

CAPITOLO 6: RADICI

(6.1) Utilizzando la proprietà $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$ (se n è pari, valida per $a \geq 0$), ridurre le radici allo stesso ordine minimo:

(a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}$ (b) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[10]{3}$.

(6.2) Indicare sotto quali condizioni le seguenti radici sono definite contemporaneamente e ridurle allo stesso ordine minimo:

(a) $\sqrt{a}, \sqrt[12]{a^5}, \sqrt[4]{a^3}$ (b) $\sqrt[3]{x-y}, \sqrt[3]{x+y}, \sqrt{x^2-y^2}$.

(6.3) Utilizzando la proprietà $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ (se n è pari, valida in quest aforma per $a, b \geq 0$, con il segno negativo a secondo membro per $a < 0, b \geq 0$), riscrivere le seguenti espressioni, eventualmente precisandone le condizioni di esistenza:

(a) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (b) $2\sqrt[3]{4}$ (c) $\frac{\sqrt[3]{2xy^2}}{x^2y}$
 (d) $(a^2 - b^2)\sqrt[4]{\frac{a+b}{a-b}}$ (e) $x\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ (f) $x\sqrt{\frac{y}{x^2}}$

(6.4) Utilizzando la proprietà $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ (se n è pari, valida in questa forma per $a, b \geq 0$, con il segno negativo al secondo membro per $a < 0, b \geq 0$), riscrivere le seguenti espressioni

(a) $\sqrt[3]{81a^5b^7}$ (b) $\sqrt{28\pi^3x^5}$ (c) $\sqrt[3]{x^3y}$ (d) $\sqrt{x^3y}$ (e) $\sqrt[5]{729xy^{13} - 243xy^{11}}$ (f) $\sqrt[4]{64(x+y)^5z^8}$

(6.5) Svolgere i seguenti prodotti, eventualmente dopo aver indicato sotto quali condizioni hanno senso le varie espressioni:

(a) $(5 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2})$ (b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$ (c) $2^{-\frac{1}{3}} 4^5 2^{\frac{2}{7}}$
 (d) $\sqrt{(1+a)\sqrt{a} + 2a(\sqrt{a} - 1)}$ (e) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3$ (f) $\sqrt{x^n \sqrt[3]{x^{2n+1}} \sqrt[5]{x^{n-1}}}$
 (g) $\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \right)^2$

(6.6) Se nel denominatore di una frazione vi sono delle radici, si parla di *razionalizzazione* quando questi radicali sono eliminati moltiplicando e dividendo la frazione per un'opportuna espressione.

Ad esempio, l'espressione $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ può essere razionalizzata moltiplicando e dividendo per $\sqrt{5}$, in modo da ottenere $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, mentre l'espressione $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ si razionalizza moltiplicando e dividendo per $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$.

(a) $\frac{5}{\sqrt{54}}$ (b) $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$ (c) $\frac{1 - \sqrt{\pi + 1}}{1 + \sqrt{\pi + 1}}$ (d) $\frac{a + b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$
 (e) $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$ (f) $\frac{2}{\sqrt[2]{5} - \sqrt[3]{3}}$ (g) $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$ (h) $\frac{1}{\sqrt[4]{3} - 1}$.

(6.7) Considerare il seguente ragionamento:

$$\sqrt{x^2 - 1} > x \implies x^2 - 1 > x^2 \implies -1 > 0$$

che è ovviamnte **falsa**; dunque l'equazione data non ammette soluzioni.

Questo risultato è **sbagliato**: ad esempio, $x = -1$ è una soluzione. Trovare l'errore e risolvere la disequazione in modo corretto.

(6.8) Considerare il seguente ragionamento:

$$\sqrt{(x^2 - 1)^2} = 1 \implies x - 1 = 1 \implies x = 2;$$

dunque $x = 2$ è l'unica soluzione dell'equazione data. che è ovviamente **falsa**; dunque l'equazione data non ammette soluzioni.

Questo risultato è **sbagliato**: ad esempio, $x = 0$ è una soluzione. Trovare l'errore e risolvere la disequazione in modo corretto.

6.9 Dire per quali valori di x le seguenti uguaglianze sono corrette:

$$(a) \quad \sqrt[4]{(x^2 - 7x + 10)^4} = (x - 2)(x - 5) \quad (b) \quad \sqrt{(x^2 - x)^2} = -x(x - 1)$$

$$(c) \quad \sqrt[3]{(x^2 + 4x + 3)^3} = (x + 3)(x + 1) \quad (d) \quad \sqrt[5]{(x^2 + x)^5} = |x(x + 1)|.$$

(6.10) Trovare il campo di esistenza delle funzioni al primo membro e stabilire in quale sottoinsieme vale l'eguaglianza scritta:

$$(a) \quad \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - x}\sqrt{1 + x} \quad (b) \quad \sqrt[4]{x(x - 5)} = \sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x - 5}$$

$$(c) \quad \sqrt[4]{x(x - 5)} = \sqrt[4]{|x|}\sqrt[4]{|x - 5|} \quad (d) \quad \sqrt{x^2(x + 1)} = x\sqrt{1 + x}$$

$$(e) \quad \sqrt{x^2(x + 1)} = |x|\sqrt{1 + x} \quad (f) \quad \sqrt[3]{(1 + x)^3} = |x + 1|$$

$$(g) \quad \sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{|x + 2|}\sqrt[3]{|x - 2|} \quad (h) \quad \sqrt{x^2 - x^4} = -x\sqrt{1 - x^2}$$

$$(i) \quad \sqrt{x^2 - x^4} = |x|\sqrt{1 - x^2} \quad (l) \quad \sqrt{(x - 1)^2(x + 1)^2} = (x - 1)(x + 1)$$

(6.11) Risolvere le seguenti equazioni:

$$(a) \quad 3x = 2\sqrt{3x - 1} \quad (b) \quad 5x - 1 = \sqrt{10x + 6} \quad (c) \quad \sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 2} = 5$$

$$(d) \quad \sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} = \sqrt{2x - 5} \quad (e) \quad 5x - 1 = \sqrt{|10x + 6|} \quad (f) \quad 3x = 2\sqrt{|3x - 1|}$$

$$(g) \quad \sqrt{4 - 3x} = -x - 7 \quad (h) \quad \sqrt{x + 2} = x + 3 \quad (i) \quad \sqrt{2x^4 + 1} = x^2 - 1$$

$$(l) \quad \sqrt[3]{x^3 - 4x} = x - 1 \quad (m) \quad \sqrt{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x - 1}} = 3 \quad (n) \quad \sqrt{x - x^2} = \sqrt{7 - 2x}$$

$$(o) \quad 4\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 2x + 1}} = \frac{3x}{x + 1} \quad (p) \quad \frac{2 - x}{\sqrt{x - 3}} = -2 \quad (q) \quad \sqrt{x + \sqrt{x - 1}} = \sqrt{3}$$

(6.12) Risolvere le seguenti disequazioni:

- (a) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} < 4$ (b) $x + 1 < \sqrt{2x - 5}$ (c) $\sqrt{3 - 2x} \leq x + 2$
 (d) $\sqrt{6x - x^2} < 3 - 2x$ (e) $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{2x + 1} \leq 0$ (f) $\sqrt[3]{x^3 - 1} < x + 3$
 (g) $\sqrt[3]{x^3 - 2x} \geq 1$ (h) $\sqrt{|x^2 - 1|} \geq x$ (i) $\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 3$
 (l) $\frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x} \geq 1$ (m) $\frac{3x - 1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 2}} \leq 0$ (n) $\frac{x - \sqrt[3]{x^3 - x + 1}}{\sqrt{x(x - 2)} - x + 3} \leq 0$
 (o) $\frac{3x + 5}{\sqrt{4x - 1} - 3} > 2$ (p) $\frac{3 - 4x - \sqrt{1 - x}}{4 - 2x - \sqrt{x + 3}} \leq 0$ (q) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 2} > \sqrt{x + 5}$
 (r) $\sqrt{\left|\frac{x + 2}{x - 1}\right|} > 1$ (s) $\sqrt{x + 3} > |x|$ (t) $\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 4}} < -1$
 (u) $-3\sqrt{x^2 - 1} < \sqrt{x + 4}$ (v) $\sqrt[3]{x - 2} \leq \sqrt{x}$

(6.13) Disegnare il grafico delle seguenti funzioni

- (a) $\sqrt{x - 1}$ (b) $\sqrt{1 - x}$ (c) $\sqrt{|x|}$ (d) $\sqrt{x^2 - 1}$
 (e) $\sqrt{|x^2 - 1|}$ (f) $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ (g) $\sqrt{(x - 3)(x - 2)}$ (h) $\sqrt[3]{|x|}$

(6.14) Risolvere le seguenti equazioni o disequazioni e darne un'interpretazione geometrica, riconducendole alla forma $f(x) = g(x)$ oppure $f(x) < g(x)$ (o analoghe), dove $f(x)$, $g(x)$ sono funzioni di cui si è in grado di tracciare il grafico con considerazioni elementari:

- (a) $3x = 2\sqrt{3x - 1}$ (b) $|x| - 5 < \sqrt{x^2 - 5}$ (c) $\frac{1}{x + 2} > -\sqrt{4 - x^2}$
 (d) $5x - 1 = \sqrt{10x + 6}$ (e) $x^2 \geq 4\sqrt{x^2 - 1}$ (f) $\sqrt{|x^2 - 1|} > x$
 (g) $x^2 = \sqrt{1 - x^2}$ (h) $|x - 5| < \sqrt{x^2 - 5}$

(6.15) Provare che per ogni $a, b > 0$ valgono le seguenti disequaglianze:

- (a) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| < \sqrt{a + b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (b) $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a + b}$.