

(7.17) Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, deducendolo da quello di opportune funzioni elementari:

- (a) $\log(x+2)$ (b) $\log_{\frac{1}{2}}|x-1|$ (c) $|\log x|$ (d) $\log|x|$ (e) $\log_{\frac{1}{2}}|x^2-1|$
 (f) $\frac{1}{\log|x|}$ (g) $\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ (h) $e^{-|x|}$ (i) $e^{\frac{1}{\log|x|}}$ (l) $e^{\left|\frac{x}{x-1}\right|}$

TRIGONOMETRIA

(8.1) Trasformare da gradi sessagesimali a radianti o viceversa.

- (a) 30^0 ; (b) 270^0 ; (c) 360^0 ; (d) 1^0 ; (e) 45^0 ; (f) 135^0 ; (g) 245^0 ; (h) 15^0 ; (i) $10^030'$;
 (j) $13^09''$; (k) $14^030'9''$;
 (l) $\frac{\pi}{8}$; (m) 2π ; (n) $\frac{3}{2}\pi$; (o) $\frac{2}{3}\pi$; (p) 1 ; (q) $\frac{\pi}{12}$; (r) $\frac{3}{8}\pi$; (s) $\frac{11}{6}\pi$; (t) $\frac{7}{5}\pi$; (u) $\frac{11}{24}\pi$;
 (v) $\frac{13}{45}\pi$.

(8.2) Stabilire in quale quadrante cade il secondo estremo dei seguenti archi di cui si conosce l'ampiezza (il primo estremo è sempre fissato nel punto $(1, 0)$):

- (a) -110^0 ; (b) -330^0 ; (c) 225^0 ; (d) 175^0 ; (e) -220^0 ; (f) 375^0 ;
 (g) $\frac{5}{6}\pi$; (h) $-\frac{\pi}{6}$; (i) $-\frac{13}{6}\pi$; (j) $\frac{5}{4}\pi$; (k) $-\frac{4}{3}\pi$; (l) $-\frac{8}{3}\pi$; (m) $\frac{7}{3}\pi$; (n) 1 .

(8.3) Studiare la periodicità delle seguenti funzioni.

- (a) $\cos(x-2)$ (b) $\sin(3x+\frac{\pi}{8})$ (c) $\cos(\frac{\pi}{4}x-2)$
 (d) $2\tan 3x$ (e) $\sin x + \cos \frac{x}{3}$ (f) $\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}$
 (g) $\cos 3x \cos 5x$ (h) $\tan x \tan 2x$ (i) $\sin x + \sin \pi x$

(8.4) Tracciare il grafico delle seguenti funzioni.

- (a) $\sin 2x$ (b) $\sin(x-1)$ (c) $\sin \frac{x}{2}$ (d) $\sin|x|$
 (e) $\cos|x|$ (f) $|\tan x|$ (g) $\sin x + \cos x$ (h) $\cos x - \sqrt{3}\sin x$
 (i) $2 + \sin x + 3\cos x$ (j) $\sin 2x + \cos 2x$ (k) $|\sin x + \cos x|$ (l) $|1 - \sin x - \cos x|$
 (m) $\cos(x+\frac{\pi}{4})$ (n) $|\sin|x||$ (o) $3 + \cos x$ (p) $\tan(x-\frac{\pi}{3})$
 (q) $|\cos(x+\frac{\pi}{4})|$ (r) $\cos 4x$ (s) $\tan \frac{x}{3}$ (t) $\sin \frac{3}{2}x$

(8.5) Risolvere i seguenti triangoli rettangoli (con le notazioni standard, in particolare, c indica l'ipotenusa).

- (a) $\begin{cases} c = 10 \\ \beta = 30^0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} c &= 16 \\ \sin \beta &= \frac{1}{4} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} c &= 0,6 \\ \tan \beta &= 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} c = 5 \\ a = 4 \end{cases}$
 (e) $\begin{cases} a = 18 \\ \alpha = 75^0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} b &= 8 \\ \sin \beta &= \frac{1}{3} \end{cases}$ (g) $\begin{cases} a = 3 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$ (h) $\begin{cases} b = 72,5 \\ \beta = 36^020' \end{cases}$

(8.6) Risolvere i seguenti triangoli.

$$(a) \begin{cases} c = 10 \\ \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \cos \beta = \frac{3}{5} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} c = 39 \\ \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \beta = 2\alpha \end{cases} \quad (c) \begin{cases} c = 20\sqrt{2} \\ \beta = \frac{\pi}{4} \\ b = 20\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} c = 20\sqrt{2} \\ \beta = \frac{\pi}{4} \\ b = 40 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} c = 12 \\ \tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ b = 4 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} c = 14 \\ \cos \beta = \frac{3}{7}\sqrt{5} \\ b = 3 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} c = 1 \\ \beta = 2\alpha \\ \cos 2\alpha = -\frac{1}{9} \end{cases} \quad (h) \begin{cases} c = 3 \\ b = 2 \\ \tan \alpha = 2\sqrt{2} \end{cases} \quad (i) \begin{cases} c = 4 \\ b = 6 \\ \cos \alpha = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

(8.7) Calcolare gli angoli formati dalle coppie di rette di equazione:

$$(a) \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x - 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

(8.8) Determinare il valore delle funzioni trigonometriche *seno*, *coseno* e *tangente* a partire dai seguenti dati:

$$(a) \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{3} \\ \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases} \quad (c) \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{4}{5} \\ \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{24}{25} \\ \alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi) \end{cases} \quad (e) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{7}{8} \\ \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases} \quad (f) \begin{cases} \tan \alpha = 2 \\ \alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

(8.9) Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P e formante con la direzione positiva dell'asse x l'angolo α indicato:

$$(a) \begin{cases} P = (1, 0) \\ \alpha = \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} P = (\frac{4}{3}, 2) \\ \alpha = \frac{3}{4}\pi \end{cases} \quad (c) \begin{cases} P = (0, -4) \\ \sin \alpha = \frac{3}{5}, \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases} \quad (d) \begin{cases} P = (\frac{1}{4}, -3) \\ \cos \alpha = \frac{24}{25}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

(8.10) Verificare le seguenti identità.

$$(a) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (b) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$(c) \sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (d) \cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$$

(8.11) Sviluppare e semplificare le seguenti espressioni.

$$(a) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \quad (b) \sin\left(\frac{5}{3}\pi - \alpha\right) + \cos\left(\frac{5}{6}\pi + \alpha\right)$$

$$(c) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) \quad (d) 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - 2 \sin\left(\alpha - \frac{3}{4}\pi\right) \cos\left(\frac{5}{4}\pi - \alpha\right)$$

$$(e) \quad \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(f) \quad \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} - 1$$

$$(g) \quad \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{5}{3}\pi - \alpha\right)}{\tan\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right) \tan\left(\frac{3}{4}\pi + \alpha\right)}$$

$$(h) \quad \frac{\cos 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha}$$

$$(i) \quad \frac{(1 + \cos 2\alpha) \tan \alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$(l) \quad (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$$

$$(m) \quad \tan 2\alpha + \sin 2\alpha$$

$$(n) \quad \cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha - 1$$

$$(o) \quad \tan 2\alpha \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(p) \quad \frac{2(\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha)}{2 + \sin 2\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha(1 + \tan \alpha)}$$

$$(q) \quad \tan 2\alpha(1 - \tan^2 \alpha) + \sin 2\alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)$$

$$(r) \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha$$

$$(s) \quad \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$(t) \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha - \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(u) \quad \sin \alpha \tan \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(v) \quad \tan \frac{\alpha}{2} \tan \alpha + 1$$

$$(z) \quad 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \cos 2\alpha - \sin^2 \alpha + 1$$

(8.12) Trasformare le seguenti espressioni utilizzando le formule parametriche.

$$(a) \quad \cos \alpha - \sin \alpha - 1$$

$$(b) \quad \sin 2\alpha - \cos \alpha + 1$$

$$(c) \quad \tan 2\alpha$$

$$(d) \quad \cos \alpha - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(e) \quad \frac{2(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos \alpha + \sin \alpha + 1} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$(f) \quad \left(\tan \alpha - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \right) \cos \alpha$$

(8.13) Trasformare le somme in prodotti (utilizzando le formule di prostaferesi) o viceversa (utilizzando le formule di Werner).

$$(a) \quad \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$$

$$(b) \quad \sin 5\alpha - \sin 3\alpha$$

$$(c) \quad \sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin \alpha$$

$$(d) \quad \cos(\alpha - 2\beta) + \cos(\alpha + 2\beta)$$

$$(e) \quad \sin \alpha - \cos \beta$$

$$(f) \quad \sin 3\alpha \cos 2\alpha$$

$$(g) \quad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$(h) \quad \sin(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \cos \beta$$

(8.14) Provare che l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il *seno* dell'angolo compreso:

$$S = \frac{1}{2} a b \sin \gamma.$$

(Sugg.: se γ è retto il risultato è immediato. Distinguere due casi a seconda che γ sia acuto oppure ottuso, e tracciare l'altezza dal vertice A al lato BC.)

(8.15) Risolvere le seguenti equazioni.

(a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$

(b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$

(c) $\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 1$

(d) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

(e) $\cos 2x = \cos x$

(f) $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{4}{3}\pi - x\right)$

(g) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$

(h) $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

(i) $\sqrt{\tan^2 x + 1} = -1 + \sqrt{2} + \tan x$

(j) $|\sin^2 x - \sin x| = 2$

(k) $\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1 = 0$

(l) $\sqrt{4 + \cos^2 x} = \sin x - 1$

(m) $\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \tan x} = \sqrt{2}$

(n) $|\sin x| = |\cos x - 1|$

(o) $\sin x + \cos x = 0$

(p) $\sin x - \cos x + 1 = 0$

(q) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \sqrt{3}\sin x + \frac{1}{2} = 0$

(r) $\sin x \cos x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$

(s) $2\sin x \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \sqrt{3}\sin x \cos x - 1 = 0$

(t) $(3 + \sqrt{3})\sin^2 x + 2\cos^2 x + (\sqrt{3} - 1)\sin x \cos x = 3$

(u) $\begin{cases} \sin(x - y) = 0 \\ \tan(x + y) = \sqrt{3} \end{cases}$

(v) $\begin{cases} 3\sin x = \sqrt{3}\sin y \\ \tan x \tan y = 1 \end{cases}$

(w) $\sin^4 x - 4\sin^2 x \cos^2 x + 3\cos^4 x = 0$

(x) $\sin 2x - \frac{3}{2} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x + \sin^2 x}}$

(y) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} + \frac{1}{1 + x^2}$

(z) $\sin^2 x + 4\cos 2x = \alpha$

(8.16) Dimostrare che:

(a) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} \leq \sin \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \forall \alpha, \beta \in [0, \pi];$

(b) $\frac{\cos \alpha + \sin \beta}{2} \leq \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \forall \alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$

(c) $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{2} \geq \tan \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \forall \alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$

(8.17) Risolvere le seguenti disequazioni.

(a) $2\sin x - 1 < 0;$

(b) $\cos x < -\frac{1}{2};$

(c) $\sqrt{2}\sin^2 x - \sin x > 0;$

(d) $2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0;$

(e) $2\sin^2 x + 4\cos^2 x > 5\cos x;$

(f) $\sqrt{\tan^2 x - 1} \geq \sqrt{2};$

- (g) $\sin x + \cos x > 0$; (h) $\sin x + \cos x - 1 < 0$;
- (i) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 0$; (j) $\sin^2 - \cos^2 > 0$;
- (k) $\sin^3 x + \cos^3 x > 0$; (l) $2\cos^3 + 2\cos^2 x \sin x - \sin x - \cos x < 0$;
- (m) $\tan \frac{x}{2} - \tan x > 0$; (n) $\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x - \frac{1}{2}\right) \cot x \geq 0$;
- (o) $1 - \frac{1}{\tan x} > 0$; (p) $\tan^2 \frac{x}{2} + \cos x > 1$;
- (q) $\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} > \cot^2 x$; (r) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} < \frac{2}{\sin 2x}$;
- (s) $\frac{\tan 2x (1 - \cos 2x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} \geq 0$; (t) $\frac{\sin x + \tan x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} < 0$;
- (u) $\frac{(\sin x - \cos 2x) \tan x}{\sin x - \sqrt{3} \cos x + 1} \geq 0$; (v) $\frac{\tan^2 2x - 1}{\sin 2x + \cos^2 x} \leq 0$;
- (w) $\begin{cases} \tan x > \sqrt{3} \\ \sin x > \frac{1}{2} \end{cases}$ (x) $\sin x + (\sqrt{2} - 1) \cos x > \sqrt{2} - 1$.

(8.18) Con le notazioni standard, dimostrare che un triangolo è isoscele nei lati a, b se e solo se

$$a + b = \tan \frac{\gamma}{2} (a \tan \alpha + b \tan \beta).$$

(8.19) Nel triangolo ABC si ha $c = 3$, $b = 1$, $\alpha = 120^\circ$. Prolungare il lato AC dalla parte di A e considerare su tale prolungamento il punto C' tale che $AC' = 1$. Calcolare il perimetro del triangolo BCC' .

(8.20) Sia $CD = \sqrt{2}$ una corda di una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2$ (con C più vicino a B). Dette H e K le proiezioni ortogonali di C e D sul diametro, e posto $\widehat{BOC} = x$, si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{V_1 + V_2}{V_3},$$

essendo V_1 il volume del cilindro avente raggio di base 1 e altezza HK , V_2 il volume della sfera di raggio 1 e V_3 il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del triangolo COD attorno ad AB . Determinare per quali valori di x risulta $f(x)$ minimo.

(8.21) Detto P un punto della semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$, condurre la bisettrice t dell'angolo $\widehat{PAB}$ e indicare con C e D rispettivamente i punti di incontro di t con la semicirconferenza e con la semiretta di origine B parallela ad AP . Posto $\widehat{PAB} = 2x$, scrivere la funzione

$$f(x) = \text{area } \triangle PAD$$

e tracciarne il grafico. Trovare per quali valori di x l'area è massima e per quali valori il triangolo $\triangle PAD$ è equivalente al triangolo $\triangle ACB$.

(8.22) Dato il settore circolare $\widehat{AOB}$ di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ e raggio r , considerare i rettangoli in esso inscritti, aventi un lato su OA . Indicato con P il vertice appartenente all'arco $\widehat{AOB}$ ed assumendo come variabile x l'angolo $\widehat{AOP}$, trovare l'area del rettangolo al variare di P . Dire per quali valori di x quest'area è massima.