

CAPITOLO 4. SOLUZIONI: POLINOMI

(4.1)

$$(a) \quad P(x) + Q(x) = x^3 + x^2 + 5x \quad P(x) - Q(x) = -x^3 + x^2 + 3x$$

$$P(x)Q(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 + 4x^2 \quad P(Q(x)) = (x^3 + x)^2 + 4(x^3 + x) = x^6 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x$$

$$(b) \quad P(x) + Q(x) = x^4 + x \quad P(x) - Q(x) = x^4 - x + 2$$

$$P(x)Q(x) = x^5 - x^4 + x - 1 \quad P(Q(x)) = (x - 1)^4 + 1 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2$$

(4.2) Possibili esempi sono:

$$(a) \quad P(x) = x^3, \quad Q(x) = x^3 \quad (b) \quad P(x) = x^3 \quad P(x) = -x^3 + x^2$$

$$(c) \quad P(x) = x^3, \quad Q(x) = x^3 + x \quad (d) \quad P(x) = x^3, \quad Q(x) = -x^3 + 1$$

(4.3) Partiamo dall'eguaglianza $(A + B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$, ottenuta dal triangolo di Tartaglia.

(a) Per ottenere il termine $a^4b^2c^6$, a^2b , deve essere elevato al quadrato, c^2 alla terza. Nello sviluppo sopra riportato, il termine A^2B^3 è moltiplicato per 10; tenendo conto del fatto che il coefficiente -2 viene elevato al cubo, in definitiva il coefficiente richiesto è $10(-2)^3 = -80$.

(b) Il termine $a^8b^4c^2$ si ottiene elevando a^2b alla quarta e lasciando invariato c^2 . Il coefficiente richiesto è $5(-2) = -10$.

(c) Per ottenere a^2bc^4 si deve lasciare invariato a^2b ed elevare al quadrato c^2 ; poiché il termine AB^2 non compare nello sviluppo generale, di conseguenza a^2bc^4 non compare in quello preso in considerazione.

Partiamo dall'uguaglianza $(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$, ottenuta dal triangolo di Tartaglia.

(d) Per ottenere il termine $\frac{a^3b^2}{c^2}$, $\frac{a}{c}$ deve essere elevato alla terza, cb^2 deve essere lasciato inalterato. Nello sviluppo sopra riportato, il termine A^3B è moltiplicato per 4 e questo è anche il coefficiente richiesto.

(e) Il termine ac^3b^6 non si può ottenere nello sviluppo; infatti, data la presenza di a , $\frac{a}{c}$ dovrebbe essere lasciato invariato, mentre, data la presenza di b^6 , il termine cb^2 dovrebbe essere elevato alla terza; così facendo però si ottiene ac^2b^6 .

(f) per ottenere a^2b^4 si deve elevare al quadrato entrambi i termini; il coefficiente richiesto è dunque 6.

(4.4) Indichiamo con $S(x)$ il quoziente e con $R(x)$ il resto.

$$\begin{array}{lll} (a) \quad S(x) = x^2 + 2x - 15; & R(x) = 10x & (b) \quad S(x) = x + 4; \quad R(x) = -2x + 20 \\ (c) \quad S(x) = x^2 + 2; & R(x) = -x + 4 & (d) \quad S(x) = 2; \quad R(x) = -2x + 1 \\ (e) \quad S(x) = x^2 + ax + a(a - 1); & R(x) = a^3 & (f) \quad S(x) = x^2; \quad R(x) = a^4 \end{array}$$

(4.5) In tutti i casi, per il principio di identità dei polinomi occorre uguagliare i coefficienti di termini dello stesso ordine:

$$(a) \quad \begin{cases} a + c = 0 \\ -a + b - 2c = 1 \\ c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ a = -1 \\ b = 1 + a + 2c = 2 \end{cases}.$$

$$(b) \begin{cases} a + b + c = 1 \\ -a + b + d = 0 \\ a + b - c = 0 \\ -a + b - d = 0 \end{cases}.$$

Sottraiamo membro a membro la quarta equazione dalla seconda, ottenendo $d = 0$. Sostituiamo il valore $d = 0$ nella seconda equazione, deducendo $a = b$. Infine sostituiamo b con a nella prima e terza equazione; nel sistema

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2a - c = 0 \end{cases}$$

che si ottiene, sommiamo membro a membro deducendo $a = b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = 0$.

$$(c) \begin{cases} a + c + d = 0 \\ -a + b - d + e = 0 \\ a - b + c - e = 0 \\ -a + b = 1 \\ -b = 1 \end{cases}$$

Dalle ultime due equazioni si ottiene subito $b = -1$, $a = -2$. Sostituendo nelle rimanenti equazioni, si deduce il sistema:

$$\begin{cases} c + d = 2 \\ e - d = -1 \\ c - e = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2 - d \\ e = -1 + d \\ 2 - d + 1 - d = 1 \end{cases} \begin{cases} d = 1 \\ c = 1 \\ e = 0 \end{cases}$$

(4.6) Nei casi (c) e (d) si procede come spiegato nel capitolo 4, eseguendo la divisione dei due polinomi. Nei primi due casi, dove il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore, più semplicemente si può manipolare algebricamente la funzione in modo da far comparire al numeratore la stessa espressione che compare al denominatore:

$$(a) \frac{x^4 + 1}{x^4 + x} = \frac{(x^4 + x) + (1 - x)}{x^4 + x} = 1 + \frac{1 - x}{x^4 + x}.$$

$$(b) \frac{x^4 + 2x^3}{x^4 + 2x + 4} = \frac{(x^4 + 2x + 4) + (2x^3 - 2x - 4)}{x^4 + 2x + 4} = 1 + \frac{2x^3 - 2x - 4}{x^4 + 2x + 4}.$$

(c) Nella divisione di $P(x) = x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x - 15$ per $Q(x) = x^2 + 1$ si ottiene come quoziente $S(x) = x^2 + 2x - 15$ e come resto 0. La funzione razionale si riduce dunque al polinomio $S(x)$.

(d) Dividendo $P(x) = x^3 - x^2 - 5x$ per $Q(x) = x - 5$ si ottiene il quoziente $S(x) = x^2 + 4x + 15$ e il resto 75. La funzione razionale si può dunque scrivere nella forma $x^2 + 4x + 15 + \frac{75}{x - 5}$.

(4.7) Per il teorema di Ruffini occorre verificare se $P(2) = 0$ oppure $P(\frac{1}{2}) = 0$; per quanto riguarda la divisibilità per $x^2 - 4$, $P(x)$ deve essere divisibile sia per $x - 2$ che per $x + 2$, quindi deve essere $P(2) = P(-2) = 0$.

(a) $P(2) = P(\frac{1}{2}) = 0$, $P(-2) \neq 0$; $P(x)$ è divisibile per $x - 2$ e per $x - \frac{1}{2}$, ma non per $x^2 - 4$.

(b) $P(2) = P(-2) = 0$, $P(\frac{1}{2}) \neq 0$; $P(x)$ è divisibile per $x - 2$ e per $x^2 - 4$, ma non per $x - \frac{1}{2}$.

(c) $P(2) = P(\frac{1}{2}) = 0$, $P(-2) \neq 0$; $P(x)$ è divisibile per $x - 2$ e per $x - \frac{1}{2}$, ma non per $x^2 - 4$.

(4.8) Indichiamo con $S(x)$ il quoziente, con $R(x)$ il resto.

- | | | |
|-----|--|---------------|
| (a) | $S(x) = x^2 + 2x + 7$ | $R(x) = 15$ |
| (b) | $S(x) = 2x^4 + 1$ | $R(x) = 0$ |
| (c) | $S(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ | $R(x) = 0$ |
| (d) | $S(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ | $R(x) = 0$ |
| (e) | $S(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ | $R(x) = 0$ |
| (f) | $S(x) = x^3 + ax^2 + 2a^2x + 2a^3$ | $R(x) = 3a^4$ |
| (g) | $S(x) = x^2 - ax$ | $R(x) = 0$ |
| (h) | $S(x) = a^3x^2 + a^2bx + ab(b+1)$ | $R(x) = b^2$ |

(4.9) Quelle che seguono sono possibili soluzioni.

- (a) $P(x) = x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = x^5 - 5x^3 + 4x$.
- (b) Una delle radici deve essere doppia, come in $x^2(x-1)(x+1)(x-2) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2$.
- (c) $P(x) = x(x-1)(x+1)(x^2+1) = x^5 - x$
- (d) Una delle radici non deve essere semplice. Infatti, per ipotesi $P(x) = (x-c_1)(x-c_2)Q(x)$ con grado $Q(x) = 3$; poiché $Q(x)$ è di grado dispari, deve avere almeno una radice reale. Poiché non è possibile introdurre una nuova radice reale, questa deve necessariamente coincidere con c_1 o con c_2 . Si hanno tre possibilità, esemplificate da $x^2(x-1)(x^2+1)$, $x^3(x-1)^2$, $x^4(x-1)$.
- (e) $P(x) = x(x^4+1)$; per convincersi che $Q(x) = x^4+1$ non ha radici reali cioè non si annulla per nessun valore di x , basta osservare che è $Q(x) \geq 1$ per ogni x .

(4.10) Quelle che seguono sono possibili soluzioni.

- (a) Non esiste un polinomio con queste proprietà. Infatti, per ipotesi è $P(x) = (x-c_1)^2(x-c_2)Q(x)$, con $Q(x)$ privo di radici reali; questo è assurdo, perché essendo $\deg Q(x) = 1$, necessariamente $Q(x)$ deve avere una radice reale.
- (b) $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$.
- (c) Una di queste radici deve essere doppia. Infatti per ipotesi $P(x) = (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)Q(x)$, con $\deg Q(x) = 1$. $Q(x)$ ha una radice reale e, poiché non se ne possono introdurre di nuove, deve coincidere con una già considerata. Ad esempio, $x^4(x-1)(x+1) = x^4 - x^2$.
- (d) $P(x) = x^4 + 1$.

(4.11)

- (a) Per questo polinomio a coefficienti interi le eventuali radici razionali sono $\pm 1, \pm 2$. Un controllo diretto porta a concludere che $x = 1$ e $x = 2$ sono radici. Dividendo il polinomio dato per $x-1$ si trova (con la regola di Ruffini) il quoziente $Q_1(x) = x^3 - 2x + x - 2$. Dividendo a sua volta $Q_1(x)$ per $x-2$, si ottiene il quoziente $Q_2(x) = x^2 + 1$. In definitiva $P(x) = (x-1)(x-2)(x^2+1)$.
- (b) Eventuali radici razionali sono $\pm 1, \pm 2, \pm 4$; radici effettive sono $x = 1$ e $x = 2$. Procedendo come nel caso precedente, il quoziente nella divisione per $x-1$ è $Q_1(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$; quello nella divisione di $Q_1(x)$ per $x-2$ è $Q_2(x) = x^2 - 3x + 2$. Poiché il discriminante di $Q_2(x)$ è positivo, il polinomio è ulteriormente riducibile. Una sua radice è $x = 1$ e risulta $Q_2(x) = (x-1)(x-2)$. In definitiva si ottiene $P(x) = (x-1)^2(x-2)^2$.
- (c) Il polinomio ha come radici razionali $x = 1, x = \frac{1}{2}, x = \frac{2}{3}$; con tre successive divisioni per $x-1, x-\frac{1}{2}, x-\frac{2}{3}$, si ottiene $P(x) = 6(x-1)^2(x-\frac{1}{2})(x-\frac{2}{3})$.
- (d) $P(x) = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$.

- (e) Ponendo $t = x^2$, si ottiene il polinomio $t^2 - 3t - 4$ che ha per radici $t = -1$ e $t = 4$. Questo polinomio si scompone in $(t + 1)(t - 4)$; ritornando alla variabile x , si trova per $P(x)$ la scomposizione $(x^2 + 1)(x^4 - 4) = (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$.
- (f) $P(x) = x^2(x + 3)$.
- (g) Ponendo $t = x^4$, si ottiene il polinomio $t^2 - 17t + 16$, che si scompone in $(t - 1)(t - 16)$. Ritornando alla variabile x , $P(x) = (x^4 - 1)(x^4 - 16) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 1)(x^2 + 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)$.
- (h) $P(x) = (4x^2 - 9)(4x^2 + 9) = (2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9) = 16 \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right) \left(x^2 + \frac{9}{4}\right)$
- (i) $P(x) = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.
- (l) Ponendo $t = x^2$, si ottiene il polinomio $t^2 - (a^2 - 1)t - a^2$; questo ammette $t = -1$ come radice, il che porta alla scomposizione nella forma $(t + 1)(t - a^2)$. Ritornando alla variabile x , $P(x) = (x^2 + 1)(x^2 - a^2) = (x - a)(x + a)(x^2 + 1)$.
- (m) $(x - a)(x^3 - 3x^2 + x - 3) = (x - a)(x - 3)(x^2 + 1)$.
- (n) $P(x) = (x - a)(x^3 - ax^2 + a^2x - a^3) = (x - a)^2(x^2 + a^2)$.