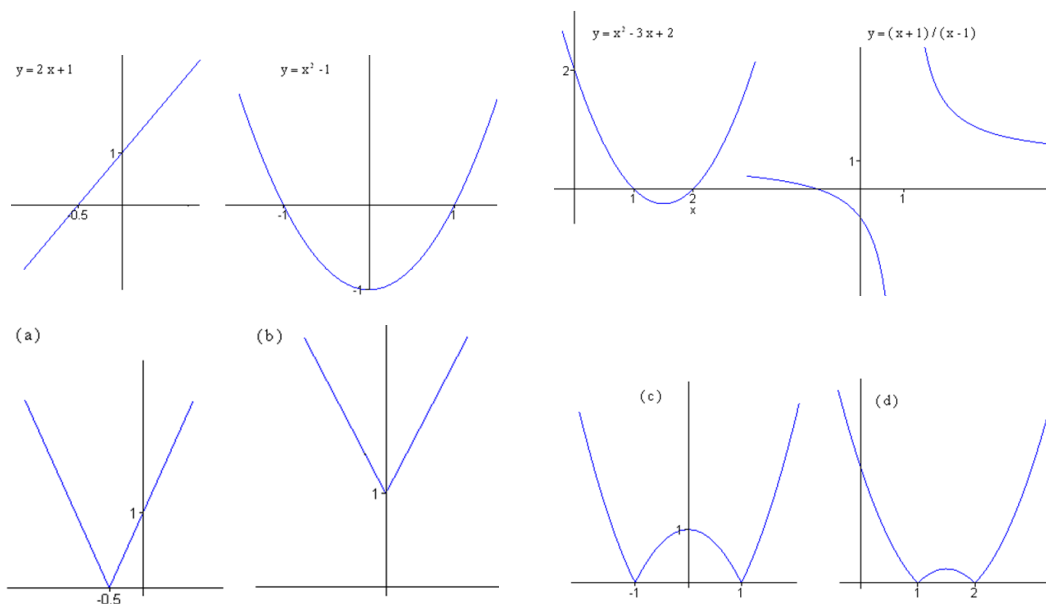
$$R(x) = x - 3$$

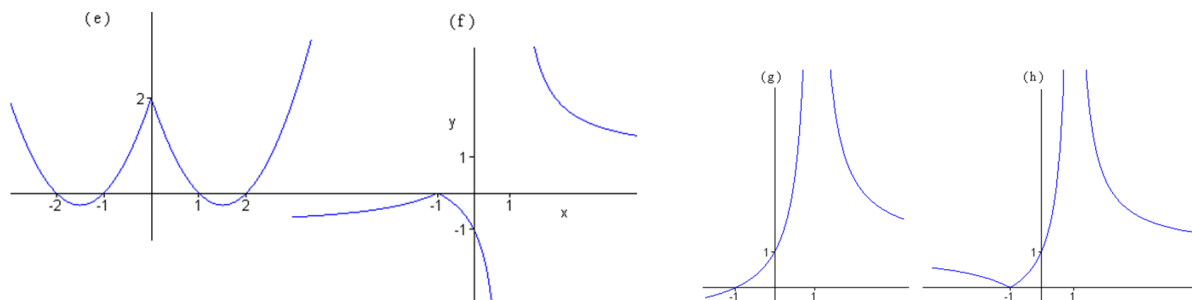
deve dunque essere $x \in (-\infty, -2] \cup [1, 3]$.

(i) $x^7 - x = x(x^6 - 1) = x(x^3 - 1)(x^3 + 1) = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. I due polinomi di secondo grado sono positivi ($\Delta < 0$); basta dunque considerare il segno dei polinomi di primo grado. Procedendo come già illustrato, si trova $x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$.

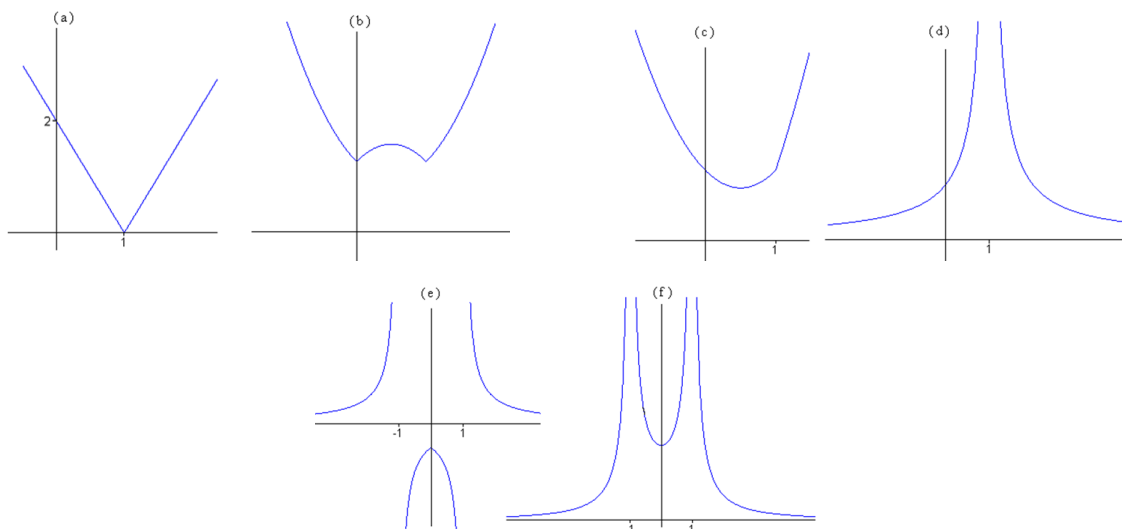
(l) $x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \geq 0$ per $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(5.15)





(5.16)



(5.17)

(a) $x + 1 = \pm 2 \iff x = -3$ oppure $x = 1$

(b) $x = 2$

(c) impossibile

(d) $\begin{cases} x \geq 1 \\ 2 = 1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ 2x = 1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x \geq 1 \\ -2 = 1 \end{cases} \iff x = \frac{1}{2}$

(e) $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x^2 = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x < -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}$

Le soluzioni sono $0, 2, -1 - \sqrt{3}$.

(f) $|x| = 2 \iff x = \pm 2$ (la soluzione $|x| = -1$ è evidentemente non accettabile)

(g) Posto $t = x^2$, si ottiene $|t - 1| - |t - 5| = 3$, cioè

$$\begin{cases} t \geq 1 \\ -4 = 3 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1 < t < 5 \\ 2t - 6 = 3 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} t \geq 5 \\ 4 = 3 \end{cases} \iff t = \frac{9}{2} \text{ e dunque } x_{1,2} = \pm 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(h) $\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - 37x^2 + 9 = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x < 0 \\ x^4 + 37x^2 + 9 = 0 \end{cases}$

Risolvendo le due equazioni in x^2 , si trova $x^2 = \frac{1}{4}$ oppure $x^2 = 9$ nel primo sistema, mentre nel secondo caso si trovano per x^2 valori negativi e dunque non accettabili. In conclusione $x = \frac{1}{2}$ oppure $x = 3$.

$$(i) \quad x^2 - 1 = x + 5 \text{ oppure } x^2 - 1 = -x - 5 \iff x^2 - x - 6 = 0 \text{ oppure } x^2 + x + 4 = 0.$$

Le soluzioni sono $x = -2$ oppure $x = 3$.

$$(l) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x < 1 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x < 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x < -1 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{array} \right.$$

Le soluzioni sono $x_{1,2} = \pm \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

$$(m) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 = x + 2 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 = -x - 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x + 2 \geq 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x + 2 \geq 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{array} \right.$$

Le soluzioni sono $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$$(n) \quad 2 - x = x - 1 \text{ oppure } 2 - x = 1 - x \iff x = \frac{3}{2}.$$

(5.18)

$$(a) \quad \text{Posto } t = |x|, \text{ la disequazione diventa } t^2 - t - 2 < 0, \text{ che è risolta per } t \in (-1, 2). \text{ Deve dunque essere } -1 < |x| < 2, \text{ cioè } -2 < x < 2.$$

$$(b) \quad \text{Deve essere } x^2 - x \geq 1 \text{ oppure } x^2 - x \leq -1, \text{ cioè } x^2 - x - 1 \geq 0 \text{ oppure } x^2 - x + 1 \leq 0. \text{ In conclusione}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right).$$

$$(c) \quad x + 1 \geq x^2 \text{ oppure } x + 1 \leq -x^2 \iff x^2 - x - 1 \leq 0 \text{ oppure } x^2 + x + 1 \leq 0.$$

In conclusione $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]$.

$$(d) \quad x^2 - 4 < 0 \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - 1 > x^2 - 4 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - 1 < 4 - x^2 \end{array} \right. \iff$$

$$x^2 - 4 < 0 \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - x - 3 < 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 + x - 5 < 0 \end{array} \right. \iff$$

$$x \in (-2, 2) \text{ oppure } x \in \left[2, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right) \text{ oppure } x \in \left(\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, -2 \right] \iff$$

$$x \in \left(\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right).$$

$$(e) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 \geq 0 \\ 4 - x^2 \leq x + 1 \leq x^2 - 4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 + x - 3 \geq 0 \\ x^2 - x - 5 \geq 0 \end{array} \right. \iff$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{21}}{2}, +\infty \right).$$

$$(f) \quad \left\{ \begin{array}{l} x - 1 \geq 0 \\ 1 - x \leq 2x - 1 \leq x - 1 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x - 1 < 0 \\ x - 1 \leq 2x - 1 \leq 1 - x \end{array} \right. \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 \geq 0 \\ 1 - x \leq 2x - 1 \\ 2x - 1 \leq x - 1 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x - 1 < 0 \\ x - 1 \leq 2x - 1 \\ 2x - 1 \leq 1 - x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \geq \frac{2}{3} \\ x \leq 0 \end{array} \right. \text{ oppure } \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ x \geq 0 \\ x \leq \frac{2}{3} \end{array} \right. \iff$$

$$0 \leq x \leq \frac{2}{3}.$$

$$(g) \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-1 \leq x-2 \\ x^2-1 \geq 2-x \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x-2 < 0 \\ x^2-1 \geq x-2 \\ x^2-1 \leq 2-x \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-x+1 \leq 0 \\ x^2+x-3 \geq 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x-2 < 0 \\ x^2-x+1 \geq 0 \\ x^2+x-3 \leq 0 \end{cases} \iff x \in \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right]$$

$$(h) \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-x < x+1 \\ 2-x > -x-1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x+1 < 0 \\ 2-x < -x-1 \\ 2-x > x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x > 1 \\ 2 > -1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x+1 < 0 \\ 2 < -1 \\ 2x < 1 \end{cases}$$

$x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$.

$$(i) \begin{cases} x-k \geq 0 \\ x \leq x-k \\ x \geq -x+k \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x-k < 0 \\ x \leq k-x \\ x \geq -k+x \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq k \\ x \leq 0 \\ x \geq \frac{k}{2} \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < k \\ x \leq \frac{k}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Se $k < 0$: $x \in [\frac{k}{2}, +\infty)$; $k > 0$: $x \in (-\infty, \frac{k}{2}]$; se $k = 0$: $x \in \mathbb{R}$.

(l) $x^2 - k \geq x^2$ oppure $x^2 - k \leq -x^2$. Se $k \leq 0$: $x \in \mathbb{R}$; se $k > 0$: $x \in \left(-\sqrt{\frac{k}{2}}, \sqrt{\frac{k}{2}} \right)$.

$$(m) \begin{cases} x \geq 4 \\ \frac{x-1}{x+4} \geq \frac{x-4}{x-2} \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} 1 \leq x < 4 \\ \frac{x-1}{x+4} \geq \frac{4-x}{x-2} \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < 1 \\ \frac{1-x}{x+4} \geq \frac{4-x}{x-2} \end{cases}$$

Togliendo i denominatori, si ottengono cinque sistemi:

$$\begin{array}{ll} (i) & x \geq 4 \quad (x-1)(x-2) \geq (x-4)(x+4) \\ (ii) & 2 < x < 4 \quad (x-1)(x-2) \geq (4-x)(x+4) \\ (iii) & 1 \leq x < 2 \quad (x-1)(x-2) \leq (x-4)(x+4) \\ (iv) & -4 < x < 1 \quad (1-x)(x-2) \leq (4-x)(x+4) \\ (v) & x < -4 \quad (1-x)(x-2) \geq (4-x)(x+4) \end{array}$$

Le soluzioni sono, rispettivamente:

$$\begin{array}{ll} (i) & x \in [4, 6] \\ (ii) & x \in [\frac{7}{2}, 4) \\ (iii) & x \in [1, 2) \\ (iv) & x \in (-4, 1) \\ (v) & \text{nessuna soluzione.} \end{array}$$

Unendo gli insiemi di soluzione, si trova $x \in (-4, 2) \cup [\frac{7}{2}, 6]$.

$$(n) |(x-3)(x+2)| \geq 5|x+2| \iff x = -2 \text{ oppure } |x-3| \geq 5 \iff x = -2 \text{ oppure } x-3 \geq 5 \text{ oppure } x-3 \leq -5 \iff x \in (-\infty, -2] \cup [8, +\infty).$$

(5.19)

$$(a) \frac{-16x-8}{6x+1} \geq 0 \iff x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$$

$$(b) \frac{-x-2}{x-1} > 0 \iff x \in (-2, 1)$$

$$(c) x \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$$

$$(d) \begin{cases} x \neq 5 \\ |x-5| \geq 3-2x \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 5 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x-5 > 3-2x \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x-5 < 2x-3 \end{cases} \iff$$

$$x \in (-2, +\infty) \setminus \{5\}$$

$$(e) -\frac{1}{x} < 0 \iff x > 0$$

$$(f) \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{-x-2}{x-5} > 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < 0 \\ \frac{3x-2}{x-5} > 0 \end{cases} \iff x \in [0, 5) \cup (-\infty, 0) = (-\infty, 5)$$

$$(g) x^2 - 2x - 2 < 0 \iff x \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$$

$$(h) \frac{5x-1}{x^2-1} \geq 0 \iff x \in (-1, \frac{1}{5}] \cup (1, +\infty).$$

$$(i) \begin{cases} x > 0 \\ 0 \geq x \\ x \neq 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < 0 \\ \frac{-2x(x+1)}{x-1} \geq x \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x = 0 \\ 0 \geq 0 \end{cases} \iff x = 0 \text{ oppure}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ -2x(x+1) \leq x(x-1) \end{cases} \iff x = 0 \text{ oppure } \begin{cases} x < 0 \\ 3x^2 + x \geq 0 \end{cases} \iff x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup \{0\}$$

$$(l) \frac{5-8x}{2x-1} < \frac{1}{2x-2} \iff -\frac{(4x-3)^2}{(2x-1)(2x-2)} < 0 \iff x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$$

$$(m) \frac{x}{(x-4)(x+4)} > \frac{x+1}{(x-4)(x+6)} \iff \frac{x-4}{(x-4)(x+4)(x+6)} > 0 \iff$$

$$x \in (-\infty, -6) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$$

$$(n) \frac{(x^2-9)(x^2+4)}{x-5} > 0 \iff x \in (-3, 3) \cup (5, +\infty)$$

$$(o) (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$(p) -\frac{1}{x^2-1} > 0 \iff x \in (-1, 1)$$

$$(q) \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ |x^2-4| \geq 3x-2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ |x^2-4| \leq 3x-2 \end{cases}$$

Il secondo sistema è impossibile (essendo $3x-2 < 0$); il primo equivale a:

$$x \in (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \text{ oppure } \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x^2-4 \geq 3x-2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x^2-4 \leq 2-3x \end{cases}$$

$$\text{Terminando i calcoli, si trova } x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{33}-3}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$$

$$(r) \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3+x^2+1 \geq 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < 0 \\ x^3-x^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

Per $x \geq 0$ è $x^3+x^2+1 > 0$ (somma di quantità positive), per $x < 0$ è $x^3-x^2-1 < 0$ (somma di quantità negative). Dunque la disequazione è sempre verificata.

$$(s) \text{ In entrambi i rapporti numeratore e denominatore sono strettamente positivi e quindi la disequazione è sempre verificata.}$$

(t) La disequazione può essere riscritta nella forma $\frac{x(x-k)}{x+1} \leq 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{Se } k \geq 0 & x \in (-\infty, -1) \cup [0, k] \\ \text{se } -1 < k < 0 & x \in (-\infty, -1) \cup [k, 0] \\ \text{se } k = -1 & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \\ \text{se } k < -1 & x \in (-\infty, k) \cup [-1, 0] \end{array}$$

(u) Distinguendo i casi $x > 0$ e $x < 0$, si ottiene come insieme di soluzione $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(v) $(-\infty, 0)$

(w) $(-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$.

(z) Per $x > 0$ la disequazione diventa $2 \leq k$, per $x < 0$ diventa $-2 \leq k$. Dunque:

$$\begin{array}{ll} \text{se } k \geq 2 & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{se } -2 \leq k < 2 & x \in (-\infty, 0) \\ \text{se } k < -2 & \text{la disequazione è impossibile.} \end{array}$$

(5.20) Se a e b sono di segno contrario, il risultato è immediato; in caso contrario, elevando al quadrato, si trova la disequazione equivalente

$$4a^2b^2 \leq \varepsilon^2 a^4 + \frac{b^4}{\varepsilon^2} + 2a^2b^2$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$\varepsilon^2 a^4 + \frac{b^4}{\varepsilon^2} - 2a^2b^2 \geq 0$$

cioè

$$\left(\varepsilon a^2 - \frac{b^2}{\varepsilon} \right)^2 \geq 0;$$

questa è banalmente vera.

(5.21) Riscritta la disequazione nella forma

$$a + b \geq 1 + ab$$

elevando al quadrato e semplificando, si trova successivamente

$$a^2 + b^2 \geq 1 + a^2b^2 \iff a^2 - 1 \geq (a^2 - 1)b^2.$$

Essendo $a^2 - 1 > 0$, la disequazione è equivalente a

$$b^2 \leq 1,$$

che è banalmente vera perché abbiamo supposto $0 \leq b \leq 1$.

(5.22) Possiamo riscrivere in modo equivalente, per ogni $x \geq 0$:

$$\frac{kx+1}{x+1} \geq \frac{1}{x^4+1}$$

o anche, per ogni $x \geq 0$,

$$\frac{x(1-x^3)}{1+x^4} \leq kx.$$

Per $x = 0$ la disequazione è vera per ogni valore di k ; occorre dunque che sia, per ogni $x > 0$

$$\frac{1-x^3}{1+x^4} \leq k.$$

Poiché il primo membro è minore di 1, k deve essere maggiore o uguale a 1. Facciamo vedere che 1 è il più piccolo valore che possiamo scegliere per k : occorre far vedere che, preso per k un valore minore di 1 (lo scriveremo nella forma $1 - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$) esiste per x un valore positivo tale che

$$\frac{1 - x^3}{1 + x^4} > 1 - \varepsilon$$

ovvero

$$\frac{x^3 + x^4}{1 + x^4} < \varepsilon.$$

Supponendo $x \in (0, 1)$, il primo membro è minore di $2x^3$ e questo a sua volta si mantiene minore di ε per $x < \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$. In conclusione, basterà prendere x arbitrariamente, purché positivo e minore sia di 1 che di $\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$, per provare l'asserto.

(5.23)

- (a) $(-\infty, \frac{10}{3}]$
- (b) nessuna soluzione
- (c) nessuna soluzione
- (d) $(-\frac{5}{2}, +\infty)$
- (e) nessuna soluzione
- (f) $\{2, 3\}$
- (g) La prima disequazione si può scrivere nella forma $x^2 + 10x - 24 \leq 0$ ed è risolta per $x \in [-12, 2]$; la seconda equivale a $x^2 \geq 16$ ed è risolta per $x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$. Il sistema è dunque risolto per $[-12, -4]$.
- (h) Il sistema è impossibile, perché le prime due disequazioni sono incompatibili (la quantità $x^2 - 5x$ dovrebbe essere contemporaneamente positiva e minore di 6).
- (i) $[0, +\infty)$
- (l) $x = -1$ è soluzione per ogni valore di k ; $x = k$ è soluzione solo se $k \in [-5, -\frac{1}{3}]$.

- (m) Il sistema ammette la soluzione $x = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4k}}{2k}$, solo se $k < 0$. Infatti, per $k = 0$ l'equazione si abbassa di grado ed ha per soluzione $x = -1$, che non soddisfa la disequazione del sistema.

Per $k \neq 0$, risolvendo l'equazione si trova formalmente $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k}}{2k}$. La condizione di esistenza delle radici richiede che sia $k \leq \frac{1}{4}$, mentre l'altra soluzione non la soddisfa mai.

- (n) Le soluzioni dell'equazione sono $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4k}}{2}$ per $k \leq \frac{1}{4}$.

$$-1 \leq \frac{-1 - \sqrt{1 - 4k}}{2} \leq 1 \iff \dots \iff -3 \leq \sqrt{1 - 4k} \leq 1 \iff 0 \leq k \leq \frac{1}{4}$$

$$-1 \leq \frac{-1 + \sqrt{1 - 4k}}{2} \leq 1 \iff \dots \iff -1 \leq \sqrt{1 - 4k} \leq 3 \iff -2 \leq k \leq \frac{1}{4}.$$

In conclusione, il sistema

è impossibile se $k > \frac{1}{4}$
 ha una soluzione se $k = \frac{1}{4}$
 ha due soluzioni se $0 \leq k < \frac{1}{4}$
 ha una soluzione se $-2 \leq k < 0$
 è impossibile se $k < -2$.

$$(o) \quad \begin{array}{ll} \text{Se } k \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} & x \geq k \\ \text{se } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2} & x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ k \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} & k \leq x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ oppure } x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

$$(p) \quad \begin{array}{ll} \text{Se } k \geq 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{k^2} \\ \text{se } 0 < k < 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ \text{se } -1 < k < 0 & \text{il sistema è impossibile} \\ \text{se } k \leq -1 & \frac{1}{k^2} \leq k \leq 1 \end{array}$$

(q) L'equazione ha come soluzioni $x = -1$ e $x = k$; la prima è soluzione per ogni valore di k , la seconda lo è solo se $k \leq -9$ oppure $k > -2$.

(r) Il sistema si può riscrivere nella forma

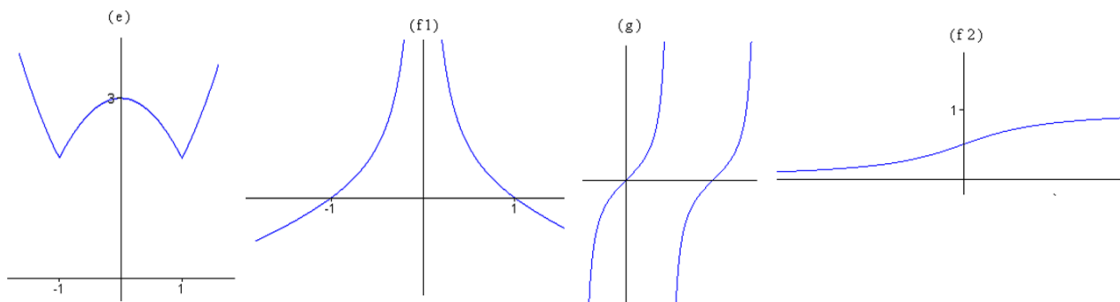
$$\left\{ \begin{array}{l} k > 0 \\ x \geq \frac{1}{k} \\ x \geq k \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0 \\ 0 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} k < 0 \\ x \leq \frac{1}{k} \\ x \geq k \end{array} \right.$$

Confrontando k e $\frac{1}{k}$, si ottiene:

$$\begin{array}{ll} \text{se } k \geq 1 & x \geq k \\ \text{se } 0 < k < 1 & x \geq \frac{1}{k} \\ \text{se } k = 0 & \text{il sistema è impossibile} \\ \text{se } -1 \leq k < 0 & \text{il sistema è impossibile} \\ \text{se } k < -1 & k \leq x \leq \frac{1}{k}. \end{array}$$

(5.24)

- (a) Non esiste: la condizione equivale ad affermare che la funzione non assume alcun valore.
- (b) Possiamo scegliere la funzione $f(x) = x^2$: l'equazione $f(x) = k$ ha soluzioni solo se $k \geq 0$.
- (c) Possiamo scegliere $f(x) = x$: l'equazione $f(x) = k$ ha una sola soluzione per ogni valore di k .
- (d) Se scegliamo $f(x) = x^2$, l'equazione $f(x) = k$ per $k > 0$ ha sempre due soluzioni.
- (e) Possiamo scegliere $f(x) = 2 + |x^2 - 1|$ (vedere fig. (e)).
- (f) Un esempio può essere $\frac{1-x^2}{|x|}$ definita per $x \neq 0$ (vedere fig. (f1)) o anche $\tan x$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ (vedere fig. (f2)).
- (g) Una possibile funzione è $f(x) = \frac{\arctan x}{\pi} + \frac{1}{2}$ (vedere fig.(g))



(h) Ad esempio la funzione *seno*.

- (i) Ad esempio la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(5.25)

- (a) $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}$ (b) $x = \frac{7}{5}, y = \frac{3}{5}$ (c) $x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{3}, z = -\frac{1}{2}$ (d) $x = 1, y = 0, z = -1$.

(5.26)

- (a) Il sistema è impossibile.
- (b) Il sistema è indeterminato, cioè ammette infinite soluzioni, che possono essere espresse in funzione di un parametro, ad esempio nella forma $x = 1 - 2t, y = t$ oppure nella forma equivalente $x = s, y = \frac{1-s}{2}$.
- (c) $x = -1, y = 1$
- (d) Il sistema è impossibile.
- (e) Il sistema è indeterminato: le infinite soluzioni possono essere espresse in funzione di un parametro, ad esempio nella forma $x = \frac{1}{3}, y = t, z = t + \frac{1}{3}$.
- (f) Il sistema è impossibile.