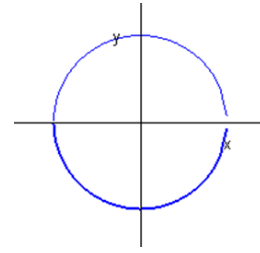


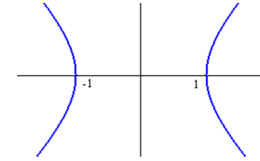
CAPITOLO 3. SOLUZIONI: FUNZIONI

(3.1)

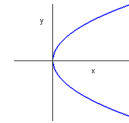
(a) $f_1 : [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \quad f_1(x) = \sqrt{1 - x^2},$
 $f_2 : [-1, 1] \rightarrow [-1, 0] \quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2},$



(b) $g_1 : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad g_1(x) = \sqrt{x^2 - 1},$
 $g_2 : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0], \quad g_2(x) = -\sqrt{x^2 - 1},$

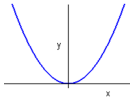


$h_1 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad h_1(x) = \sqrt{x},$
 $h_2 : [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0], \quad h_2(x) = -\sqrt{x},$
(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = y^2.$



(3.2)

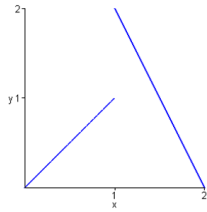
(a)



$$B_1 = (0, 4) \quad B_2 = (0, 4) \quad B_3 = (0, 4)$$

$$B_4 = [0, 4] \quad B_5 = [0, 4] \quad B_6 = [0, 4]$$

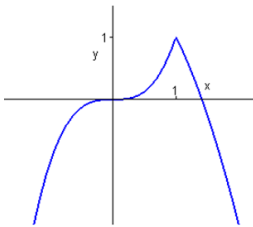
(b)



$$B_1 = [0, 1) \quad B_2 = [0, 1) \cup \{2\} \quad B_3 = \{2\}$$

$$B_4 = [0, 2] \quad B_5 = [\frac{1}{2}, 2] \setminus \{1\} \quad B_6 = [\frac{1}{2}, 2]$$

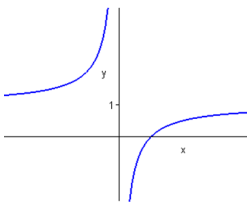
(c)



$$B_1 = [-2, -1] \quad B_2 = [-8, 1] \quad B_3 = [-8, 1)$$

$$B_4 = (-\infty, 1] \quad B_5 = (-\infty, 0) \quad B_6 = (-\infty, -7)$$

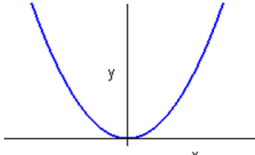
(d)



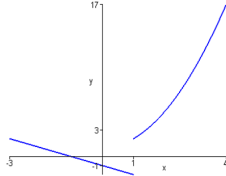
$$B_1 = [0, \frac{2}{3}] \quad B_2 = (-\infty, 0) \quad B_3 = (2, +\infty)$$

$$B_4 = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad B_5 = (-\infty, 1) \quad B_6 = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

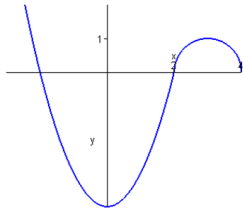
3.3



- (a) $A_1 = (-3, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3)$, $A_2 = [-5, 5]$, $A_3 = (-1, 1)$, $A_4 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.



- (b) $A_1 = [-2, -1]$, $A_2 = [-3, 0]$, $A_3 = [-3, -1] \cup (1, 4]$, $A_4 = [-3, \sqrt{2}] \setminus \{1\}$.



- (c) $A_1 = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup \{3\}$, $A_2 = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + 4}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$,
 $A_3 = [-\sqrt{5}, -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{3}, 4]$,
 $A_4 = [-\sqrt{6}, -2] \cup [2, 4]$.

(3.4)

- | | | | |
|---|---------------------------------------|--|---|
| (a) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ | (b) $[2, +\infty)$ | (c) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ | (d) $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt[3]{2}\}$ |
| (e) $\mathbb{R}$ | (f) $[-4, 0) \cup (0, 4]$ | (g) $(-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$ | (h) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ |
| (i) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | (l) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | (m) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ | (n) $[1, +\infty)$ |
| (o) $(0, +\infty)$ | (p) $(1, +\infty)$ | (q) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 1\}$ | |
| (r) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$ | (s) mai definita | (t) $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ | (u) $\mathbb{R}$ |
| (v) $\mathbb{R} \setminus \{-1, \log 2\}$ | (w) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ | (z) $[-1, 1] \setminus \{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ | |

(3.5)

- | | |
|---|---|
| (a) $(f \circ g)(x) = e^{(3x+15)}$, $x \in \mathbb{R}$ | $(g \circ f)(x) = e^{(3x)} + 15$, $x \in \mathbb{R}$ |
| (b) $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x-1} - 3$, $x \in [1, +\infty)$ | $(g \circ f)(x) = \sqrt{2x-4}$, $x \in [2, +\infty)$ |
| (c) $(f \circ g)(x) = x$, $x \in [0, +\infty)$ | $(g \circ f)(x) = x $, $x \in \mathbb{R}$ |
| (d) $(f \circ g)(x) = x$, $x \in [0, +\infty)$ | $(g \circ f)(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ |
| (e) $(f \circ g)(x)$ non ha senso, | $(g \circ f)(x) = -1$, $x \in (0, +\infty)$ |

$$(f) \quad (f \circ g)(x) = \log^2(x-1) + 3 \log(x-1) - 2, \quad x \in (1, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = \log(x^2 + 3x - 3), \quad x \in \left(-\infty, \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3 + \sqrt{21}}{2}, +\infty\right)$$

$$(g) \quad (f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}, \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

$$(g \circ f)(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$(h) \quad (f \circ g)(x) = (2-x)^3 + 1, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (g \circ f)(x) = 1 - x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(i) \quad (f \circ g)(x) = \sqrt[3]{2-x}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (g \circ f)(x) = \sqrt[3]{3-x} + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(l) \quad (f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad (g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(m) \quad (f \circ g)(x) = |\log x|, \quad x \in (0, +\infty) \qquad (g \circ f)(x) = \log |x|, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(n) \quad (f \circ g)(x) = \operatorname{sgn} \sqrt{x} = 1, \quad x \in (0, +\infty) \qquad (g \circ f)(x) = \sqrt{\operatorname{sgn} x} = 1, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$(o) \quad (f \circ g)(x) = \begin{cases} 1+x & x \leq -4 \\ 1-\frac{1}{x} & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \qquad (g \circ f)(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x-1 & x \geq 4 \end{cases}$$

$$(p) \quad (f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 1-\sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases} \qquad (g \circ f)(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ (1-x)^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

(3.6)

$$(a) \quad f_1(x) = x^2 + x, \quad f_2(x) = \log x, \quad f_3(x) = \frac{3}{x}$$

$$(b) \quad f_1 = x^2 - 1, \quad f_2(x) = |x|, \quad f_3(x) = \sqrt{x}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x}$$

$$(c) \quad f_1(x) = x^2 - 1, \quad f_2(x) = |x|, \quad f_3(x) = \sqrt{x}, \quad f_4(x) = e^x$$

$$(d) \quad f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \log x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = \sin x$$

(3.7)

$$(a) \quad f(x) = x^2 \qquad g(x) = e^x \quad (b) \quad f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = e^x$$

$$(c) \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad g(x) = e^x \quad (d) \quad f(x) = \sqrt{x^2-1} \quad g(x) = e^x$$

$$(3.8) \quad (a) \quad \cos(x-1)^2 \quad (b) \quad e^{|x-1|} \quad (c) \quad 2^{x-1} \quad (d) \quad x^2 + 1 \quad (e) \quad (x-1)^4 + 1$$

(3.9) Per ipotesi $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2), \quad g(x_1) < g(x_2)$.

(a) Sommando membro a membro le due disequazioni vere per ipotesi, si ottiene:

$$f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$$

che stabilisce la crescenza della funzione somma. In maniera analoga si prova la decrescenza.

(b) Dalle ipotesi segue:

$$f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_1) < f(x_2)g(x_2)$$

(la prima maggiorazione è vera perché $g(x_1) > 0$), la seconda perché $f(x_2) > 0$); questo prova che anche la funzione prodotto (nelle ipotesi fatte) è crescente. In maniera analoga la decrescenza.

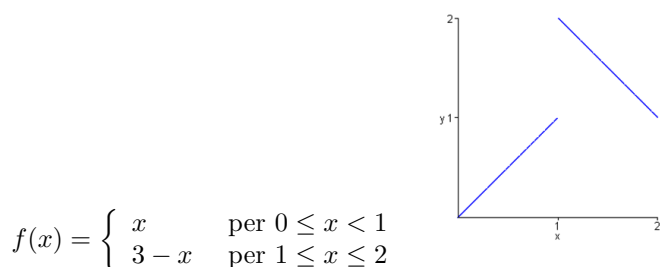
- (c) Se f e g sono crescenti (decrescenti) e negative, non è detto che la funzione prodotto sia ancora crescente (decrescente). Come controesempio possiamo prendere $f(x) = g(x) = x$, per $x < 0$. Le funzioni f e g sono crescenti e negative, il loro prodotto $f(x)g(x) = x^2$ nel dominio assegnato è decrescente.
- (d) Se f e g sono crescenti (decrescenti) e di segno opposto, non è detto che la funzione prodotto sia ancora crescente (decrescente). Come controesempio possiamo prendere $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, per $x < 0$. Le funzioni f e g sono crescenti e di segno opposto, il loro prodotto $f(x)g(x) = 1$ non è crescente.

(3.10) Un possibile esempio è dato da $f(x) = |x|$.

(3.11) Un possibile esempio è dato da $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: la funzione è crescente sia in $(-\infty, 0)$ che in $(0, +\infty)$, ma non nell'intero dominio. Infatti presi $x_1 < 0 < x_2$, si ha $f(x_1) > 0 > f(x_2)$.

(3.12)

- (a) Presi $x_1 \neq x_2$, indichiamo con x_1 il minore dei due. Se f è crescente, risulta $f(x_1) < f(x_2)$ e quindi in particolare $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- (b) Un possibile esempio di funzione iniettiva che nel suo dominio non è crescente né decrescente è fornito da $f(x) = \frac{1}{x}$, definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Un altro esempio è fornito dalla funzione:



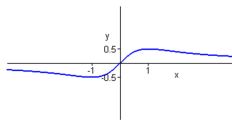
(3.13)

- (a) È crescente: infatti se $x_1 < x_2$, risulta $g(x_1) < g(x_2)$ perché g è crescente e da questo segue $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$ perché f è crescente.
- (b) È crescente: infatti se $x_1 < x_2$, risulta $g(x_1) > g(x_2)$ perché g è decrescente e da questo segue $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$ perché f è decrescente.
- (c) È decrescente: infatti se $x_1 < x_2$, risulta $g(x_1) > g(x_2)$ perché g è decrescente e da questo segue $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$ perché f è crescente.
- (d) È decrescente: infatti se $x_1 < x_2$, risulta $g(x_1) < g(x_2)$ perché g è crescente e da questo segue $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$ perché f è decrescente.

(3.14)

- (a) C.E.: $[1, +\infty)$; la funzione è crescente perché crescenti sono le funzioni elementari che la compongono: il polinomio $x - 1$, la radice, l'esponenziale.
- (b) C.E.: $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$; la funzione $f(x) = x^2 - 2x$ ha per grafico una parabola con la concavità rivolta verso l'alto; l'intervallo rimosso $(0, 2)$ corrisponde ai punti della parabola con concavità negativa. In $(-\infty, 0]$ la parabola decresce, in $[2, +\infty)$ cresce; poiché la funzione radice è crescente, conserva gli intervalli di crescita e decrescenza. In conclusione, la funzione data è decrescente in $(-\infty, 0]$, crescente in $[2, +\infty)$.

- (c) C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione $1+x^2$ è decrescente per $x \leq 0$, crescente per $x \geq 0$; per la funzione $\frac{1}{1+x^2}$ gli intervalli di monotonia si invertono, mentre si conservano per la funzione logaritmo naturale (che è crescente). In conclusione, la funzione data è crescente in $(-\infty, 0]$ decrescente in $[0, +\infty)$.
- (d) C.E.: $\mathbb{R}$. I valori della funzione $\frac{x}{1+x^2}$ variano tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$; in particolare assume il valore massimo $\frac{1}{2}$ per $x = 1$, il valore minimo $-\frac{1}{2}$ per $x = -1$.



La funzione risulta decrescente in $(-\infty, -1]$ e in $[1, +\infty)$, crescente in $[-1, 1]$. Poiché nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ la *funzione seno* è crescente, conserva gli intervalli di monotonia.

- (e) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. In ogni intervallo $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ la *funzione tangente* è crescente; poiché è negativa in $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$, positiva in $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ quando viene elevata al quadrato diventa decrescente nel primo intervallo, mentre rimane crescente nel secondo.
- (f) C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione $-x^2 + x + 2$ (il cui grafico è una parabola con la concavità rivolta verso il basso) è crescente in $(-\infty, \frac{1}{2}]$, decrescente in $[\frac{1}{2}, +\infty)$; la funzione x^3 (crescente) conserva gli intervalli di monotonia.
- (g) C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione $x^2 + 2x - 1$ (il cui grafico è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto) è decrescente in $(-\infty, -1]$, crescente in $[1, +\infty)$; la funzione $\sqrt[3]{x}$ (crescente) conserva gli intervalli di monotonia.
- (h) C.E.: $(-\infty, -\frac{1}{10}] \cup [\frac{1}{10}, +\infty)$ (dobbiamo imporre $x \neq 0$ per dare significato al logaritmo e $\log_{10} |x| \geq -1$ per dare significato alla radice; per lo studio di questa disequazione rimando al capitolo sulle funzioni logaritmiche). La funzione (pari) $\log_{10} |x|$ è decrescente in $(-\infty, -\frac{1}{10}]$, crescente in $[\frac{1}{10}, +\infty)$; tale risulta anche la funzione data.
- (i) C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione al denominatore ha per grafico una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice in $(1, \frac{2}{\pi})$; l'argomento del coseno è dunque compreso in $(0, \frac{\pi}{2}]$ ed è crescente per $x \leq 1$, decrescente per $x \geq 1$. Poiché nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2}]$ la *funzione coseno* è decrescente, gli intervalli di monotonia si invertono.
- (l) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Il grafico della funzione è un'iperbole equilatera traslata, di centro $(2, 1)$; la funzione è decrescente per $x < 2$ e per $x > 2$, ma non nel suo dominio.
- (m) C.E.: $[-1, 1]$. La funzione $f(x)$ al denominatore ha per grafico la semicirconferenza superiore di centro $(0, 1)$ e raggio 1, con diametro parallelo all'asse delle x ; è crescente in $[-1, 0]$, decrescente in $[0, 1]$. per la funzione data $\frac{1}{f(x)}$ gli intervalli di monotonia si invertono.
- (n) C.E.: $[-1, 1]$. L'intervallo si trova imponendo che l'argomento della radice sia positivo; poiché la radice si mantiene minore o uguale a 1, l'argomento del logaritmo è maggiore di 0). L'argomento del logaritmo ha per grafico la semicirconferenza inferiore di centro $(0, \frac{3}{2})$ e raggio 1, con diametro parallelo all'asse delle x : è decrescente in $[-1, 1]$, crescente in $[0, 1]$. Poiché il logaritmo naturale è crescente, conserva gli intervalli di monotonia.

(3.15)

- (a) Per ipotesi $f(-x) = f(x)$; qualunque sia la funzione $g(x)$ si ha $g(f(-x)) = g(f(x))$.
- (b) Poiché f è dispari $f(-x) = -f(x)$ e dunque $g(f(-x)) = g(-f(x))$; essendo g pari quest'ultimo termine si può riscrivere come $g(f(x))$.
- (c) Poiché f è dispari, $f(-x) = -f(x)$ e dunque $g(f(-x)) = g(-f(x))$; essendo g dispari quest'ultimo termine si può riscrivere come $-g(f(x))$.

- (d) Per ipotesi esiste $T > 0$ tale che $f(x + T) = f(x)$ e dunque $g(f(x + T)) = g(f(x))$, qualunque sia la funzione $g(x)$.

(3.16)

- (a) Scegliamo ad esempio $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2$; la funzione $g(x)$ è pari, mentre la funzione composta $(g \circ f)(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$ non lo è.
- (b) Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin x$, $g(x)$ è periodica, mentre $(g \circ f)(x) = \sin x^2$ non lo è.
- (c) Se $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$, $f(x)$ ha periodo 2π , mentre $(g \circ f)(x) = \sin^2 x$ ha periodo π .

(3.17) Il procedimento da seguire è quello spiegato nel capitolo 3: si scrive l'equazione $f(x) = \alpha$ nell'incognita x e si cerca di risolverla; se ammette una ed una sola soluzione, il valore trovato rappresenta $f^{-1}(\alpha)$. Per la risoluzione delle varie equazioni rimandiamo ai capitoli specifici.

- (a) $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Non è invertibile. Dal punto di vista grafico questo risultato è ovvio, trattandosi di una parabola con asse verticale; dal punto di vista algebrico ritroviamo il risultato quando, studiando l'equazione $f(x) = \alpha$, otteniamo due soluzioni: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17+4\alpha}}{2}$.
- (c) $f^{-1}(x) = \frac{-3 + \sqrt{17+4\alpha}}{2}$, $x \in [-\frac{17}{4}, +\infty)$; infatti, tenendo conto della limitazione per x , è accettabile solo una delle due soluzioni trovate in (b).
- (d) $f^{-1}(x) = \frac{-3 - \sqrt{17+4\alpha}}{2}$, $x \in [-\frac{17}{4}, +\infty)$.
- (e) $f^{-1}(x) = 1 + e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- (f) $f^{-1}(x) = \frac{4x}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- (g) $f^{-1}(x) = \frac{x^2+6}{2}$, $x \in [0, +\infty)$. Per quanto riguarda i denominatore della funzione inversa, si osservi che l'equazione $\sqrt{2x-6} = \alpha$ ha soluzione solo se $\alpha \geq 0$.
- (h) $f^{-1}(x) = \frac{e^x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Per trovare facilmente questo risultato, basta osservare che la funzione data può essere riscritta come $\log(2x)$, utilizzando le proprietà dei logaritmi.

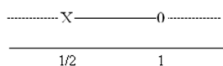
- (i) $f^{-1}(x) = (\log_{10} x)^3$, $x \in (0, +\infty)$.
- (l) $f^{-1} = \frac{1 + \log_2 x}{1 - \log_2 x}$, $x \in (0, +\infty) \setminus \{2\}$.
- (m) $f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (n) $f^{-1}(x) = -\sqrt{4-x^2}$, $x \in [0, 2]$.

Infatti l'equazione $\sqrt{4-x^2} = \alpha$ ha soluzione solo se $\alpha \geq 0$; elevando al quadrato ambo i membri dell'equazione (si può fare perché sono di segno concorde) e isolando il termine x^2 , si ottiene $x^2 = 4-\alpha^2$; a sua volta questa ha soluzione solo se $4-\alpha^2 \geq 0$, cioè (tenendo conto anche della precedente condizione) solo se $\alpha \in [0, 2]$. Delle due soluzioni $x_{1,2} = x \pm \sqrt{4-x^2}$ che si trovano, è accettabile solo quella negativa, dato che deve essere $x \in [-2, 0]$.

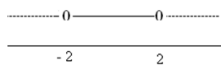
(3.18) Per la risoluzione delle varie equazioni o disequazioni rimandiamo ai capitoli specifici.

- (a) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ (b) C.E.: $\mathbb{R}$ (c) C.E.: $\mathbb{R}$ (d) C.E.: $\mathbb{R}$
 (e) C.E.: $\mathbb{R}$ (f) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (g) C.E.: $\mathbb{R}$ (h) C.E.: $(-\infty, \frac{1}{3})$
 (i) C.E.: $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ (l) C.E.: $(1, +\infty)$ (m) C.E.: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ (n) C.E.: $\mathbb{R}$
 (o) C.E.: $(-1, 3]$ (p) C.E.: $[2, +\infty)$ (q) C.E.: $(-\frac{1}{2}, +\infty) \setminus \{0\}$ (r) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

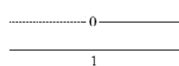
(a)



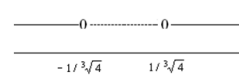
(b)



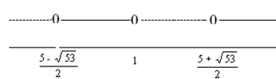
(c)



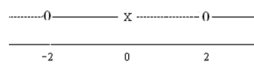
(d)



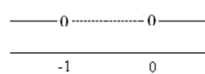
(e)



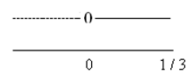
(f)



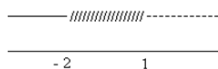
(g)



(h)



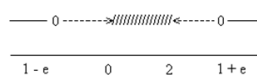
(i)



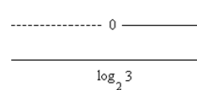
(l)



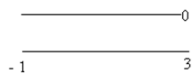
(m)



(n)



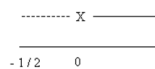
(o) C.E.: $(-1, 3]$



(p) C.E.: $[2, +\infty)$



(q) C.E.: $(-\frac{1}{2}, +\infty) \setminus \{0\}$



(r) C.E.: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

