

CAPITOLO 7: ESPONENZIALI E LOGARITMI

(7.1) Trasformare le forme esponenziali in forme logaritmiche e viceversa (ad esempio, l'uguaglianza $2^3 = 8$ può essere scritta nella forma $\log_2 8 = 3$ e viceversa):

- (a) $3^4 = 81$ (b) $5^0 = 1$ (c) $16^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{64}$ (d) $4^{-2} = \frac{1}{16}$
- (e) $25^{\frac{3}{2}} = 125$ (f) $\sqrt[3]{27} = 3$ (g) $\log_{10} 1000 = \frac{3}{2}$ (h) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$
- (i) $\log_5 125 = 3$ (l) $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ (m) $\log_{16} 64 = \frac{3}{2}$ (n) $\log_7 7 = 1$.

(7.2) Calcolare il valore dei seguenti logaritmi (occorre riscrivere l'argomento come potenza della base, in modo che il logaritmo assuma la forma $\log_a a^b$; il valore trovato per b è quello richiesto dal problema. Ad esempio $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$).

- (a) $\log_3 \frac{1}{27}$ (b) $\log_3 \sqrt[3]{3}$ (c) $\log_{\frac{1}{7}} 49$ (d) $\log_8 2$
- (e) $\log_{0,5} 32$ (f) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[5]{16}$ (g) $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[3]{7}$ (h) $\log_2 \sqrt[5]{8}$
- (i) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} \frac{1}{3}$ (l) $\log \sqrt{e^3}$ (m) $\log_{\sqrt{e}} e$ (n) $\log_{\frac{1}{e}} e$

(7.3) Determinare l'argomento o la base dei seguenti logaritmi:

- (a) $\log x = 4$ (b) $\log_{\frac{2}{5}} x = 2$ (c) $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{1}{2}$ (d) $\log_{\frac{7}{2}} x = -3$
- (e) $\log_{\frac{1}{8}} x = 1$ (f) $\log_{\frac{27}{8}} x = -\frac{1}{3}$ (g) $\log_{\sqrt{3}} x = 3$ (h) $\log_{\frac{1}{e}} x = 0$
- (i) $\log_{\frac{1}{25}} x = -\frac{1}{2}$ (l) $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{3}{2}$ (m) $\log_{\sqrt[4]{3}} x = 4$ (n) $\log_{0,8} x = -1$
- (o) $\log_x 9 = -2$ (p) $\log_x \frac{1}{100} = 2$ (q) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ (r) $\log_x \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = -3$
- (s) $\log_x \sqrt[4]{3} = \frac{1}{2}$ (t) $\log_x \frac{1}{25} = \frac{2}{3}$ (u) $\log_x e = -1$ (v) $\log_x \sqrt[3]{5} = \frac{4}{3}$
- (z) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{4}$

(7.4) Applicare le proprietà dei logaritmi, per trasformare le seguenti espressioni in somme o differenze di logaritmi in ciascuno dei quali compaia una sola variabile, elevata alla potenza 1; le quantità x , y , z e t si suppongono positive. (Poiché il procedimento non dipende dalla particolare base, anche in questo caso abbiamo scelto i logaritmi naturali.)

- (a) $\log x^2 y^3$ (b) $\log \sqrt{\frac{xy}{z}}$ (c) $\log x^2 \sqrt[3]{y}$
- (d) $\log \sqrt[3]{\frac{x^2 \sqrt{yz^3}}{t^4}}$ (e) $\log \frac{\sqrt[4]{xyz} \sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[3]{x^3 y^3 z^4} \sqrt[4]{xy}}$ (f) $\log \frac{x^3 y^2}{\sqrt{t} \sqrt{z}}$

(7.5) Applicare le proprietà dei logaritmi, per trasformare le seguenti espressioni in un unico logaritmo.
(Poiché il procedimento non dipende dalla particolare base, anche in questo caso abbiamo scelto i logaritmi naturali:)

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \log x - \log y + 2 \log z \\ \text{(b)} & 3 \log x + \frac{1}{2} \log y - \frac{1}{4} \log z \\ \text{(c)} & 2 + \log x - \frac{1}{2} \log y - \frac{1}{2} \log z \\ \text{(d)} & \frac{1}{4} \log x - 3 \log 5 + 7 \log y - 2 \log z. \end{array}$$

(7.6) Trasformare in logaritmi naturali:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \log_2 x & \text{(b)} & \log_{\frac{1}{2}} x \\ \text{(c)} & \log_{e^2} x & \text{(d)} & \log_{\sqrt{e}} x \\ \text{(e)} & \log_{\frac{2}{e}} x & \text{(f)} & \log_x 2 \\ \text{(g)} & \log_{x^2} x & \text{(h)} & \log_x x \end{array}$$

(7.7) Dopo aver stabilito il campo di esistenza delle seguenti funzioni, utilizzare le proprietà dei logaritmi per semplificare l'espressione:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \log x^2 & \text{(b)} & \log x^3 \\ \text{(c)} & \log e^x & \text{(d)} & \log_x x \\ \text{(d)} & \log [x(x-1)^2] & \text{(e)} & \log \sqrt{x+1} \\ \text{(f)} & x^{\log_x 3} & \text{(g)} & x^{\frac{1}{\log x}} \end{array}$$

(7.8) Semplificare le seguenti espressioni:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x \right]^2 & \text{(b)} \quad \frac{3^{2x+1} + 3^{2x} - 1}{2(3^x) + 1} \\ \text{(c)} & \frac{9^{x^2} - 9^x}{3^{x^2-1} + 3^{x-1}} \end{array}$$

(7.9) Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & (\sqrt{7})^x = 49 & \text{(b)} \quad \left(\frac{1}{2} \right)^x = 2 \\ \text{(c)} & 7^x = 9 & \\ \text{(d)} & 3^{2x+1} = 1 & \text{(e)} \quad \left(\frac{1}{2} \right)^{x-2} = 4 \\ \text{(f)} & 7^{2x+5} = 7^{\frac{x-1}{2}} & \\ \text{(g)} & 4^{\frac{3+x}{x-1}} = 2^{5x} & \text{(h)} \quad (2^{x+3})^{x-4} = 1 \\ \text{(i)} & \left(\frac{1}{5} \right)^{|x+4|} = 5^{2x} & \\ \text{(l)} & 3^{1-x} - 3^{2+x} = 1 & \text{(m)} \quad 2^{2-x} - 2^{3-x} + 2^x = 0 \\ \text{(n)} & 13^{2x} - 21 = 3^x & \\ \text{(o)} & 3^{3x} - 3^{2x+1} + 2 = 0 & \text{(p)} \quad e^{2x} + e^x - 2 = 0 \\ \text{(q)} & 5^{x+1} + 5^{x-1} = 2^x & \\ \text{(r)} & 3 \cdot 3^{2x} + 7^{2x+1} = 3^{2x+2} + 7^{2x} & \text{(s)} \quad e^{2x} + e^{\frac{7}{3}} = e^{2+x} + e^{\frac{3x+1}{3}} \\ \text{(t)} & e^{\frac{3x+8}{2}} - e^{\frac{x+2}{2}} + e^{x+3} = 1 & \\ \text{(u)} & 3^{x+1} = 5^{1-x} & \text{(v)} \quad 2^{2(2^x+1)} = (2^x + 1)^{2^{2^x}} \\ \text{(w)} & \begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 2^x 3^y = 18 \end{cases} & \\ \text{(z)} & \begin{cases} x^y = 81 \\ x^{3-y} = \frac{1}{3} \end{cases} & \end{array}$$

(7.10) Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x < \frac{1}{9} & \text{(b)} \quad 16^x \leq 64 & \text{(c)} \quad 3^x \geq 7 \\
\text{(d)} & 3^{x^2-3x} \geq 9^{x-2} & \text{(e)} \quad 5^{x^2-6x+5} \geq 7^{x^2-6x+5} & \text{(f)} \quad 3^{9x^2-1} \geq 2^{9x^2-1} \\
\text{(g)} & \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 9 & \text{(h)} \quad 2^{\frac{x^2-x}{x+1}} \leq 1 & \text{(i)} \quad \left|\frac{5^{2x}-1}{5^{2x}+1}\right| < 1 \\
\text{(l)} & \frac{5^{|x+2|}-5}{e^x-\sqrt{e}} \leq 0 & \text{(m)} \quad 2^{3x-1} + (2^{x-1})^3 \geq 5 \cdot 2^x & \text{(n)} \quad \sqrt{5-e^x} \leq e^x - 3 \\
\text{(o)} & \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} & \text{(p)} \quad |2^x - 1| < 2 & \text{(q)} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{1-5x} \geq 2 \\
\text{(r)} & 4^{2x+1} - \frac{7}{3} 9^x > 7 \cdot 3^{2x} + 16^{x-1} & \text{(s)} \quad e^{x+1} > x^{x+1} & \text{(t)} \quad \begin{cases} 3^{1-x} + 3^{1+x} > 6 \\ \left(\frac{1}{9}\right)^x - 8\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9 \end{cases} \\
\text{(u)} & 4^{\sqrt{x-1}} 2^x > 8 & &
\end{array}$$

(7.11) Verificare per quali valori della variabile sono valide le seguenti uguaglianze:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \log(x^2 - 9) = \log(x - 3) + \log(x + 3) \\
\text{(b)} & \log(9 + 6x + x^2) = 2 \log(x + 3) \\
\text{(c)} & \log x^2 = 2 \log |x| \\
\text{(d)} & \log x^2 = 2 \log x \\
\text{(e)} & \log x^2 = 2 \log(-x) \\
\text{(f)} & \log x^3 = 3 \log x \\
\text{(g)} & \log(3x - 1)^4 = 4 \log |3x - 1| \\
\text{(h)} & \log(3x - 1)^4 = 4 \log(3x - 1) \\
\text{(i)} & \log(x^3 + x^2 - 2x) = \log x + \log(x + 2) + \log(x - 1) \\
\text{(l)} & \log \sqrt{\frac{2x-1}{4x+1}} = \frac{1}{2} [\log(2x-1) - \log(4x+1)] \\
\text{(m)} & \log \sqrt[3]{\frac{5+x}{4+x}} = \frac{1}{3} [\log(5+x) - \log(4+x)]
\end{array}$$

(7.12) Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche

- (a) $2\log(x+4) = \log(2-x)$ (b) $\log\sqrt{x-3} = \frac{1}{2}\log(3x-4)$
- (c) $\log(x-5) + \log(x-7) + \log 3 = 0$ (d) $\log(3x-5) + \log(x-2) = \log 2$
- (e) $\frac{\log_{10} x + 1}{\log_{10} x - 1} - \frac{\log_{10} x + 3}{2 - 2\log_{10} x} = \frac{11}{2}$ (f) $\frac{\log x + 3}{\log x - 3} - \frac{\log x - 3}{\log x + 3} = \frac{5\log x}{\log^2 x - 9}$
- (g) $|\log_2 x + 3| = 5$ (h) $\sqrt{1 + \log_{\sqrt{2}} x} = 3$
- (i) $\log x = \log_{10} x$ (l) $\log(e^x + e) = 2$
- (m) $\log^2 x + 2\log|x| - 15 = 0$ (n) $\sqrt{\log x} = 1 - \log x$
- (o) $\log_{\frac{2}{5}} x = \log_x \frac{2}{5}$ (p) $\log|\log|\log x|| = 0$
- (q) $\log_2 \sqrt{1-x^2} = \log_4 |x|$ (r) $\log_2 \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{2x} = \log_{\frac{1}{2}} x$
- (s) $\log_2(4 - \log_{\frac{1}{2}}) = \log_{\frac{1}{4}} 16$ (t) $\log_2 |\log_{\frac{1}{2}} x| = 1$
- (u) $\begin{cases} x + y = 3 \\ \log_4 x + \log_4 y = \frac{1}{2} \end{cases}$ (v) $\begin{cases} \log_{10} y = 2\log_{10} x \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + y^2) = -1 \end{cases}$

(7.13) Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

- (a) $\log_4 x < \frac{1}{2}$ (b) $\log_{\frac{1}{2}} x < 4$ (c) $\log_{\frac{1}{10}} x > \frac{1}{2}$
- (d) $\frac{1}{2} < \log_3 x < 2$ (e) $-\frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{49}} x < \frac{1}{2}$ (f) $\log_3 |x+2| > -3$
- (g) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-5) > 2$ (h) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-5) < \log_{\frac{1}{4}}(2x-1)$ (i) $\log_2 \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{2x} > 1$
- (l) $3\log_2 x - \frac{12}{\log_2 x} < 5$ (m) $\log_2(4 - \log_{\frac{1}{2}} x) \leq \log_{\frac{1}{4}} 16$ (n) $\log_2 \frac{|x| - 1}{2 - |x+3|} \leq 2$
- (o) $\log_x(9 - 8x - x^2) > 0$ (p) $\log_x 2 < 3$ (q) $\log_4 x^2 - \log_8 \sqrt{x} < \frac{5}{3}$
- (r) $\log \frac{x+3}{x-3} \leq 1$ (s) $\frac{\log(x+3)}{\log(x-3)} \leq 1$ (t) $\log(x - \sqrt{x^2 - 1}) > 0$
- (u) $x^{\frac{1}{x}} > 1$ (v) $x^{4x-6} \geq x^{x^2-x}$
- (w) $\log_2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+4} \geq \log_4 \frac{(x+4)^2}{x^2-1}$ (z) $\log_2 \frac{x+1}{x-1} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$

(7.14) Provare che per ogni a, b si ha $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right)$

(7.15) Provare che per ogni a, b si ha $\frac{e^a + e^b}{2} \geq e^{\frac{a+b}{2}}$

(7.16) Trovare il campo di esistenza e il segno delle seguenti funzioni:

(a) $\log(x^2 - 2x + 1)$ (b) $\log|x^2 - 1|$ (c) $\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(d) $\log|\log x|$ (e) $\left(\frac{x-1}{x-3}\right)^{2x+5}$ (f) $\log|x - \sqrt{1-x^2}|$

(g) $\begin{cases} \log|x-1| & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{e^x+2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} \log|x+1| & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{e^x-2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(7.17) Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, deducendolo da quello di opportune funzioni elementari:

(a) $\log(x+2)$ (b) $\log_{\frac{1}{2}}|x-1|$ (c) $|\log x|$ (d) $\log|x|$ (e) $\log_{\frac{1}{2}}|x^2-1|$

(f) $\frac{1}{\log|x|}$ (g) $\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ (h) $e^{-|x|}$ (i) $e^{\frac{1}{\log|x|}}$ (l) $e^{\left|\frac{x}{x-1}\right|}$