

CAPITOLO 5: EQUAZIONI, DISEQUAZIONI E SISTEMI

(5.1) Data l'equazione $\frac{x+1}{x-1} = 2$, stabilire quali delle seguenti equazioni sono ad essa equivalenti:

- (a) $\frac{x+1}{x-1} + x = 2 + x$ (b) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$
(c) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x-3} = 2 + \frac{1}{x-3}$ (d) $\frac{x+1}{x-1}(x-1) = 2(x-1)$
(e) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = 4$ (f) $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x^2+1}$.

(5.2) Data una funzione $f(x)$, con $x \in A \subset \mathbb{R}$, stabilire sotto quali ipotesi le seguenti equazioni sono equivalenti a $f(x) = 0$:

- (a) $f(x) + x = x$ (b) $f(x) + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ (c) $(x-1)f(x) = 0$
(d) $\frac{f(x)}{1-x^2} = 0$ (e) $[f(x)]^2 = 0$ (f) $f(x^2) = 0$

(5.3) Data l'equazione $\frac{x+1}{x-1} < 2$, stabilire quali delle seguenti disequazioni sono ad essa equivalenti:

- (a) $\frac{x+1}{x-2} + 2 < 0$ (b) $\frac{1}{2} \frac{x+1}{x-2} < 0$ (c) $1 - \frac{x+1}{x-2} < -1$
(d) $\left[\frac{x+1}{x-2}\right]^2 < 4$ (e) $(x^2+1)\frac{x+1}{x-2} < 2(x^2+4)$ (f) $(x^2-1)\frac{x+1}{x-2} < 2(x^2-1)$.

(5.4) Date due funzioni $f(x)$, $g(x)$, con $x \in A \subset \mathbb{R}$, stabilire quali delle seguenti disequazioni sono equivalenti a $f(x) < g(x)$:

- (a) $f(x) + g(x) < 0$ (b) $f(x)g(x) < 0$ (c) $1 - f(x) < 1 - g(x)$
(d) $(x-1)f(x) < (x-1)g(x)$ (e) $(x^2+1)f(x) < (x^2+1)g(x)$ (f) $f(x)g(x) < [g(x)]^2$
(g) $[f(x)]^2 < [g(x)]^2 < 0$ (h) $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$

(5.5) Risolvere le seguenti equazioni e darne un'interpretazione geometrica:

- (a) $-x+1 = 2x+3$ (b) $\frac{x}{2} - 1 = -x+2$ (c) $2x-1 = 1-x$.

(5.6) Risolvere al variare dei parametri reali k , h :

- (a) $kx+1-h=0$ (b) $(k-1)x+h^2-1=0$ (c) $\frac{k^2-1}{k}x+h=0$.

(5.7) Risolvere le seguenti disequazioni e darne un'interpretazione geometrica:

- (a) $-x+1 \leq 2x+3$ (b) $\frac{x}{2} - 1 > -x+2$ (c) $2x-1 \geq 1-x$.

(5.8) Risolvere al variare dei parametri reali k , h :

(a) $kx \geq 1$ (b) $k(k-1)x \leq k$ (c) $kx + 1 \leq x + h$ (d) $(h^2 + k^2)x > hk$.

(5.9) Risolvere al variare dei parametri reali a, b, c, d la disequazione $ax + b < cx + d$.

(5.10) Risolvere le seguenti equazioni e darne un'interpretazione geometrica:

(a) $x^2 - 2x + 3 = 2x$ (b) $x^2 + x - 2 = -x^2 - x + 2$
(c) $x^2 + 4x - \frac{2}{3} = x^2 - 3x + 1$ (d) $2x^2 - 4x + 3 = -3x^2 + 12x - 13$.

(5.11) Risolvere al variare del parametro k :

(a) $kx^2 + x + 1 = 0$ (b) $x^2 + kx - k^2 = 0$ (c) $x^2 + kx - k = 0$ (d) $kx^2 + x + k = 0$.

(5.12) Risolvere le seguenti disequazioni:

(a) $x^2 + x + 1 < 0$ (b) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ (c) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$
(d) $4x^2 - 4x + 1 > 0$ (e) $-x^2 - 1 \geq 0$ (f) $-x^2 + x + 2 < 0$.

(5.13) Risolvere al variare del parametro reale k :

(a) $kx^2 + 1 \geq 0$ (b) $x^2 - 2kx + k^2 \leq 0$ (c) $x^2 + (1-k)x - k > 0$ (d) $x^2 - 3kx + 2k^2 < 0$.

(5.14) Risolvere:

(a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$ (b) $4x^4 - 37x^2 + 9 < 0$
(c) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$ (d) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 \geq 0$
(e) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (f) $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$
(g) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$ (h) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \leq 0$
(i) $x^7 - x \geq 0$ (l) $x^8 - 1 \geq 0$.

(5.15) Dopo aver tracciato i grafici delle funzioni

$2x + 1$ $x^2 - 1$ $x^2 - 3x + 2$ $\frac{x+1}{x-1}$

dedurre quello delle funzioni

(a) $|2x + 1|$ (b) $2|x| + 1$ (c) $|x^2 - 1|$
(d) $|x^2 - 3x + 2|$ (e) $x^2 - 3|x| + 2$ (f) $\frac{x+1}{x-1}$
(g) $\frac{x+1}{|x-1|}$ (h) $\left| \frac{x+1}{x-1} \right|$

(5.16) Tracciare i grafici delle funzioni

(a) $2|x - 1|$ (b) $|x^2 - x| + 1$ (c) $x^2 + |x - 1|$
(d) $\frac{1}{|x - 1|}$ (e) $\frac{1}{|x| - 1}$ (f) $\frac{1}{|x^2 - 1|}$

(5.17) Risolvere

(a) $|x + 1| = 2$ (b) $|x + 2|^2 = 0$ (c) $|x - 2| = -2$
(d) $|x + 1| - |x - 1| = 1$ (e) $|x^2 - 1| - |x| - |x - 1| = 0$ (f) $x^2 - |x| - 2 = 0$
(g) $|x^2 - 1| - |x^2 - 5| = 3$ (h) $4x^4 - 37x|x| + 9 = 0$ (i) $|x^2 - 1| = |x + 5|$
(l) $|x^2 - 1| = |x| + 2$ (m) $|x^2 - 1| = x + 2$ (n) $|2 - x| = |x - 1|$

(5.18) Risolvere

- (a) $x^2 - |x| - 2 < 0$ (b) $|x^2 - x| - 1 \geq 0$ (c) $x^2 - |x + 1| \leq 0$
(d) $|x - 1| > x^2 - 4$ (e) $|x + 1| \leq x^2 - 4$ (f) $|x - 1| \geq |2x - 1|$
(g) $|x^2 - 1| < |x - 2|$ (h) $|x + 1| > |2 - x|$ (i) $|x| \leq |x - k|$
(l) $x^2 \leq |x^2 - k|$ (m) $\frac{|x - 1|}{x + 2} \geq \frac{|x - 4|}{x - 2}$ (n) $|x^2 - x - 6| \geq |5x + 10|$

(5.19) Risolvere

- (a) $\frac{2x - 5}{6x + 1} \geq 3$ (b) $\frac{x - 4}{x - 1} > 2$ (c) $\frac{4x + 6}{3x + 1} \geq 0$
(d) $\frac{-2x + 3}{|x - 5|} \leq 1$ (e) $\frac{x^2 - 1}{x} < x$ (f) $\frac{3 - 2|x|}{x - 5} > -1$
(g) $\frac{2x + 3}{x^2 + 1} > 1$ (h) $\frac{3x^3 + 2x - 1}{x^2 - 1} \geq 3x$ (i) $\frac{(|x| - x)(x + 1)}{x - 1} \geq x$
(l) $\frac{1}{2x - 1} - 4 < \frac{1}{2x - 2}$ (m) $\frac{x}{x^2 - 16} > \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 24}$ (n) $\frac{x^4 - 5x^2 - 36}{x - 5} > 0$
(o) $1 + \frac{1}{x} > 0$ (p) $\frac{1}{x + 1} > \frac{x}{x^2 - 1}$ (q) $\frac{|x^2 - 4| + 3}{3x + 1} \geq 1$
(r) $x^2 + 1 - \frac{|x|}{|x| + 1} \geq 0$ (s) $\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{3x^2 + 5}{x^2 + x + 1} \geq 0$ (t) $\frac{kx - 1}{x + 1} \geq x - 1$
(u) $\frac{x + |x|}{2x} \leq 1$ (v) $\frac{x^2 - |x|}{2x} \geq x$ (w) $\frac{|x| - 2x}{x + 1} \leq |x|$
(z) $\frac{|x|}{x} + \frac{x}{|x|} \leq k$

(5.20) Provare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}.$$

(5.21) Provare che per ogni $a \geq 1$, per ogni $b \in [0, 1]$

$$(a + b) - ab \geq 1.$$

(5.22) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la disequazione

$$\frac{k|x| + 1}{|x| + 1} \geq \frac{1}{x^4 + 1}$$

è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(5.23) Risolvere i seguenti sistemi:

$$(a) \quad \begin{cases} 6x - 3 < 2x + 1 \\ 4x + 4 \leq x - 6 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} 3x + 1 > 2x - 3 \\ 4x - 6 \leq 3x - 10 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} \frac{x}{x-1} > 2 \\ \frac{x-1}{x-2} \geq 0 \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} 2|x-1| - 2 < 4|x| \\ 3x - 2 > x - 7 \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} -x^2 + 3x + 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$(f) \quad \begin{cases} \frac{x-1}{2x+1} \leq 2 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$(g) \quad \begin{cases} \frac{x(x+16)}{36} + \frac{x+1}{3} < \frac{x}{2} + 1 \\ \frac{x^2}{8} - \frac{4 - \frac{x^2}{4}}{3} + \frac{1}{12} > \frac{1 - \frac{3}{2}x^2}{12} + \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

$$(h) \quad \begin{cases} x^2 - 5x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \\ x + |x^2 - 1| \geq 1 \end{cases}$$

$$(i) \quad \begin{cases} 3x + 1 > x - 2 \\ 1 - x \leq x^2 + 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$(l) \quad \begin{cases} \frac{4x+6}{3x+1} \leq 1 \\ (x+1)(x-k) = 0 \end{cases}$$

$$(m) \quad \begin{cases} kx^2 + x + 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$(n) \quad \begin{cases} x^2 + x + k = 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases}$$

$$(o) \quad \begin{cases} x^2 - x - 1 \geq 0 \\ x \geq k \end{cases}$$

$$(p) \quad \begin{cases} kx \leq \frac{1}{k} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$(q) \quad \begin{cases} \frac{3x-1}{x+2} \leq 4 \\ x^2 + (1-k)x - k = 0 \end{cases}$$

$$(r) \quad \begin{cases} kx \geq 1 \\ x \geq k \end{cases}$$

(5.24) Tracciare il grafico di una funzione $f(x)$ tale che l'equazione $f(x) = k$

- non ha soluzioni qualunque sia il valore di k
- per qualche valore di k non ha soluzioni
- per ogni valore di k ha una e una sola soluzione
- per qualche valore di k ha almeno due soluzioni
- non ha soluzioni per $k = 0$, ma ne ha tre per $k = 3$
- per ogni valore di k ha due soluzioni
- ha almeno una soluzione se e solo se $k \in (0, 1)$
- per qualche valore di k ha infinite soluzioni
- ammette soluzioni solo per $k = 1$ e per $k = 0$.

(5.25) Risolvere i seguenti sistemi, facendo uso di tutti i metodi noti:

$$(a) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

(5.26) Studiare i seguenti sistemi, scegliendo uno dei metodi noti:

$$(a) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$
$$(d) \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - y = 0 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ x - 5y + 5z = 2 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$$