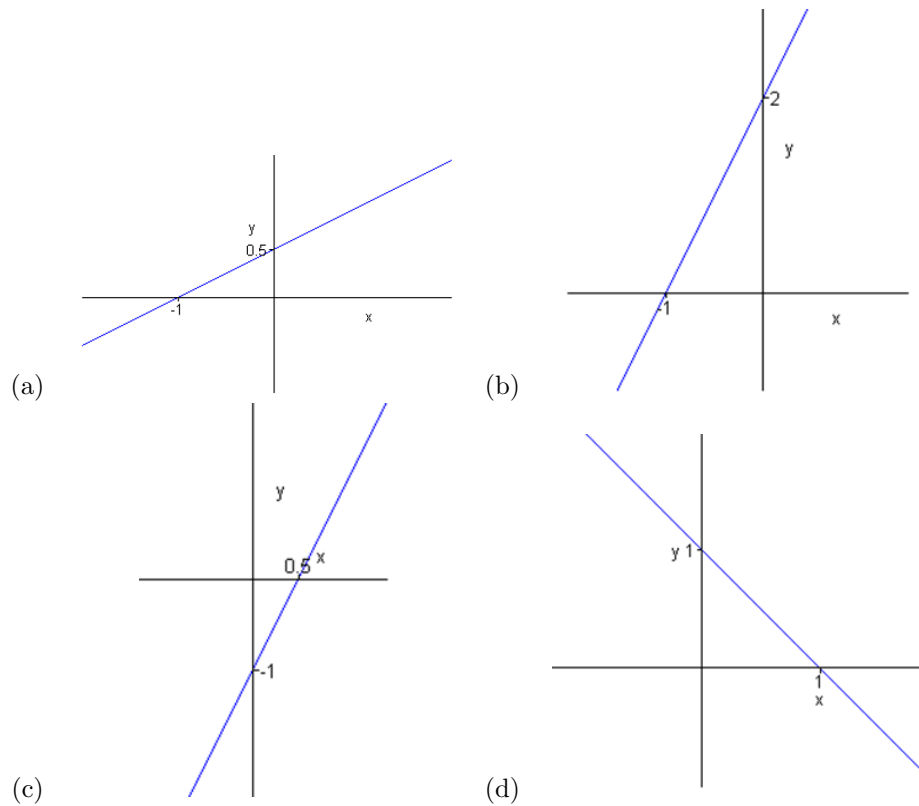


## CAPITOLO 2: SOLUZIONI: CENNI DI GEOMETRIA ANALITICA

(2.1)



(2.2) Basta applicare l'equazione della retta nella forma  $y - y_0 = m(x - x_0)$ .

- (a)  $y = 4 - x$       (b)  $y = -\frac{5}{2}x$       (c)  $y = \frac{2}{3}(2x - 5)$
- (d)  $y = \frac{x}{2} + \frac{7}{6}$       (e)  $y = -\frac{5}{4}$       (f)  $y = -\frac{3}{4}x - 3$

(2.3) Si può scrivere l'equazione della retta passante per due punti e controllare se le coordinate del terzo punto la verificano. Un altro metodo di risoluzione consiste nello scrivere il coefficiente angolare della retta passante per  $A$  e  $B$  e quello della retta passante per  $B$  e  $C$ : i tre punti sono allineati se questi coefficienti sono uguali; se ciò accade, l'equazione della retta è quella passante per uno qualunque dei punti e avente per coefficiente angolare quello trovato. Come terzo metodo si può imporre il passaggio della retta  $ax + by + c = 0$  per i tre punti e risolvere il sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $a$ ,  $b$  e  $c$ ; nel caso in cui il sistema ammetta una soluzione con  $a$ ,  $b$  e  $c$  non contemporaneamente nulli, i tre punti sono allineati e l'equazione della retta cercata è quella ottenuta sostituendo ad  $a$ ,  $b$  e  $c$  i valori trovati.

- (a) Allineati sulla retta di equazione  $x - 2y = 0$       (b) Non allineati
- (c) Allineati sulla retta di equazione  $x - y = 2$       (d) Allineati sulla retta di equazione  $x = 1$
- (e) Non allineati

(2.4) Occorre controllare se ci sono rette con lo stesso coefficiente angolare.

Le rette  $x - 5y + 1 = 0$  e  $\frac{x}{5} - y + 2 = 0$  sono parallele, avendo lo stesso coefficiente angolare  $\frac{1}{5}$ ; lo stesso accade per le rette  $2x - 4y + 3 = 0$  e  $x - 2y = 0$ , che hanno coefficiente angolare  $\frac{1}{2}$ . Le altre due rette non sono parallele, perché hanno coefficiente  $\frac{3}{8}$  una e  $\frac{8}{3}$  l'altra.

(2.5) Occorre controllare se ci sono rette il prodotto dei cui coefficienti angolari vale  $-1$ .

Le rette  $x - y + 1 = 0$  e  $x + y - 3 = 0$  sono perpendicolari, perché i loro coefficienti angolari sono rispettivamente  $1$  e  $-1$ .

Le rette  $6x - 2y - 7 = 0$  e  $3x - y + 5 = 0$  sono tra loro parallele, perché hanno coefficiente  $3$ , e sono perpendicolari alla retta  $x + 3y - 1 = 0$ , che ha coefficiente  $-\frac{1}{3}$ .

(2.6)

$$(a) \quad y = \frac{x-1}{2} \quad (b) \quad y = -2x + \frac{3}{4} \quad (c) \quad y = \frac{5-x}{3}$$

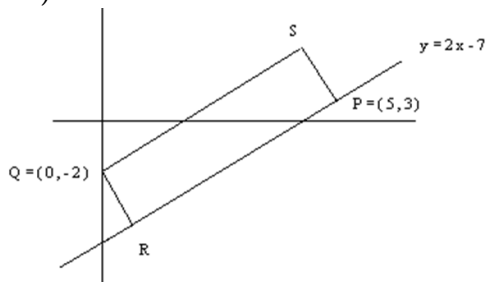
$$(d) \quad y = 2 - \frac{4}{3}x \quad (e) \quad y = -x - 2 \quad (f) \quad y = \frac{3}{5} - x$$

$$(2.7) \quad (a) \quad k = -6 \quad (b) \quad k = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

(2.8)

- Una volta scritta l'equazione della retta che passa per una coppia di punti, occorre considerare il semipiano che contiene il rimanente punto; si ricordi che il passaggio da una retta ad uno dei due semipiani da essa generati consiste nel sostituire l'equazione  $ax + by + c = 0$  con la disequazione  $ax + by + c \geq 0$  in un caso oppure la disequazione  $ax + by + c \leq 0$  nell'altro. Il triangolo dato è individuato dalle disequazioni  $y \geq -2$ ,  $y \leq \frac{3x-7}{5}$ ,  $y \leq 13 - 3x$ .
- L'altezza è individuata dalla retta di equazione  $x = 4$ ; se vogliamo limitarci al solo segmento, dobbiamo aggiungere la condizione che risulti  $-1 \leq y \leq 1$ . La lunghezza vale  $3$ .
- Per ciascun vertice occorre scrivere l'equazione della retta uscente da esso e perpendicolare alla retta passante per gli altri due vertici:  $y = \frac{19}{3} - \frac{5}{3}x$  è l'equazione della retta per  $A$ ,  $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$  quella per  $B$ ,  $x = 4$  quella per  $C$ . Risolvendo il sistema formato da queste equazioni, si trova la soluzione  $x = 4$ ,  $y = -\frac{1}{3}$ , che fornisce le coordinate del punto di intersezione.
- Occorre calcolare la distanza tra le coppie di vertici e sommare i valori ottenuti; il risultato che si trova è  $6 + \sqrt{10} + \sqrt{34}$ .
- La base  $AB$  misura  $6$ , l'altezza ad essa relativa  $3$ ; l'area vale  $9$ .
- Il punto medio del lato  $AB$  è  $(2, -2)$ , quello di  $AC$  è  $(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$ , la retta che unisce questi punti ha coefficiente angolare  $\frac{3}{5}$  uguale a quella della retta per  $BC$ . La lunghezza del segmento dei punti medi è  $\frac{\sqrt{34}}{2}$ , che è appunto metà di quella del segmento  $BC$ .

(2.9)



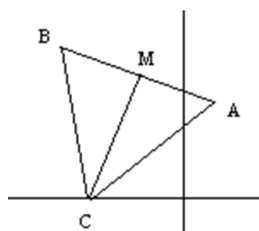
Retta per  $Q$  perpendicolare alla retta  $PR$ :  $y = -2 - \frac{1}{2}x$   
 Coordinate del punto  $R$ :  $R = (2, -3)$   
 Retta per  $Q$  parallela alla retta  $PR$ :  $y = 2x - 2$   
 Retta per  $P$  perpendicolare alla retta  $PR$ :  $y = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}x$   
 Coordinate del punto  $S$ :  $S = (3, 4)$

(2.10)

- (a) parallele (b) incidenti in  $(\frac{7}{2}, -3)$  (perpendicolari)  
(c) incidenti in  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$  (d) parallele  
(e) incidenti in  $(\frac{1}{5}, -1)$  (f) incidenti in  $(\frac{11}{25}, -\frac{2}{25})$  (perpendicolari)  
(g) incidenti in  $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  (h) parallele

(2.11) (a)  $2x - 5y + 3 = 0$  (b)  $x - y - 1 = 0$  (c)  $5x + 2y - 12 = 0$ .

(2.12)



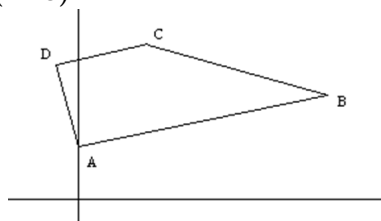
retta per  $AB$ :  $x + 2y - 7 = 0$  punto di mezzo  $AB$ :  $M = (-1, 4)$

asse  $AB$ :  $2x - y + 6 = 0$  intersezione asse  $x$ :  $C = (-3, 0)$

altezza  $CM = 2\sqrt{5}$  base  $AB = 2\sqrt{5}$

area 10

(2.13)



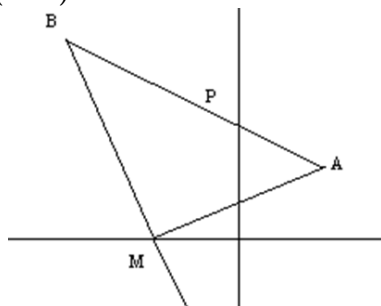
retta per  $AB$ :  $y = \frac{1}{4}x + 2$

retta per  $A$  perpendicolare ad  $AB$ :  $y = 2 - 4x$

retta per  $C$  parallela ad  $AB$ :  $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{2}$

$D = (-\frac{18}{17}, \frac{106}{17})$ .

(2.14)



retta per  $AM$ :  $y = \frac{1}{3}x + 1$

retta per  $BM$ :  $y = -3x - 9$

retta per  $AB$ :  $y = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x$

$B = (-5, 6)$

$C = (-1, -6)$

$AM = BM = 2\sqrt{10}$

area = 40

perimetro =  $4\sqrt{10} + 8\sqrt{5}$

(2.15)

Il generico punto  $P$  sulla retta data ha coordinate  $(a, 2 - \frac{a}{3})$ .

La retta per  $P$  di coefficiente 2 ha equazione  $y = 2x + 2 - \frac{7}{3}a$  e interseca l'asse  $y$  in  $A = (0, 2 - \frac{7}{3}a)$ .

La retta  $y = 2 - \frac{1}{3}x$  interseca l'asse in  $y$  in  $B = (0, 2)$ .

La base  $AB$  misura  $\frac{7}{3}|a|$ , l'altezza uscente da  $P$  misura  $|a|$ ; l'area vale  $\frac{7}{6}a^2$  ed assume il valore  $\frac{21}{3}$  per  $a = \pm 3$ .

Esistono dunque due punti che risolvono il problema:  $P = (3, 1)$  e  $P = (-3, 3)$ .

(2.16) (a)  $2\sqrt{5}$  (b) 0 (c) 5 (d)  $2\sqrt{13}$

(2.17) (a)  $\frac{6}{5}\sqrt{5}$  (b)  $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ .

La distanza di un punto  $(x, y)$  della prima retta dalla seconda vale  $\frac{|ax + by + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Poiché il punto appartiene alla prima retta, risulta  $ax + by = -c$ ; dunque, sostituendo nel precedente risultato, si ottiene  $\frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

**(2.18)**

- (a) improprio: le rette sono parallele a quelle di equazione  $y = 2x$
- (b) proprio: le rette escono dal punto  $(0, 2)$  (rimane esclusa  $x = 0$ )
- (c) improprio: le rette sonoparallele a quella di equazione  $y = -3x$
- (d) improprio: le rette sono parallele a quella di equazione  $y = 0$
- (e) proprio: le rette escono dal punto  $(-1, 2)$  (rimane esclusa  $x = -1$ )
- (f) proprio: le rette escono dal punto  $(-\frac{1}{2}, 1)$  (rimane esclusa  $y = 1$ )

**(2.19)** (a)  $y - 2x + k = 0$  (b)  $y + 1 = k(x + 3)$ , cioè  $kx - y + (3k - 1) = 0$

**(2.20)**  $x - y - 2 + k(x - 3y - 1) = 0$ , cioè  $(1 + k)x - (1 + 3k)y - (2 + k) = 0$  (si perde la retta  $x - 3y - 1 = 0$ ). La retta passante per  $A$  si ottiene per  $k = -\frac{4}{5}$ .

**(2.21)** (a)  $2x - 3y = 0$  (b)  $C = (-1, 3)$  (c)  $3x - 2y = 0$  (d)  $C = (-2, 0)$

**(2.22)**

- (a) È generato dalle rette  $2x - y + 7 = 0$ ,  $x + 3y = 0$ ; ha centro in  $C = (-3, 1)$ .
- (b) La retta per  $P = (1, 4)$  si trova per  $k = -\frac{5}{13}$ . Sostituendo nell'equazione del fascio le coordinate dell'origine, si trova che l'equazione non è verificata. La retta  $x + 3y = 0$  (che rimane esclusa dal fascio) è quella richiesta.
- (c) Per  $k = -2$  si trova la retta  $y = 1$ , per  $k = \frac{11}{5}$  la retta  $3x + 4y + 5 = 0$ .

**(2.23)** L'equazione del fascio è  $3x - y + k(5x + 9y) = 0$  ovvero  $(3 + 5k)x + (9k - 1)y = 0$ ; l'equazione esclude la retta  $5x + 9y = 0$ .

- (a) Per  $k = -\frac{23}{17}$
- (b) La retta deve avere coefficiente angolare uguale a  $-4$ ; questo si ottiene per  $k = \frac{7}{41}$ .
- (c) Il centro del fascio è  $C = (0, 0)$ ; l'area del triangolo vale 6.

**(2.24)** Consideriamo dapprima il caso particolare.

Il coefficiente angolare della retta per  $AB$  è 2; dunque l'asse deve avere coefficiente  $-\frac{1}{2}$ .

Il punto medio del segmento  $AB$  è  $(\frac{3}{2}, 1)$ .

L'equazione dell'asse è dunque dato da  $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - \frac{3}{2})$ , cioè  $2x + 4y = 7$ .

Procedendo con il secondo metodo, si trova l'equazione  $(x - 1)^2 + y^2 = (x - 2)^2 + (y - 2)^2$ ; sviluppando i quadrati e semplificando, si ritrova l'equazione  $2x + 4y = 7$ .

Nel caso generale, il coefficiente della retta  $AB$  vale  $\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$  e dunque il coefficiente dell'asse deve valere  $-\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}$ . L'espressione perde significato se  $a_2 = b_2$ : in questo caso la retta  $AB$  è orizzontale e dunque l'asse è la retta verticale passante per il punto di mezzo, di equazione  $x = \frac{a_1 + b_1}{2}$ .

Escludendo questo caso, il punto medio ha coordinate  $(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2})$ . L'equazione dell'asse è data da  $2(b_1 - a_1)x + 2(b_2 - a_2)y = b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 - a_2^2$ . Si osservi come l'equazione contenga anche il caso  $a_2 = b_2$  che avevamo esaminato a parte.

Procedendo con il secondo metodo, si ottiene  $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2$ ; svolgendo i calcoli, si ritrova la precedente equazione.

**(2.25)** Per la prima coppia di rette, procedendo come indicato si ottiene:

$$\frac{|3x - 4y + 1|}{5} = \frac{|12x + 5y - 1|}{13}$$

da cui

$$\frac{3x - 4y + 1}{5} = \frac{12x + 5y - 1}{13} \iff 21x + 77y = 18$$

oppure

$$\frac{3x - 4y + 1}{5} = -\frac{12x + 5y - 1}{13} \iff 99x - 27y + 8 = 0$$

che sono le due bisettrici richieste.

Per la seconda coppia, si ottiene

$$|x - y + 4| = \frac{|x + 7y - 3|}{5},$$

da cui, procedendo come sopra, si deducono le equazioni

$$4x - 12y + 23 = 0, \quad 6x + 2y + 17 = 0.$$

**(2.26)**

(a) Per le bisettrici, si ha:

|                       |                            |
|-----------------------|----------------------------|
| retta $OB$ : $y = 2x$ | retta $OA$ : $y = 0$       |
| retta $OA$ : $y = 0$  | retta $AB$ : $2x + 3y = 8$ |
| retta $OB$ : $y = 2x$ | retta $AB$ : $2x + 3y = 8$ |

|                            |                                                                   |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| bisettrice angolo in $O$ : | $2x - (1 + \sqrt{5})y = 0$                                        |
| bisettrice angolo in $A$ : | $2x - (3 + \sqrt{13})y = 8$                                       |
| bisettrice angolo in $B$ : | $2(\sqrt{13} + \sqrt{5})x + (3\sqrt{5} - \sqrt{13})y = 8\sqrt{5}$ |

|                       |                                                                                                           |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| punto di intersezione | $P = \left( \frac{4(1 + \sqrt{5})}{4 + \sqrt{5} + \sqrt{13}}, \frac{8}{4 + \sqrt{5} + \sqrt{13}} \right)$ |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|

(b) Per le altezze:

|                       |                        |
|-----------------------|------------------------|
| altezza per $B$ :     | $x = 1$                |
| altezza per $A$ :     | $x + 2y = 4$           |
| altezza per $O$ :     | $3x - 2y = 0$          |
| punto di intersezione | $P = (1, \frac{3}{2})$ |

(c) Per gli assi:

|                       |                        |
|-----------------------|------------------------|
| asse $OA$ :           | $x = 2$                |
| asse $OB$ :           | $2x + 4y = 5$          |
| asse $AB$ :           | $6x - 4y = 11$         |
| punto di intersezione | $P = (2, \frac{1}{4})$ |

(d) Per le mediane:

punto medio di  $OA$ :  $(2, 0)$     mediana per  $B$ :  $2x + y - 4 = 0$

punto medio di  $OB$ :  $(\frac{1}{2}, 1)$     mediana per  $A$ :  $2x + 7y - 8 = 0$

punto medio di  $AB$ :  $(\frac{5}{2}, 1)$     mediana per  $O$ :  $2x - 5y = 0$

punto di intersezione  $P$ :  $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$

**(2.27)** Riscritto il sistema nella forma equivalente

$$\begin{cases} x + ky = k - 2 \\ 2x + (k - 2)y = -5 \end{cases}$$

l'esistenza di una soluzione è legata al determinante della matrice dei coefficienti  $\det A = (k-2) - 2k = -k-2$ . Se  $k \neq -2$ , il sistema ha un'unica soluzione e dunque le due rette sono incidenti.

Se  $k = -2$  le due rette sono parallele (le loro equazioni diventano  $x - 2y = -4$  e  $2x - 4y = -5$ ).

**(2.28)** La retta  $AB$  ha equazione  $2x - 3y + 1 = 0$ ; l'asse del segmento  $AB$  ha equazione  $3x + 2y - 18 = 0$ . Il vertice  $C$  che stiamo cercando ha coordinate della forma  $C = (x, \frac{18-3x}{2})$ ; la sua distanza dalla retta  $AB$  vale  $\frac{\sqrt{13}|x-4|}{2}$  e questa è dunque l'altezza del triangolo uscente da  $C$ . Poiché la base  $AB$  misura  $2\sqrt{13}$ , l'area del triangolo vale  $\frac{13|x-4|}{2}$ , che coincide con il valore richiesto se  $x = 0$  oppure  $x = 8$ . Esistono dunque due possibili scelte per il punto  $P$ :  $P = (0, 9)$  o  $P = (8, -3)$ .

**(2.29)**

(a)  $C = (0, 0)$ ,  $r = 2$

(b)  $C = (-3, 2)$ ,  $r = \sqrt{13}$

Negli altri casi l'equazione rappresenta l'insieme vuoto.

**(2.30)**

(a)  $k < \frac{13}{4}$ ;  $C = (1, -\frac{3}{2})$ ,  $r = \frac{\sqrt{13-4k}}{2}$

(b)  $k < 5$ ;  $C = (-2, -1)$ ,  $r = \sqrt{5-k}$

(c) per ogni valore di  $k$ ;  $C = (-\frac{k}{2}, -\frac{3k}{2})$ ,  $r = \sqrt{\frac{5k^2}{2} + 2}$

**(2.31)** La circonferenza data ha centro in  $C = (0, 2)$  e raggio  $r = 3$ .

(a) è interno: la sua distanza  $d$  dal centro vale 2 ed è minore del raggio; sostituendo le sue coordinate nell'equazione il primo membro diventa minore di 0.

(b) appartiene alla circonferenza: la sua distanza  $d$  dal centro vale 3 ed è uguale al raggio; le sue coordinate verificano l'equazione.

(c) è esterno: la sua distanza dal centro vale  $\sqrt{10}$  ed è maggiore del raggio; sostituendo le sue coordinate nell'equazione il primo membro diventa maggiore di 0.

(d) è esterno:  $d = \sqrt{13}$

(e) è interno:  $d = \sqrt{2}$

(f) appartiene alla circonferenza.

**(2.32)** La condizione perché l'equazione rappresenti una circonferenza ( $13k^2 + 10k + 13 > 0$ ) è sempre verificata.

La circonferenza ha centro  $C = (-k, \frac{3(1+k)}{2})$  e raggio  $r = \frac{\sqrt{13k^2 + 10k + 13}}{2}$ .

(a)  $k = -\frac{7}{9}$       (b)  $k = -1$  oppure  $k = \frac{3}{13}$       (c)  $k = -\frac{1}{2}$       (d)  $k = 0$       (e)  $k = 5 \pm \sqrt{8}$

(f) Perché le due circonferenze siano tangenti esternamente, la distanza dei centri deve essere uguale alla somma dei raggi:

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 + \frac{9}{4}(1+k)^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{13k^2 + 10k + 13} + \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \\ \iff 2k - \frac{3}{2} &= \sqrt{\frac{13k^2 + 10k + 13}{2}} \iff \begin{cases} k > \frac{3}{4} \\ 10k^2 + 44k + 17 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il sistema non ha soluzioni: l'equazione ha per radici i valori  $k = \frac{-22 \pm \sqrt{314}}{10}$  e nessuno dei due verifica la condizione  $k > \frac{3}{4}$ .

(g) Perché le due circonferenze siano tangenti internamente, la distanza dei centri deve essere uguale al valore assoluto della differenza dei raggi:

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 + \frac{9}{4}(1+k)^2} &= \left| \frac{1}{2}\sqrt{13k^2 + 10k + 13} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \iff \frac{3}{2} - 2k = \sqrt{\frac{13k^2 + 10k + 13}{2}} \iff \\ &\iff \begin{cases} k < \frac{3}{4} \\ 10k^2 + 44k + 17 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il sistema ammette due soluzioni:  $k = \frac{-22 \pm \sqrt{314}}{10}$ .

**(2.33)**

(a) Deve avere raggio  $2\sqrt{2}$ ; la sua equazione è  $(x-2)^2 + y^2 = 8$ , ovvero  $x^2 + y^2 - 4x = 4$ .

(b) Il centro è il punto di mezzo del segmento e il raggio metà della sua lunghezza:  $C = (-1, 3)$ ,  $r = \sqrt{2}$ ; l'equazione è  $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 2$ , ovvero  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$ .

(c) Il centro è il punto di intersezione tra l'asse del segmento  $AB$  e quello del segmento  $AC$ , il raggio è la distanza del centro da uno qualunque dei punti dati.

Asse  $AB$ :  $x + y = 2$ , asse  $AC$   $x - y = -8$ , centro:  $P = (-3, 5)$ , raggio  $r$ :  $\sqrt{20}$ . L'equazione della circonferenza è  $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 20$ , ovvero  $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 14 = 0$ .

(d) Il centro è l'intersezione tra la retta data e l'asse del segmento  $AB$ , il raggio la distanza del centro da uno qualunque dei punti dati.

Asse  $AB$ :  $x + y = 3$ , centro:  $C = (1, 2)$ , raggio:  $r = 2$ .

L'equazione è  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ , ovvero  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ .

**(2.34)** Per risolvere il problema, possiamo studiare il sistema formato dall'equazione della circonferenza e quella della retta: se non ha soluzioni la retta è tangente, se ha due soluzioni la retta è secante. Più semplicemente, possiamo calcolare la distanza  $d$  della retta dal centro della circonferenza e confrontarla con il raggio  $r$ : se  $d > r$  la retta è esterna, se  $d = r$  la retta è tangente, se  $d < r$  la retta è secante.

- (a) secante:  $d = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $r = \sqrt{8}$ ; punti di intersezione:  $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{7+\sqrt{7}}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{7-\sqrt{7}}{2}\right)$ .
- (b) tangente:  $d = r = 3\sqrt{2}$ ; punto di tangenza:  $(0, 0)$
- (c) esterna:  $d = \frac{9}{\sqrt{10}}$ ,  $r = 2$
- (d) tangente:  $d = r = \sqrt{2}$ ; punto di tangenza:  $(-2, 1)$ .

**(2.35)** Per risolvere il problema, possiamo studiare il sistema formato dalla circonferenza e dal fascio di rette uscenti dal punto: nell'equazione di secondo grado in  $x$  che si ottiene eliminando  $y$ , il discriminante deve essere nullo.

Alternativamente, possiamo imporre che il fascio di rette abbia dal centro della circonferenza distanza uguale al raggio.

Si ricordi che se il punto appartiene alla circonferenza esiste un'unica retta tangente, se il punto è esterno ne esistono due, se è interno non ne esiste nessuna.

- (a) La circonferenza  $\gamma$  ha centro  $C = (-1, 1)$  e raggio  $r = \sqrt{10}$ ; il punto  $P$  appartiene a  $\gamma$ . Equazione del fascio di rette:  $y - 2 = k(x - 2)$ , cioè  $kx - y + 2 - 2k = 0$ . Distanza da  $C$ :  $\frac{|1 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$ .

$$\frac{|1 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 10 \iff (3k - 1)^2 = 10(k^2 + 1) \iff k = -3$$

Equazione della retta tangente:  $y = 8 - 3x$ .

- (b) La circonferenza  $\gamma$  ha centro  $C = (4, 1)$  e raggio  $r = \sqrt{5}$ ; il punto  $P$  è esterno a  $\gamma$ . Equazione del fascio di rette:  $y = k(x - 1)$ , cioè  $kx - y - k = 0$ .

Distanza da  $C$ :  $\frac{|1 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$ .

$$\frac{1 - 3k}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5} \iff (3k - 1)^2 = 5(k^2 + 1) \iff k = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Equazioni delle rette tangenti:  $y = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}(x - 1)$ .

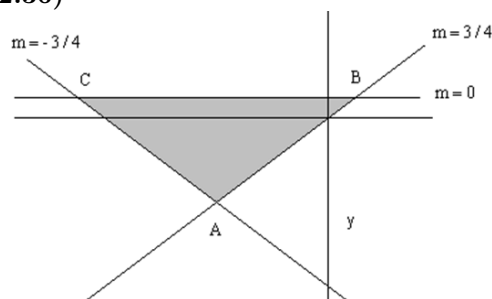
- (c) La circonferenza  $\gamma$  ha centro  $C = (-1, 2)$  e raggio  $r = \sqrt{2}$ ; il punto  $P$  appartiene a  $\gamma$ . Equazione del fascio di rette  $y - 1 = k(x + 2)$ , cioè  $kx - y + 1 + 2k = 0$ .

Distanza da  $C$ :  $\frac{|k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$ .

$$\frac{|k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{2} \iff (k - 1)^2 = 2(k^2 + 1) \iff k = -1$$

Equazione della retta tangente:  $y = -x - 1$ .

**(2.36)**



Il centro della circonferenza è il punto di incontro delle bisettrici del triangolo  $ABC$ , il raggio è la distanza del centro da uno qualunque dei lati.

Bisettrice per  $A$ :

$$\frac{|3x - 4y|}{5} = \frac{|3x + 4y + 32|}{5} \iff x = -\frac{16}{3} \text{ oppure } y = -4.$$

Delle soluzioni quella che interessa è  $x = -\frac{16}{3}$ .

Bisettrice per  $B$ :

$$\frac{|3x - 4y|}{5} = |y - 1| \iff 3x - 9y + 5 = 0 \text{ oppure } 3x + y - 5 = 0.$$

Delle due soluzioni quella che interessa è  $3x - 9y + 5 = 0$  (ha coefficiente angolare positivo).

Centro della circonferenza:

$$\begin{cases} x = -\frac{16}{3} \\ 3x - 9y + 5 = 0 \end{cases} \iff C = \left(-\frac{16}{3}, -\frac{11}{9}\right)$$

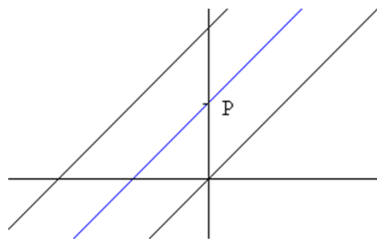
Raggio della circonferenza (distanza di  $C$  dalla retta  $y = 1$ ):

$$r = \left| -\frac{11}{9} - 1 \right| = \frac{20}{9}.$$

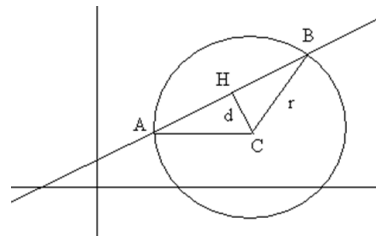
Equazione della circonferenza:  $9x^2 + 9y^2 + 96x + 22y + 225 = 0$ .

**(2.37)** Il centro della circonferenza sta sulla bisettrice della striscia individuata dalle due rette, cioè sulla retta  $y = x + 4$ , e dunque è un punto della forma  $(a, a + 4)$ ; il raggio è la distanza di un qualunque punto di questa retta (ad esempio  $P = (0, 4)$ ) da una delle due rette date e vale  $2\sqrt{2}$ . L'equazione della circonferenza è dunque:  $(x - a)^2 + (y - a - 4)^2 = 8$

Imponendo il passaggio per  $P$ , si ottengono per  $a$  i valori  $\pm 2$ ; esistono dunque due circonferenze che risolvono il problema:  $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 8$ ,  $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$ .



2.37



2.38

**(2.38)**

*I metodo:*

cerchiamo le intersezioni tra la circonferenza e la retta, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono  $A = (1, 1)$ ,  $B = \left(\frac{32}{5}, \frac{14}{5}\right)$ ; la lunghezza della corda è  $9\frac{\sqrt{10}}{5}$ .

*II metodo*

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo  $BHC$  in figura.  $C = (4, 1)$ ,  $r = 3$ ,  $d =$  distanza di  $C$  dalla retta  $= 3\frac{\sqrt{10}}{10}$ ,  $HB = 9\frac{\sqrt{10}}{10}$ ,  $l = 9\frac{\sqrt{10}}{5}$ .

**(2.39)**

- (a) vertici:  $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$   $(0, \pm 4)$  fuochi:  $(\pm 2, 0)$   
(b) vertici:  $(\pm 3, 0)$ ,  $(0, \pm 2)$  fuochi:  $(\pm \sqrt{5}, 0)$   
(c) vertici:  $(\pm 7, 0)$ ,  $(0, \pm 9)$  fuochi:  $(0, \pm 4\sqrt{2})$

**(2.40)**

- (a) Deve essere  $k^2 - 1 > 0$  cioè  $k < -1$  oppure  $k > 1$ . I vertici sono i punti  $(\pm 2, 0)$ ,  $(0, \pm \sqrt{k^2 - 1})$ .  
Se  $4 > k^2 - 1$ , cioè se  $-\sqrt{5} < k < -1$  oppure  $1 < k < \sqrt{5}$  i fuochi appartengono all'asse  $x$  e sono i punti  $(\pm \sqrt{5 - k^2}, 0)$ .  
Se  $4 < k^2 - 1$ , cioè se  $k < -\sqrt{5}$  oppure  $k > \sqrt{5}$ , i fuochi appartengono all'asse  $y$  e sono i punti  $(0, \pm \sqrt{k^2 - 5})$ .  
Se  $4 = k^2 - 1$ , cioè se  $k = \pm \sqrt{5}$  l'ellisse si riduce alla circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio 2.
- (b) Deve essere  $3k + 1 > 0$ , cioè  $k > -\frac{1}{3}$ . I vertici sono i punti  $(\pm \sqrt{3k + 1}, 0)$ ,  $(0, \pm \sqrt{k^2 + 3})$ .  
Se  $3k + 1 > k^2 + 3$ , cioè se  $1 < k < 2$ , i fuochi appartengono all'asse  $x$  e sono i punti  $(\pm \sqrt{-k^2 + 3k - 2}, 0)$ .  
Se  $3k + 1 < k^2 + 3$ , cioè se  $-\frac{1}{3} < k < 1$  oppure  $k > 2$ , i fuochi appartengono all'asse  $y$  e sono i punti  $(0, \pm \sqrt{k^2 - 3k + 2})$ .  
Se  $3k + 1 = k^2 + 3$ , cioè se  $k = 1$  oppure  $k = 2$ , l'ellisse si riduce alla circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio 2 oppure  $\sqrt{7}$ .

**(2.41)**

- (a)  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ .
- (b)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  oppure  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ .
- (c) I fuochi sono nei punti  $(0, \pm 1)$  e due vertici sono nei punti  $(0, \pm 2)$ . Per trovare gli altri due vertici  $(x, 0)$  utilizziamo la definizione  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 4$ ; l'equazione diventa  $2\sqrt{x^2 + 1} = 4$  e fornisce  $x = \pm \sqrt{3}$ .  
L'equazione dell'ellisse è  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ .
- (d) Imporre all'ellisse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  il passaggio per i punti dati porta al sistema:

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases}$$

che ha per soluzioni  $a^2 = 20$ ,  $b^2 = 5$ . L'equazione dell'ellisse è dunque  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$  cioè  $x^2 + 4y^2 = 20$ .

- (e) L'informazione sul vertice porta a scrivere l'equazione dell'ellisse nella forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Imponendo il passaggio per il punto dato, si deduce che deve essere  $a^2 = \frac{9}{5}$ ; l'equazione dell'ellisse è dunque

$$\frac{5x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{cioè} \quad 5x^2 + y^2 = 9.$$

**(2.42)** Nel sistema tra l'ellisse e il fascio di rette passanti per il punto dato, dopo aver eliminato la variabile  $y$ , si ottiene un'equazione di secondo grado in  $x$ , il cui discriminante deve essere nullo. Se il punto è esterno all'ellisse si trovano due tangenti, se le appartiene se ne trova solo una, infine se il punto è interno non esistono tangenti.

(a)  $y = \pm x + 4$       (b)  $y = 2x + 4$       (c)  $3x + 2y + 7 = 0, y = 1$

**(2.43)**

(a)  $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$

(b) Il centro dell'ellisse è il punto medio del segmento dei fuochi:  $C = (-6, 2)$ . L'equazione è dunque della forma

$$\frac{(x+6)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1.$$

Poiché i fuochi stanno su una retta parallela all'asse delle  $x$ , l'asse maggiore è quello orizzontale e dunque si ha:

$$\frac{(x+6)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1.$$

I due vertici lungo l'asse verticale hanno coordinate  $(-6, 2 \pm b)$ ; imponiamo che uno di questi verifichi la definizione di ellisse, cioè che la somma delle sue distanze dai fuochi sia uguale alla lunghezza 16 dell'asse orizzontale, ovvero (data la simmetria) che la sua distanza da un fuoco sia uguale al semiasse orizzontale:

$$\sqrt{16 + b^2} = 8 \implies b^2 = 48.$$

L'equazione richiesta è dunque:

$$\frac{(x+6)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{48} = 1.$$

**(2.44)**

(a)  $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = 1$ . Vertici:  $V = (\pm \frac{1}{2}, 0)$ , fuochi:  $F = (\pm \frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$ , asintoti  $y = \pm 2x$ .

(b)  $V = (0, \pm 2)$ ,  $F = (0, \pm \sqrt{13})$ ,  $y = \pm \frac{2}{3}x$ .

(c)  $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{4} = 1$ ,  $V = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ,  $F = (\pm \frac{3}{\sqrt{2}}, 0)$ ,  $y = \pm 2\sqrt{2}x$ .

(d)  $V = (0, \pm 3)$ ,  $F = (0, \pm \sqrt{13})$ ,  $y = \pm 3\frac{x}{2}$

(e)  $x^2 - y^2 = -1$ ,  $V = (0, \pm 1)$ ,  $F(0, \pm \sqrt{2})$ ,  $y = \pm x$ .

(f)  $V = (\pm 2, 0)$ ,  $F = (\pm 3, 0)$ ,  $y = \pm \sqrt{5}\frac{x}{2}$ .

(g)  $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{12} = -1$ ,  $V = (0, \pm \sqrt{12})$ ,  $F = (0, \pm \sqrt{39})$ ,  $y = \pm 2\frac{x}{3}$ .

(h)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ ,  $V = (\pm \sqrt{5}, 0)$ ,  $F = (\pm 3, 0)$ ,  $y = \pm 2\frac{x}{\sqrt{5}}$ .

(i)  $V = \pm(1, 1)$ ,  $F = \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $y = 0, x = 0$ .

(2.45)

- (a) Deve essere  $\left\{ \begin{array}{l} a^2 = 4 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 3 \end{array} \right.$ , cioè  $a^2 = 4$ ,  $b^2 = 5$ , l'equazione è dunque  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ .
- (b)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$ , ovvero  $9x^2 - 16y^2 = 36$
- (c)  $\frac{x^2}{3} - y^2 = -1$  ovvero  $3y^2 - x^2 = 3$ .

(2.46)

- (a) L'equazione è della forma  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  Deve essere  $\left\{ \begin{array}{l} a^2 = 4 \\ \frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \end{array} \right.$ , cioè  $a^2 = 4$ ,  $b^2 = \frac{16}{5}$ . Si ottiene dunque  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{16}{5}} = 1$  ovvero  $4x^2 - 5y^2 = 16$ .
- (b) L'equazione è della forma  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  Deve essere  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{a^2} - \frac{9}{b^2} = -1 \\ \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = -1 \end{array} \right.$  che è un sistema impossibile; dunque non esiste nessuna iperbole che risolve il problema.
- (c) L'equazione è della forma  $xy = k$ , con  $k > 0$ . Deve essere  $\sqrt{2k} = \sqrt{3}$ , cioè  $k = \frac{3}{2}$ . Si ottiene dunque  $xy = \frac{3}{2}$ .
- (d) L'equazione è della forma  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  Deve essere  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{a} = 2 \\ \frac{5}{4a^2} - \frac{9}{b^2} = -1 \end{array} \right.$ , cioè  $a^2 = 1$ ,  $b^2 = 4$ . Si ottiene dunque  $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$  ovvero  $4x^2 - y^2 = -4$ .

(2.47) Il procedimento da seguire è quello già visto per le altre curve: nel sistema tra l'iperbole e il fascio di rette uscenti dal punto si elimina  $y$  e nell'equazione di secondo grado in  $x$  che ne risulta imponiamo che il discriminante sia nullo.

- (a) Il punto appartiene all'iperbole.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -1 + m(x - \frac{1}{2}) \\ 8x^2 - y^2 = 1 \end{array} \right. \implies (8 - m^2)x^2 + m(m + 2)x - (\frac{m^2}{4} + m + 2) = 0$$

$\Delta = 0$  se  $m^2 + 8m + 16 = 0$ , cioè  $m = -4$ . La retta tangente ha dunque equazione  $y = 1 - 4x$ .

- (b) Il punto non appartiene all'iperbole.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 1 + mx \\ y^2 - 8x^2 = 2 \end{array} \right. \implies (m^2 - 8)x^2 + 2mx - 1 = 0$$

$\Delta = 0$  se  $m^2 - 4 = 0$ , cioè  $m = \pm 2$ . Le rette tangenti hanno equazioni  $y = 1 \pm 2x$ .

- (c) Il punto appartiene all'iperbole.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -1 + m(x + 3) \\ xy = 3 \end{array} \right. \implies mx^2 + (3m - 1)x - 3 = 0$$

$\Delta = 0$  se  $9m^2 + 6m + 1 = 0$ , cioè  $m = -\frac{1}{3}$ . La retta tangente ha dunque equazione  $x + 3y + 6$ .

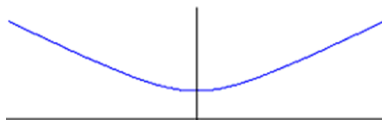
(2.48) La curva data è parte dell'iperbole equilatera  $y^2 - x^2 = 16$  situata nel semipiano delle ordinate negative. Il punto  $P$  ha coordinate  $(-3, -5)$ . Procedendo come di consueto, si ottiene:

$$\begin{cases} y = -5 + m(x + 3) \\ y^2 - x^2 = 16 \end{cases} \implies (m^2 - 1)x^2 + 2m(3m - 5)x + (9m^2 - 30m + 9) = 0$$

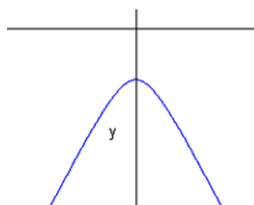
$\Delta = 0$  se  $25m^2 - 30m + 9 = 0$ , cioè  $m = \frac{3}{5}$ . La retta tangente ha dunque equazione  $3x - 5y - 16 = 0$ .

(2.49)

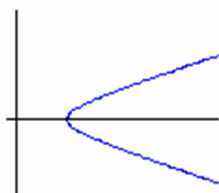
(a)



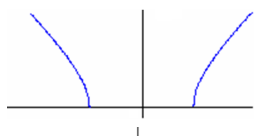
(b)



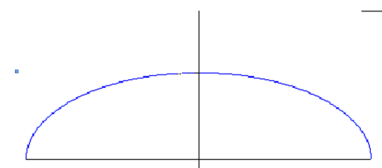
(c)



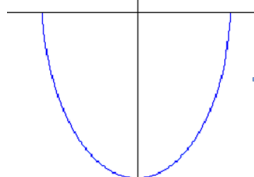
(d)



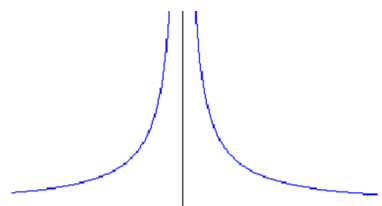
(e)



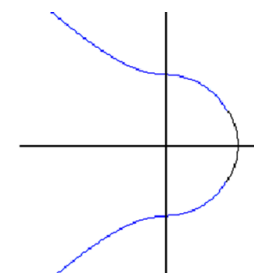
(f)



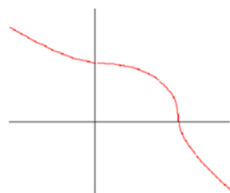
(g)



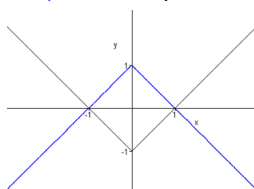
(h)



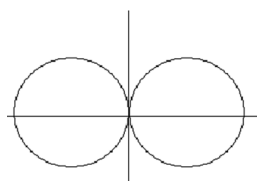
(i)



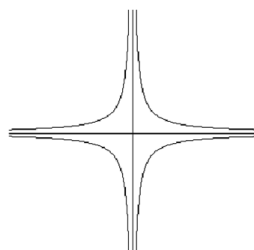
(l)



(m)



(n)



(2.50)

- (a) Imponendo alle coordinate del punto di verificare l'equazione  $xy = k$ , si ottiene che deve essere  $k = 2$ . La curva ha dunque equazione  $xy = 2$ .
- (b) La curva ha equazione del tipo  $xy = k$ , con  $k > 0$ . Imponendo che risulti  $\sqrt{k} = 2$ , si ottiene  $k = 2$  e quindi l'equazione richiesta è  $xy = 4$ .
- (c)

$$\begin{cases} xy = k \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \implies x^2 + x - 2k = 0; \quad \Delta = 1 + 8k = 0 \text{ per } k = -\frac{1}{8}$$

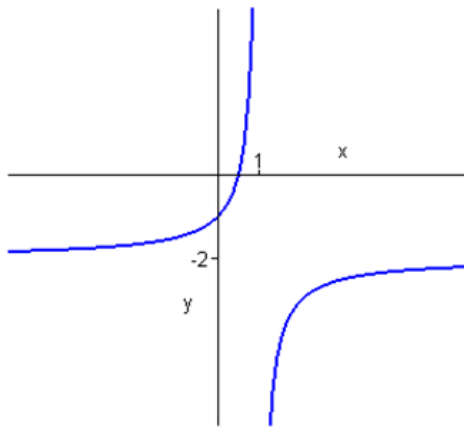
L'equazione della curva è  $xy = -\frac{1}{8}$ .

(d)

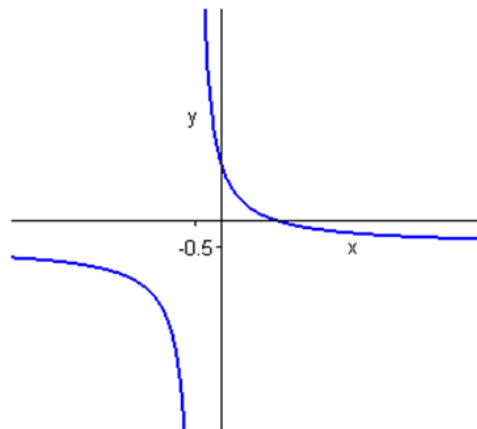
$$\begin{cases} xy = k \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases} \implies 2x^2 - 8x + k = 0; \quad x = -\frac{4 \pm \sqrt{16 - 2k}}{2}$$

La lunghezza della corda è  $\sqrt{5(16 - 2k)}$  e questo valore coincide con quello richiesto per  $k = 4$ . L'iperbole ha equazione  $xy = 4$ .

(2.51)



(a)



(b)

(a)  $y = -2 \frac{-x + \frac{1}{2}}{1 - x} = -2 \frac{1 - x - \frac{1}{2}}{1 - x} = -2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - x} \right) = -2 + \frac{1}{1 - x}.$

Posto  $Y = y + 2$ ,  $X = x - 1$ , l'equazione diventa  $XY = -1$ , che ha per centro  $C = (0, 0)$ , vertici  $V = \pm(1, -1)$ , fuochi  $F = \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ , asintoti  $X = Y = 0$ . Tenendo conto del legame tra le variabili  $X$ ,  $Y$  e  $x$ ,  $y$ , l'iperbole ottenuta ha centro in  $(1, -2)$ , vertici in  $V_1 = (0, -1)$ ,  $V_2 = (2, -3)$ , fuochi in  $F_1 = (1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 2)$ ,  $F_2 = (1 + \sqrt{2}, -\sqrt{2} - 2)$ , asintoti  $x = 1$ ,  $y = -2$ .

(b)  $y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 2x}.$

Posto  $Y = y + \frac{1}{2}$ ,  $X = 1 + 2x$ , l'equazione diventa  $XY = \frac{3}{2}$ , che ha centro  $C = (0, 0)$ . Vertici  $V = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ , fuochi  $F = \pm(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ , asintoti  $X = Y = 0$ . Tenendo conto del legame tra

le variabili, l'iperbole ottenuta ha centro in  $C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ , vertici in  $V_1 = \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{2}, \frac{2\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{2}\right)$ ,  
 $V_2 = \left(-\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{2}, \frac{-2\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{2}\right)$ , fuochi in  $F_1 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ ,  $F_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{-2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ ,  
 asintoti  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $y = -\frac{1}{2}$ .

## (2.52)

(a) Se  $k = 6$  l'equazione diventa  $y = 3x + \frac{1}{2}$ , che è quella di una retta.

Se  $k \neq 6$ , numeratore e denominatore sono proporzionali se  $\frac{k}{k-6} = \frac{1}{k-4}$ , il che accade per  $k = 2$  e per  $k = 3$ .

Se  $k = 2$  l'equazione diventa  $y = \frac{2x+1}{-4x-2}$ , cioè  $y = -\frac{1}{2}$  con  $x \neq -\frac{1}{2}$ .

Se  $k = 3$  l'equazione diventa  $y = \frac{3x+1}{-3x-1}$ , cioè  $y = -1$  con  $x \neq -\frac{1}{3}$ .

In questi due casi, dunque, si ottiene una retta orizzontale priva di un punto.

Se  $k \neq 2$ ,  $k \neq 3$ ,  $k \neq 6$  l'equazione è effettivamente quella di un'iperbole traslata. Per studiarne le caratteristiche, riscriviamola nel modo seguente:

$$\begin{aligned} y &= k \frac{k + \frac{1}{k}}{(k-6)x + (k-4)} = \frac{k}{k-6} \frac{(k-6)x + \frac{k-6}{k}}{(k-6)x + (k-4)} = \frac{k}{k-6} \left[ 1 + \frac{\frac{k-6}{k} - k + 4}{(k-6)x + (k-4)} \right] = \\ &= \frac{k}{k-6} + \frac{p}{(k-6)x + (k-4)} \end{aligned}$$

con  $p$  valore opportuno. Posto:

$$Y = y - \frac{k}{k-6}, \quad X = (k-6)x + (k-4),$$

l'equazione diventa  $XY = p$ ; in particolare, rispetto alle variabili  $X, Y$  l'iperbole ha centro in  $(0,0)$  e asintoti  $X = Y = 0$ . Ritornando alle variabili  $x, y$ , il centro dell'iperbole è in  $\left(-\frac{k-4}{k-6}, \frac{k}{k-6}\right)$  e gli asintoti sono le rette  $y = \frac{k}{k-6}$ ,  $x = \frac{4-k}{k-6}$ . I calcoli sono stati effettuati sotto l'ulteriore ipotesi  $k \neq 0$ ; è facile vedere per sostituzione che i risultati valgono anche per  $k = 0$ .

(b) Se  $k = 3$  l'equazione diventa  $y = \frac{3(x-1)}{2}$ , che è quella di una retta.

Se  $k \neq 3$ , numeratore e denominatore sono proporzionali se  $\frac{k}{3-k} = -\frac{3}{2}$ , il che accade per  $k = 9$ .

Se  $k = 9$  l'equazione diventa  $y = -\frac{3}{2} \frac{3x-1}{3x-1}$ , cioè  $y = -\frac{3}{2}$  con  $x \neq \frac{1}{3}$ .

Se  $k \neq 3$ ,  $k \neq 9$ , l'equazione è quella di una iperbole traslata. Per studiarne le caratteristiche, riscriviamola nel modo che segue:

$$\begin{aligned} y &= k \frac{x - \frac{3}{k}}{(3-k)x + 2} = \frac{k}{3-k} \frac{(3-k)x - \frac{3(3-k)}{k}}{(3-k)x + 2} = \frac{k}{3-k} \left[ 1 - \frac{\frac{9-k}{k}}{(3-k)x + 2} \right] = \\ &= \frac{k}{3-k} + \frac{p}{(3-k)x + 2} \end{aligned}$$

con  $p$  valore opportuno. Posto:

$$Y = y - \frac{k}{3-k}, \quad X = (3-k)x + 2,$$

l'equazione diventa  $XY = p$ ; in particolare, rispetto alle variabili  $X, Y$  l'iperbole ha centro in  $(0, 0)$  e asintoti  $X = Y = 0$ . Ritornando alle variabili  $x, y$ , il centro dell'iperbole è in  $\left(\frac{-2}{3-k}, \frac{k}{3-k}\right)$  e gli asintoti sono le rette  $y = \frac{k}{3-k}, x = \frac{-2}{3-k}$ . Come nell'esercizio precedente, i calcoli sono stati effettuati sotto l'ulteriore ipotesi  $k \neq 0$ ; è facile vedere per sostituzione che i risultati valgono anche per  $k = 0$ .

**(2.53)**

- (a) L'informazione sul centro dell'iperbole si traduce nell'equazione  $y + 3 = \frac{k}{x-1}$ . Imponendo il passaggio per il punto dato, si trova  $k = -4$ . L'equazione richiesta è dunque  $y = \frac{3x+1}{1-x}$ .
- (b) L'informazione sugli asintoti permette di scrivere l'equazione  $y + 5 = \frac{k}{x+8}$ . Imponendo il passaggio per il punto dato, si trova  $k = 46$ . L'equazione richiesta è dunque  $y = \frac{6-5x}{x+8}$ .
- (c) L'informazione sull'asintoto permette di scrivere l'equazione  $y - \frac{1}{2} = \frac{k}{x-p}$ . Imponendo il passaggio per i punti dati, si trova il sistema

$$\begin{cases} -\frac{15}{2} = \frac{k}{-p} \\ \frac{15}{2} = \frac{k}{\frac{1}{2}-p} \end{cases} \iff p = \frac{1}{4}, \quad k = \frac{15}{8}.$$

L'equazione dell'iperbole è  $y = \frac{2x+7}{4x-1}$ .

- (d) Scritta l'equazione nella forma  $y = \frac{ax+b}{x+c}$ , il passaggio per i punti dati si traduce nel sistema

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{-a+b}{c-1} = -\frac{1}{2} \\ \frac{4a+b}{c+4} = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = -5 \end{cases}$$

L'equazione richiesta è dunque  $y = \frac{3x}{5-x}$ .

- (e) Scritta l'equazione nella forma  $y = \frac{ax+b}{x+c}$ , il passaggio per i punti dati e per quello di tangenza si traduce nel sistema

$$\begin{cases} \frac{-\frac{a}{3}+b}{c-\frac{1}{3}} = -4 \\ \frac{b}{c} = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6c-4 \\ b = -2c \end{cases}$$

L'equazione diventa  $y = \frac{(6c-4)x-2c}{x+c}$ . Imponiamo la condizione di tangenza con la retta:

$$\begin{cases} y = \frac{(6c-4)x-2c}{x+c} \\ y = 4x-2 \end{cases} \implies 2x^2 + (1-c)x = 0$$

Il discriminante dell'equazione è nullo per  $c = 1$ ; l'equazione ottenuta è  $y = \frac{2x-2}{x+1}$ .

$$(2.54) \quad y = -\frac{x^2}{2}.$$

(2.55) Fuoco  $F = (0, 1)$ , direttrice  $y = -1$ .

(2.56) Vertice  $V = (1, -1)$ , fuoco  $F = (1, -\frac{9}{8})$ , direttrice  $y = -\frac{7}{8}$ .

(2.57) La parabola richiesta ha un'equazione della forma  $y = ax^2 + bx + c$ .

- (a) Imponendo il passaggio per i punti dati, si ottiene un sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $a, b, c$ : la sua risoluzione permette di dedurre l'equazione cercata. Si può semplificare il calcolo, osservando che due punti hanno la stessa ordinata. Data la simmetria della parabola, il suo vertice deve stare sull'asse del segmento individuato da questi due punti, cioè sulla retta  $x = \frac{1}{2}$ . Deve dunque essere  $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ , cioè  $b = -a$ . Alla parabola  $y = ax^2 - ax + c$  imponiamo il passaggio per  $(0, -6)$ : si ottiene che deve essere  $c = -6$ . Infine alla parabola  $y = ax^2 - ax - 6$  imponiamo il passaggio per  $(2, -4)$ : si ricava  $a = 1$ . In definitiva, la parabola richiesta ha equazione  $y = x^2 - x - 6$ .

- (b) Le condizioni si traducono nel sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 0 \\ c = -1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

La parabola ha equazione  $y = 3x^2 - 1$ .

- (c) Si può procedere come sopra, ricorrendo alle formule che legano le coordinate del fuoco e del vertice ai coefficienti della parabola e quindi risolvendo un sistema di tre equazioni nelle tre incognite. Più semplicemente, dai dati del problema si ricava che la direttrice ha equazione  $y = \frac{7}{2}$ ; a questo punto possiamo ricorrere alla definizione di parabola e scrivere

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-\frac{5}{2})^2} = \left| y - \frac{7}{2} \right|.$$

Elevando al quadrato ambo i membri e svolgendo i calcoli, si ottiene l'equazione cercata:

$$y = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{5}{2}.$$

- (d) Anche in questo caso si può ricorrere alle formule e alla successiva risoluzione di un sistema, oppure alla definizione. Seguiamo questa seconda strada: osservato che il fuoco deve essere nel punto  $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{8})$ , si ottiene

$$\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{3}{8})^2} = \left| y + \frac{5}{8} \right|.$$

da cui si deduce l'equazione:

$$y = 2x^2 - 6x + 4.$$

(2.58) La parabola richiesta ha un'equazione della forma  $x = ay^2 + by + c$ .

- (a) Non esiste alcuna parabola della forma suddetta che verifica queste condizioni, dato che fuoco e vertice non stanno sulla stessa retta orizzontale.
- (b) Come già nel problema precedente, possiamo procedere in due modi diversi, ricorrendo alle formule, oppure alla definizione. I dati permettono di concludere che la direttrice ha equazione  $x = \frac{1}{2}$ . L'equazione della parabola è dunque

$$\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 + (y+2)^2} = \left| x - \frac{1}{2} \right|,$$

che si semplifica in:

$$x = \frac{y^2}{2} + 2y + 3.$$

- (c) Tenendo conto che il fuoco si trova in  $F = (\frac{15}{4}, 2)$ , procedendo come sopra si trova che l'equazione della parabola è  $x = -y^2 + 4y$ .

**(2.59)** La parabola richiesta ha un'equazione della forma  $y = ax^2 + bx + c$ .

- (a) Il passaggio per i due punti si traduce nelle condizioni

$$\begin{cases} c = 3 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 3 \\ b = -1 - 3a \end{cases}$$

che permettono di scrivere l'equazione nella forma  $y = ax^2 - (1 + 3a)x + 3$ . Le coordinate del vertice sono:

$$V = \left( \frac{1 + 3a}{2a}, \frac{-9a^2 + 6a - 1}{4a} \right).$$

Imponendo che il vertice appartenga alla retta data, si arriva all'equazione:

$$\frac{-9a^2 + 6a - 1}{4a} = 5 - \frac{1 + 3a}{2a}$$

che, eseguendo gli opportuni calcoli, fornisce  $a = -1$  oppure  $a = \frac{1}{9}$ . Esistono dunque due parabole che soddisfano le richieste:

$$y = -x^2 + 2x + 3, \quad y = \frac{x^2}{9} - \frac{4}{3}x + 3.$$

- (b) Il passaggio per i due punti e l'ipotesi che il vertice ha ascissa uguale a  $-1$  si traduce nel sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ c = 2 \\ 9a - 3b + c = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

La parabola cercata ha equazione  $y = x^2 + 2x + 2$ .

- (c) le condizioni del problema si traducono nel sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ \frac{1 - b^2 + 4ac}{4a} = \frac{3}{4} \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -4a \\ c = 3a \\ 4a^2 + 3a - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -1 \\ c = \frac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases}$$

Si trovano due parabole che risolvono il problema  $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{4}$  e  $y = -x^2 + 4x - 3$ .

- (d) Invece di procedere come nei casi precedenti, conviene osservare che la direttrice della parabola deve essere la retta  $y = \frac{5}{6}$  e ricorrere alla definizione; questo porta all'equazione

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{7}{6}\right)^2} = \left|y - \frac{5}{6}\right| \iff y = \frac{3}{2}x^2 + 1.$$

**(2.60)**

- (a) Si intersecano nei punti  $(3, -\frac{1}{2})$ ,  $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{8})$ .  
 (b) Non si intersecano.  
 (c) Sono tangenti nel punto  $(2, \frac{4}{3})$ .  
 (d) Sono tangenti nel punto  $(4, -5)$ ,

**(2.61)**

- (a) Il punto  $P$  non appartiene alla parabola. Per trovare le due rette tangenti, scriviamo il sistema tra la parabola e il fascio di rette passanti per  $P$ :

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 2 \\ y = k(x + \frac{3}{2}) - 1 \end{cases}$$

Eliminando  $y$ , si ottiene l'equazione di secondo grado in  $x$ :

$$x^2 + (2 - k)x + 3(1 - \frac{k}{2}) = 0$$

La condizione di tangenza riciede l'annullarsi del discriminante dell'equazione:

$$\Delta = k^2 + 2k - 8 = 0 \text{ per } k = 2 \text{ oppure } k = -4.$$

Le due rette tangenti sono

$$y = 2x + 2 \text{ che è tangente nel punto } (0, 2)$$

$$y = -4x - 7 \text{ che è tangente nel punto } (-3, 5).$$

- (b) Il punto  $P$  non appartiene alla parabola. Per trovare le due rette tangenti, procediamo come sopra. Nel sistema

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 4 \\ y = k\left(x - \frac{1}{2}\right) + 7 \end{cases}$$

eliminiamo  $y$ , ottenendo l'equazione di secondogrado in  $x$ :

$$x^2 + (k - 2)x + \left(3 - \frac{k}{2}\right) = 0.$$

La condizione di tangenza richiede l'annullarsi del discriminante dell'equazione:

$$\Delta = k^2 - 2k - 8 = 0 \text{ per } k = 4 \text{ oppure } k = -2.$$

Le due rette tangenti sono:

$$y = 4x + 5 \text{ che è tangente nel punto } (-1, 1)$$

$$y = 8 - 2x \text{ che è tangente nel punto } (2, 4).$$

- (c) Il punto  $P$  appartiene alla parabola: esiste dunque un'unica retta tangente, il punto di tangenza essendo proprio  $P$ . Dal sistema

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x + 1 \\ y = 1 + kx \end{cases}$$

si ricava l'equazione di secondo grado in  $x$ :

$$x^2 + (k - 5)x = 0$$

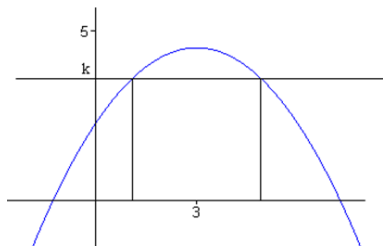
il cui discriminante si annulla per  $k = 5$ . La retta tangente è  $y = 5x + 1$ .

**(2.62)** Intersechiamo la parabola con una generica retta orizzontale

$$\begin{cases} y = \frac{-x^2 - 2x + 8}{3} \\ y = k \end{cases}$$

Eliminando  $y$ , si ottiene l'equazione di secondo grado in  $x$ :  $x^2 + 2x + 3k - 8 = 0$  che ammette due soluzioni distinte:  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{9 - 3k}$  purché sia  $k < 3$ . Questi due valori sono le ascisse dei punti in cui la retta interseca la parabola (l'ordinata è  $k$  in entrambe i casi). La lunghezza della corda così individuata è dunque  $2\sqrt{9 - 3k}$ , che coincide con il valore richiesto per  $k = \frac{8}{3}$ .

**(2.63)** Utilizzando la definizione di parabola, si trova l'equazione  $y = \frac{-x^4 + 6x + 11}{4}$ .



Il problema consiste nel cercare una retta di equazione  $y = k$  (con  $0 < k < 5$ ) che stacca sulla parabola una corda di lunghezza uguale alla sua distanza dall'asse delle  $x$ . Poiché

$$\begin{cases} y = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{11}{4} \\ y = k \end{cases} \implies x^2 - 6x - 11 + 4k = 0 \iff x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{5 - k}$$

la corda ha lunghezza  $4\sqrt{5 - k}$ . Deve dunque essere  $4\sqrt{5 - k} = k$  e questo si verifica per  $k = 4$ .

**(2.64)** Dobbiamo rendere massimo il prodotto  $xy$  sotto la condizione che risulti  $x + y = 60$ . Essendo  $y = 60 - x$ , la funzione da rendere massima è  $f(x) = x(60 - x)$ . Il grafico di questa funzione è una parabola con la concavità rivolta verso il basso: dunque il valore massimo corrisponde all'ordinata del vertice della parabola. In conclusione la funzione è massima per  $x = 30$ , cioè scegliendo  $x = y = 30$ .

**(2.65)**

- (a) Perché la funzione assuma valore minimo, deve essere  $k > 0$ : in questo modo il suo grafico è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto. La condizione del problema richiede che il vertice abbia ascissa uguale a 4: questo accade se  $\frac{4}{2k} = 4$ , cioè se  $k = \frac{1}{2}$ .
- (b) La funzione ha come grafico una parabola con la concavità rivolta verso il basso; perché assuma valore massimo per  $x = 6$ , il vertice deve avere ascissa uguale a 6; questo accade se  $\frac{3k}{4} = 6$ , cioè se  $k = 8$ .

**(2.66)** La parabola ha equazione della forma  $y = ax^2 + bx + c$ . Il passaggio per l'origine richiede che sia  $c = 0$ . Il vertice è il punto di incontro tra l'asse della parabola e la retta data: risolvendo il sistema delle due equazioni, si trova  $V = (2, 6)$ . Deve dunque essere

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 6 \end{cases}$$

La parabola richiesta ha dunque equazione  $y = -\frac{3x^2}{2} + 6x$ .

Il punto  $A$  ha coordinate  $(4, 0)$ . Il generico punto sulla parabola è  $P = (x, -\frac{3x^2}{2} + 6x)$ : perché la sua ordinata sia positiva, deve essere  $0 < x \leq 4$ . L'area del triangolo  $OAP$  vale  $12x - 3x^2$ , che è uguale a 9 per  $x = 1$  e per  $x = 3$ . Per il punto  $P$  esistono dunque due scelte  $P = (1, \frac{9}{2})$  oppure  $P = (3, \frac{9}{2})$ .

**(2.67)** Cerchiamo le intersezioni delle due parabole con la generica retta  $x = k$ :

$$\begin{cases} x = 2y^2 - 4y - 1 \\ x = k \end{cases} \implies 2y^2 - 4y - 1 - k = 0 \iff y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{6+2k}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{4}y + \frac{27}{16} \\ x = k \end{cases} \implies 12y^2 - 36y + 27 - 16k = 0 \iff y_{1,2} = \frac{18 \pm 8\sqrt{3k}}{12}$$

Le due corde misurano  $\sqrt{6+2k}$  e  $\frac{4}{3}\sqrt{3k}$ ; l'uguaglianza si ottiene per  $k = \frac{9}{5}$ .

**(2.68)** Consideriamo la generica retta  $y = mx + p$  e imponiamo che risulti tangente ad entrambe le parabole.

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = mx + p \end{cases} \implies x^2 - 4mx - 4p = 0$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 2 \\ y = mx + p \end{cases} \implies x^2 - (m+2)x - (p+2) = 0$$

Imponiamo che sia contemporaneamente nullo il discriminante delle due equazioni:

$$\begin{cases} 4m^2 + 4p = 0 \\ (m+2)^2 + 4(p+2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p = -m^2 \\ 3m^2 - 4m - 12 = 0 \end{cases}$$

In definitiva

$$\begin{cases} m = \frac{2(1+\sqrt{10})}{3} \\ p = -\frac{4(11+2\sqrt{10})}{9} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} m = \frac{2(1-\sqrt{10})}{3} \\ p = -\frac{4(11-2\sqrt{10})}{9} \end{cases}$$

**(2.69)** Verifichiamo il caso generale (ovviamente, quello particolare si ottiene per  $p = 0$ ). Per  $m = 0$ , si ottiene  $a' = a$ ,  $b' = -b + 2p$ , che sono proprio le equazioni della simmetria rispetto alla retta  $y = p$ . Se  $m \neq 0$ , la retta per  $P$  perpendicolare alla retta di simmetria ha equazione

$$y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$$

L'intersezione delle due rette è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y - b = -\frac{1}{m}(x - a) \\ y = mx + p \end{cases}$$

Questa intersezione deve essere il punto di mezzo  $\left(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}\right)$  del segmento  $PP'$  sostituendo le coordinate di questo punto nel sistema, si ottiene che deve essere:

$$\begin{cases} b' + \frac{a'}{m} = b + \frac{a}{m} \\ b' - ma' = -b + ma + 2p \end{cases}.$$

Da questo sistema si ottengono per  $a'$  e  $b'$  i valori richiesti.

**(2.70)**

(a)  $x^3 - 2y^2 = 0$       (b)  $x - y - 1 = 0$       (c)  $y + 3x^2 = 0$       (d)  $4y^2 - x - 1 = 0$       (e)  $x^2 + y - 2x - 4y - 5 = 0$

**(2.71)**

(a)  $3x + 2y - 1 = 0$       (b)  $x + 5y^2 = 0$       (c)  $x^2 + y^2 + x - y = 0$

(d)  $x^3 + y = 0$       (e)  $4x^2 + y^2 = 25$       (f)  $x^3 + y^2 = 0$

**(2.72)**

(a)  $3x + 2y - 4 = 0$       (b)  $4x^2 - y^2 + 6 = 0$       (c)  $x^2 + y^2 - x - y = 7$       (d)  $x + 3y^2 = 0$       (e)  $xy = 1$

**(2.73)**

(a)  $x + y = 0$       (b)  $4y^2 - x = 0$       (c)  $x^2 + y^2 = 1$       (d)  $y - x^3 = 0$       (e)  $\frac{x^4}{4} - y^2 = 0$       (f)  $y = x^2$

**(2.74)**

(a)  $(0, 0)$       (b)  $(1, 2)$       (c)  $(-1, -1)$       (d)  $(2, 0)$       (e)  $(0, -1)$

**(2.75)**

(a)  $2x - 7 = 0$       (b)  $x + y - 2 = 0$       (c)  $4x^2 - 16x + y + 16 = 0$

(d)  $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$       (e)  $4x^2 - y^2 - 12y - 37 = 0$