

CAPITOLO 4: POLINOMI

(4.1) Dati i polinomi $P(x)$, $Q(x)$, trovare la somma $P + Q$, la differenza $P - Q$, il prodotto PQ e la composizione $P \circ Q$:

(a) $P(x) = x^2 + 4x$, $Q(x) = x^3 + x$ (b) $P(x) = x^4 + 1$, $Q(x) = x - 1$.

(4.2) Trovare due polinomi di grado 3 la cui somma sia un polinomio:

(a) di grado 3 (b) di grado 2 (c) di grado 1 (d) di grado 0.

(4.3) Dire se nello sviluppo della potenza $(a^2b - 2c^2)^5$ compaiono termini della forma

(a) $a^4 b^2 c^6$ (b) $a^8 b^4 c^2$ (c) $a^2 b c^4$,
ed eventualmente con quale coefficiente.

stesso problema per la potenza $\left(\frac{a}{c} + cb^2\right)^4$ e i termini

(d) $\frac{a^3 b^2}{c^2}$ (e) $a c^3 b^6$ (f) $a^2 b^4$.

(4.4) Trovare quoziente e resto nella divisione di $P(x)$ per $Q(x)$:

(a)	$P(x) = x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 12x - 15$	$Q(x) = x^2 + 1$
(b)	$P(x) = x^3 - x^2 - 22x + 20$	$Q(x) = x^2 - 5x$
(c)	$P(x) = x^4 - x$	$Q(x) = x^2 - 2$
(d)	$P(x) = 2x^3 + 1$	$Q(x) = x^3 + x$
(e)	$P(x) = x^3 - ax + a^2$	$Q(x) = x - a$
(f)	$P(x) = x^4 + a^2x^2 + a^4$	$Q(x) = x^2 + a^2$

(4.5) Trovare per quali valori dei parametri i polinomi $P(x)$, $Q(x)$ coincidono:

(a)	$P(x) = (a + c)x^2 - (a - b + 2c)x + c$ $Q(x) = x + 1$
(b)	$P(x) = (a + b + c)x^3 + (-a + b + d)x^2 + (a + b - c)x + (-a + b - d)$ $Q(x) = x^3$
(c)	$P(x) = (a + c + d)x^4 + (-a + b - d + e)x^3 + (a - b + c - e)x^2 + (-a + b)x - b$ $Q(x) = x + 1$

Al lettore è richiesto di saper risolvere semplici sistemi lineari; su questo argomento può fare riferimento ai richiami proposti nel capitolo 5.

(4.6) Date le seguenti funzioni razionali, scomporle nella somma di un polinomio con una frazione razionale in cui il grado del polinomio al numeratore sia minore di quello del polinomio al denominatore:

(a) $\frac{x^4 + 1}{x^4 + x}$ (b) $\frac{x^4 + 2x^3}{x^4 + 2x + 4}$ (c) $\frac{x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x - 15}{x^2 + 1}$ (d) $\frac{x^3 - x^2 - 5x}{x - 5}$.

(4.7) Dire se i seguenti polinomi sono divisibili per $x - 2$, $x - \frac{1}{2}$, $x^2 - 4$:

(a) $2x^2 - 5x + 2$ (b) $x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 8$ (c) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$.

(4.8) Applicando il teorema di Ruffini, trovare il quoziente ed il resto della divisione di $P(x)$ per $x - c$:

(a)	$P(x) = x^3 + 3x + 1$	$c = 2$
(b)	$P(x) = 2x^5 - 2x^4 + x - 1$	$c = 1$
(c)	$P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$	$c = 1$
(d)	$P(x) = x^5 + 1$	$c = -1$
(e)	$P(x) = x^6 - 1$	$c = 1$
(f)	$P(x) = x^4 + a^2x^2 + a^4$	$c = a$
(g)	$P(x) = x^3 - a(b+1)x^2 + a^2bx$	$c = ab$
(h)	$P(x) = ax^3 + abx - b^3$	$c = \frac{b}{a}$

(4.9) Trovare (se esiste) un polinomio di grado 5 che abbia:

- (a) 5 radici reali (b) 4 radici reali (c) 3 radici reali (d) 2 radici reali (e) una radice reale.

In ogni caso si intende che le radici siano distinte (cioè con molteplicità 1) e che il polinomio non abbia altre radici reali oltre quelle indicate.

(4.10) Trovare (se esiste) un polinomio di grado 4 che abbia:

- (a) una radice reale doppia e una semplice
(b) 2 radici reali doppie
(c) 3 radici reali distinte
(d) nessuna radice reale.

In ogni caso si intende che il polinomio non abbia altre radici reali oltre a quelle richieste.

(4.11) Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili, precisando le radici reali e le loro molteplicità:

- | | |
|--|---|
| (a) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ | (b) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$ |
| (c) $6x^4 - 19x^3 + 22x^2 - 11x + 2$ | (d) $3x^2 + 6x + 3$ |
| (e) $x^4 - 3x^2 - 4$ | (f) $x^3 + 3x^2$ |
| (g) $x^8 - 17x^4 + 16$ | (h) $16x^4 - 81$ |
| (i) $x^6 - 1$ | (l) $x^4 - (a^2 - 1)x^2 - a^2$ |
| (m) $x^4 - (a + 3)x^3 + (3a + 1)x^2 - (a + 3)x + 3a$ | (n) $x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4$. |