

## CAPITOLO 1: CENNI DI LOGICA E TEORIA DEGLI INSIEMI - RISOLUZIONE ESERCIZI

(1.1) Si ricordi che a destra e a sinistra del simbolo  $\subset$  devono comparire sempre degli insiemi, a destra del simbolo  $\in$  un insieme, a sinistra un elemento dell'insieme. Si presti però attenzione al fatto che un insieme può avere come elementi altri insiemi. Si ricordi infine che la notazione  $\mathbf{a}$  indica un elemento,  $\{\mathbf{a}\}$  un insieme, precisamente quello che ha come unico elemento  $\mathbf{a}$ .

Sono vere: (a), (d), (f), (g), (h), (i), (n), (o), (p), (q), (s).

Sono false: (b), (c), (e), (l), (m), (r), (t).

### (1.2)

(a)  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$ .

(b) Sono vere:  $(b_2), (b_4), (b_6)$ ; sono false:  $(b_1), (b_3), (b_5)$ .

(c) Per  $n = 1$  l'affermazione è vera:  $\mathcal{P}(A)$  contiene due oggetti, cioè  $\emptyset$  ed  $A$ .

Supponiamo l'affermazione vera per  $n$  e proviamola per  $n + 1$ . L'insieme di  $n + 1$  elementi si può scrivere nella forma  $A_{n+1} = A_n \cup \{x_{n+1}\}$ , dove  $A_n$  ha  $n$  elementi. Ogni sottoinsieme di  $A_n$  si fa diventare sottoinsieme di  $A_{n+1}$  in due modi: lasciandolo invariato oppure unendogli l'elemento  $x_{n+1}$ . In definitiva ogni elemento di  $\mathcal{P}(A_n)$  genera due elementi di  $\mathcal{P}(A_{n+1})$  e quindi i  $2^n$  elementi di  $\mathcal{P}(A_n)$  diventano  $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$  elementi di  $\mathcal{P}(A_{n+1})$ .

Si osservi che il risultato vale anche per  $n = 0$ : l'unico insieme che non ha elementi è l'insieme vuoto  $\emptyset$  e  $\mathcal{P}(\emptyset)$  ha come unico elemento proprio  $\emptyset$ .

### (1.3)

(a)  $A \cup B = A \cup \{3, 4\}$ ,  $A \cap B = \{1, 2\}$ ,  $A \setminus B = \{1, 2\}$ .

(b)  $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} : -5 \leq x \leq 7\}$ ,  $A \cap B = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $A \setminus B = \{x \in \mathbb{Z} : -5 \leq x \leq 1\}$ .

(c)  $A \cup B = \{1, -1\}$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \setminus B = \emptyset$ .

(d)  $A \cup B = \mathbb{R}$ ,  $A \cap B = (-2, -1) \cup (1, 2)$ ,  $A \setminus B = [-1, 1]$ .

### (1.4)

(a)  $x$  multiplo di 20  $\implies x$  multiplo di 4.

(b)  $\sqrt{x-1} = 1 \iff x = 2$ .

(c)  $x > 1 \implies x^2 > 1$ .

(d)  $x > 1 \iff x^3 > 1$

(e)  $f$  derivabile  $\implies f$  continua.

(f) Condizione sufficiente perché una funzione sia integrabile in  $[a, b]$  è che sia continua.

(g) Condizione sufficiente perché lo studente passi l'esame è che studi.

(h) Condizione sufficiente perché  $x$  appartenga ad  $A$  è che appartenga ad  $A \cap B$ ;  
condizione necessaria (ma non sufficiente) perché appartenga ad  $A \cap B$  è che appartenga a  $B$ .

### (1.5)

(a)  $B \implies A$  (f)  $A \iff B$  (m)  $A \iff B$  (r)  $A \iff B$

(b)  $A \iff B$  (g)  $A \iff B$  (n)  $B \implies A$  (s)  $A \implies B$

(c)  $A \implies B$  (h)  $B \implies A$  (o)  $A \iff B$  (t)  $A \implies B$

(d)  $B \implies A$  (i)  $B \implies A$  (p)  $A \iff B$  (u)  $A \iff B$

(e)  $A \iff B$  (l)  $A \iff B$  (q)  $B \implies A$

(1.6) L'affermazione corretta è la (c), che fornisce una dimostrazione dell'enunciato. Le altre affermazioni sono sbagliate, perché interpretano l'enunciato come una condizione necessaria e sufficiente a che una terna sia pitagorica, mentre la condizione è solo sufficiente.

(1.7) (a) Almeno uno studente del corso non abita a Pisa.

- (b) Tutti gli studenti del corso prenderanno all'esame non meno di 30. (Auguri!!).
- (c) Almeno una studentessa del corso ha occhi che non sono celesti oppure capelli che non sono biondi.
- (d) Almeno un docente non svolge alcun corso e non è all'estero per motivi di studio.
- (e) La frase afferma che l'insieme  $A$  è costituita da numeri minori di un dato  $M$ . Ad esempio,  $A = [0, 1]$ , ovvero l'insieme di tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1: tutti i numeri di questo insieme sono minori di 2 (ovviamente 2 non è l'unica scelta: possiamo prendere al suo posto un qualunque numero maggiore di 1). Un insieme così fatto si dice limitato superiormente: nella rappresentazione sulla retta cartesiana  $M$  è un limite che i numeri dell'insieme non possono scavalcare a destra. La negazione della proposizione si scrive:  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A: x \geq M$ . Un insieme con queste proprietà si dice non limitato superiormente: qualunque sia il numero  $M$  che scegliamo, c'è almeno un numero di  $A$  che lo scavalca sulla destra, cioè è più grande di  $M$ . Come ad esempio, possiamo considerare  $A = [1, +\infty)$ , ovviamente l'insieme di tutti i numeri reali che sono maggiori o uguali di 1.
- (f) Anche se particolarmente analoga alla proposizione in (e), questa non caratterizza alcuna particolare proprietà di  $A$  (se non quella di non essere l'insieme vuoto): qualunque sia il numero  $x \in A$  evidentemente si può trovare un altro numero (non necessariamente appartenente ad  $A$ ) che sia più grande di questo (ad esempio:  $x + 1$ ).
- La negazione è:  $\exists x \in A: \forall M \in \mathbb{R}, x \geq M$ .
- Questa è una proprietà che non può essere verificata da nessun insieme (non vuoto): infatti afferma l'esistenza di un numero maggiore o uguale di tutti i numeri reali. Questo non è possibile, perché l'insieme dei reali non è limitato superiormente: per ogni reale fissato ne esistono infiniti più grandi di questo.
- (g) In corrispondenza a valori diversi della variabile  $x$  la funzione assume valori diversi (una funzione con questa proprietà si dice *iniettiva*). Un esempio ovvio è dato dalla funzione  $f(x) = x$ ; Più in generale possiamo considerare  $f(x) = x^p$ , con  $p$  intero dispari.
- La negazione è:  $\exists x', x'' \in A: f(x') = f(x'')$ .
- cioè esistono due valori diversi di  $x$  per i quali la funzione assume lo stesso valore. un esempio è dato dalla funzione  $f(x) = x^p$ , con  $p$  pari, che assume lo stesso valore per  $x = k$  e per  $x = -k$ .
- (h) La funzione assume almeno una volta tutti i valori reali (funzione surgettiva); ad esempio, la funzione  $f(x) = x^p$ , con  $p$  dispari.
- La negazione è:  $\exists y \in \mathbb{R}: \forall x \in A, f(x) \neq y$
- cioè esiste almeno un valore reale che non è mai assunto dalla funzione; ad esempio la funzione  $f(x) = x^p$ , con  $p$  intero pari, assume solo valori maggiori o uguali a 0.

(1.8) le espressioni (a), (b), (d) sono false; l'espressione (c) è vera.

(1.9) In ognuna delle seguenti tabelle la  $P$  che compare nell'ultima colonna si riferisce alla proposizione che stiamo esaminando.

|     |     |     |                  |                        |              |     |     |     |                        |                        |                   |                 |     |
|-----|-----|-----|------------------|------------------------|--------------|-----|-----|-----|------------------------|------------------------|-------------------|-----------------|-----|
| (a) | $p$ | $q$ | $r$              | $p \vee \neg q$        | $r \wedge q$ | $P$ | (d) | $p$ | $q$                    | $r$                    | $p \Rightarrow q$ | $\neg p \iff r$ | $P$ |
|     | v   | v   | v                | v                      | v            | v   |     | v   | v                      | v                      | v                 | f               | f   |
|     | v   | v   | f                | v                      | f            | f   |     | v   | v                      | f                      | v                 | v               | v   |
|     | v   | f   | v                | v                      | f            | f   |     | v   | f                      | v                      | f                 | f               | v   |
|     | v   | f   | f                | v                      | f            | f   |     | v   | f                      | f                      | f                 | v               | f   |
|     | f   | v   | v                | f                      | v            | v   |     | f   | v                      | v                      | v                 | v               | v   |
|     | f   | v   | f                | f                      | f            | v   |     | f   | v                      | f                      | v                 | f               | f   |
|     | f   | f   | v                | v                      | f            | f   |     | f   | f                      | v                      | v                 | v               | v   |
| (b) | $p$ | $q$ | $\neg(p \vee q)$ | $\neg p \wedge \neg q$ | $P$          | (c) | $p$ | $q$ | $p \Rightarrow \neg q$ | $\neg p \Rightarrow q$ | $P$               |                 |     |
|     | v   | v   | f                | f                      | f            |     | v   | v   | f                      | v                      | v                 |                 |     |
|     | v   | f   | f                | f                      | f            |     | v   | f   | v                      | v                      | v                 |                 |     |
|     | f   | v   | f                | f                      | f            |     | f   | v   | v                      | v                      | v                 |                 |     |
|     | f   | f   | v                | v                      | v            |     | f   | f   | v                      | f                      | v                 |                 |     |
|     |     |     |                  |                        |              |     |     |     |                        |                        |                   |                 |     |
|     |     |     |                  |                        |              |     |     |     |                        |                        |                   |                 |     |
|     |     |     |                  |                        |              |     |     |     |                        |                        |                   |                 |     |

|     |     |     |              |                      |     |     |     |     |                 |                        |     |
|-----|-----|-----|--------------|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----------------|------------------------|-----|
| (e) | $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\neg p \vee \neg q$ | $P$ | (f) | $p$ | $q$ | $p \iff \neg q$ | $q \Rightarrow \neg p$ | $P$ |
|     | v   | v   | v            | f                    | f   |     | v   | v   | f               | f                      | v   |
|     | v   | f   | f            | v                    | f   |     | v   | f   | v               | v                      | v   |
|     | f   | v   | f            | v                    | f   |     | f   | v   | v               | v                      | v   |
|     | f   | f   | f            | v                    | f   |     | f   | f   | f               | v                      | f   |

  

|     |     |     |                   |                                   |     |
|-----|-----|-----|-------------------|-----------------------------------|-----|
| (g) | $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$ | $P$ |
|     | v   | v   | v                 | f                                 | v   |
|     | v   | f   | f                 | f                                 | v   |
|     | f   | v   | v                 | f                                 | v   |
|     | f   | f   | v                 | v                                 | f   |

**(1.10)** Poiché i ragionamenti non coincidono né con lo schema del mudus ponens né con lo schema del modus tollens, non è possibile controllare la loro correttezza con queste regole. Possiamo costruire le tavole di verità delle varie proposizioni equivalenti ai ragionamenti e controllare se il risultato è sempre vero, qualunque siano i dati.

Come esempio di procedimento consideriamo il ragionamento (a); la relativa tabella è la seguente (la P che compare nell'ultima colonna indica la proposizione presa in esame):

| $p$ | $q$ | $\neg p \Rightarrow \neg q$ | $(\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge p$ | $P$ |
|-----|-----|-----------------------------|----------------------------------------|-----|
| v   | v   | v                           | v                                      | v   |
| v   | f   | v                           | v                                      | f   |
| f   | v   | f                           | f                                      | v   |
| f   | f   | v                           | f                                      | v   |

Dunque il ragionamento non è corretto.

Procedendo come sopra si trova che sono corretti i ragionamenti in (b), (e), (f), (g), (h), non corretti quelli in (a), (c), (d).

### (1.12)

(a)  $D = \{2, 3, 5, 7\}$

(b)  $D = \{12, 15, 18\}$

(c)  $D = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

(d)  $D = \{(8, 10), (7, 9), (6, 8), (5, 7), (4, 6), (3, 5), (2, 4), (1, 3), (0, 2), (-1, 1), (-2, 0)\}$ .

### (1.12)

(a)  $x$  è multiplo di 15;  $D = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$ . (b)  $x$  è multiplo di 5 ma non di 3;  
 $D = \{10, 20, 25, 35, 40, 50, 55, 65, 70, 80, 85, 95, 100\}$ .