

CAPITOLO 3: FUNZIONI

Per presentare l'argomento sin dall'inizio in una prospettiva più ampia, in alcuni esercizi compaiono funzioni che saranno introdotte in capitoli successivi a quello preso in esame (ad esempio le funzioni radici o quelle logaritmiche); è inoltre richiesta una certa abilità nella risoluzione di equazioni o disequazioni di vario tipo. Il lettore che ha già sufficiente familiarità con questi argomenti può affrontare gli esercizi in questa prima fase (eventualmente verificando le proprie conoscenze con le definizioni e le proprietà esposte nei vari capitoli) oppure riprenderli in un secondo momento. Quest'ultima possibilità è inevitabile per chi sull'argomento non ha ancora una sufficiente preparazione.

(3.1)

- (a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Provare che non esiste alcuna funzione $f(x)$ di cui A è il grafico, ma ne esistono due, l'unione dei cui grafici è A ; di queste funzioni indicare l'espressione, il dominio e l'immagine.
- (b) Lo stesso per gli insiemi $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$ e $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$.
- (c) Provare che C è grafico di una funzione $f(y)$: anche di questa indicare espressione, dominio e immagine.

(3.2) Trovare l'immagine B_k della funzione $f(x)$ definita sull'insieme A_k :

- (a) $f(x) = x^2$
 $A_1 = (0, 2), A_2 = (-2, 0), A_3 = (-2, 0) \cup (0, 2), A_4 = [-2, 2], A_5 = (-1, 2), A_6 = [-2, 1].$
- (b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 4 - 2x & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
 $A_1 = [0, 1), A_2 = [0, 1], A_3 = \{1\}, A_4 = [\frac{1}{2}, 2], A_5 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), A_6 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}].$
- (c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
 $A_1 = [-1, 2), A_2 = [-2, 2], A_3 = [-2, 0] \cup (1, 2), A_4 = (-\infty, \sqrt{2}), A_5 = [\sqrt{2}, +\infty),$
 $A_6 = \{x : |x| > 3\}.$
- (d) $f(x) = \frac{x-1}{x}$
 $A_1 = [1, 3], A_2 = (0, 1), A_3 = (-1, 0), A_4 = \mathbb{R} \setminus \{0\}, A_5 = (0, +\infty), A_6 = (-1, 0) \cup (0, 1).$

(3.3) Dati la funzione e alcuni sottoinsiemi B_k del suo codominio, trovare le immagini inverse, cioè gli insiemi A_k contenuti nel dominio tali che $f(A_k) = B_k$

- (a) $f(x) = x^2$
 $B_1 = (2, 9), B_2 = [0, 25], B_3 = (-\infty, 1), B_4 = [1, +\infty].$
- (b) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } -3 \leq x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{se } 1 < x \leq 4 \end{cases}$
 $B_1 = [0, 1], B_2 = [-1, 2], B_3 = [0, 17], B_4 = (-4, 3).$
- (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{1 - (x-3)^2} & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$
 $B_1 = [1, +\infty], B_2 = [\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty], B_3 = [-1, 1], B_4 = [0, 2].$

(3.4) Trovare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $\frac{x+1}{x^2-1}$ | (b) $\sqrt{(x-2)(x^2+2x+1)}$ | (c) $\frac{1}{\sqrt{ x^2-1 }}$ |
| (d) $\frac{1}{x^3+2}$ | (e) $\sqrt[3]{x^2-1}$ | (f) $\sqrt{\frac{4 x -x^2}{x^2}}$ |
| (g) $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$ | (h) $\sqrt{\left \frac{x-2}{x+3}\right }$ | (i) $\sqrt[3]{\frac{1}{e^x-1}}$ |
| (l) $\log(x^2-2x+1)$ | (m) $\log x^2-1 $ | (n) $\log(x+\sqrt{x^2-1})$ |
| (o) $\log^2 x$ | (p) $\log \log x$ | (q) $\log \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2$ |
| (r) $2 \log \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)$ | (s) $\log \log (x-\sqrt{x^2-1})$ | (t) $\left(\frac{x-1}{x-3}\right)^{2x+5}$ |
| (u) $\begin{cases} \log x-1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{e^x+2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ | (v) $\begin{cases} \log x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{e^x-2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ | |
| (w) $\log x-\sqrt{x^2-1} $ | (z) $\log x-\sqrt{1-x^2} $ | |

(3.5) Date le funzioni f e g , scrivere le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, precisamente il dominio

- | | | | |
|---|--|--|---------------------|
| (a) $f(x) = e^{3x},$ | $g(x) = x+5$ | (b) $f(x) = 2x-3,$ | $g(x) = \sqrt{x-1}$ |
| (c) $f(x) = x^2,$ | $g(x) = \sqrt{x}$ | (d) $f(x) = e^x,$ | $g(x) = \log x$ |
| (e) $f(x) = \log x,$ | $g(x) = -1$ | (f) $f(x) = x^2+3x-2,$ | $g(x) = \log(x-1)$ |
| (g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$ | $g(x) = \sin x$ | (h) $f(x) = x^3+1,$ | $g(x) = 2-x$ |
| (i) $f(x) = \sqrt[3]{3-x},$ | $g(x) = x+1$ | (l) $f(x) = \frac{1}{x},$ | $g(x) = x^2$ |
| (m) $f(x) = x ,$ | $g(x) = \log x$ | (n) $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = \sqrt{x}$ | |
| (o) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ 1-x & \text{se } x \geq 4 \end{cases},$ | $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases},$ | | |
| (p) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ 1-x & \text{se } x \geq 1 \end{cases},$ | $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ | | |

(3.6) Trovare le funzioni elementari che compongono le funzioni:

- | | | | |
|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------|--|
| (a) $\frac{3}{\log(x^2+x)}$ | (b) $\frac{1}{\sqrt{ x^2-1 }}$ | (c) $e^{\sqrt{ x^2-1 }}$ | (d) $\sin \left(\frac{1}{\log x^2}\right)$ |
|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------|--|

(3.7) Trovare due funzioni f, g tali che la funzione $g \circ f$ sia definita in

- | | | | |
|------------------|--------------------|---------------|--|
| (a) $\mathbb{R}$ | (b) $[0, +\infty)$ | (c) $[-1, 1]$ | (d) $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. |
|------------------|--------------------|---------------|--|

(3.8) Data $f(x) = 1+x$, trovare $g(x)$ tale che la funzione $g \circ f$ sia

- | | | | | |
|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|
| (a) $\cos x^2$ | (b) $e^{ x }$ | (c) 2^x | (d) x^2+2x+2 | (e) $1+x^4$. |
|----------------|---------------|-----------|----------------|---------------|

(3.9) Date due funzioni f e g definite nello stesso dominio I ed untrambi crescenti (decescenti).

- (a) provare che la funzione somma $f + g$ è crescente (decescente) in I .
- (b) provare che se la due funzioni sono anche positive, la funzione prodotto $f g$ è crescente (decescente).

Stabilire se le proprietà sul prodotto continua a valere se:

- (c) f e g sono negative
- (d) f e g hanno segno opposto.

(3.10) Dare un esempio di funzione non costante a tratti che nel suo dominio non sia né crescente né decrescente.

(3.11) Dare un esempio di funzione che sia crescente in A e in B , ma non in $A \cup B$.

(3.12)

- (a) Provare che se una funzione è crescente (decescente) in A , allora è anche iniettiva in A .
- (b) Provare che esistono funzioni iniettive in A che in A non sono né crescenti né decrescenti.

(3.13) Studiare crescita o decrescenza delle funzione $f \circ g$ nel caso in cui:

- (a) f e g sono crescenti
- (b) f e g sono decrescenti
- (c) f è sono crescenti, g decrescente
- (d) f è decrescente, g crescente.

(3.14) Trovare il campo di esistenza delle seguenti funzioni e stabilire gli intervalli in cui sono crescenti o decrescenti, a partire dai risultati sulle funzioni elementari e sulla composizioni crescenti o decrescenti:

- (a) $e^{\sqrt{x-1}}$
- (b) $\sqrt{x^2 - 2x}$
- (c) $\log \frac{1}{1+x^2}$
- (d) $\sin \frac{x}{1+x^2}$
- (e) $(\tan x)^2$
- (f) $(-x^2 + x + 2)^3$
- (g) $\sqrt[3]{x^2 + 2x - 1}$
- (h) $\sqrt{1 + \log_{10}|x|}$
- (i) $\cos \frac{1}{(x-1)^2 + \frac{2}{\pi}}$
- (l) $\frac{x-1}{x-2}$
- (m) $\frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}}$
- (n) $\log \left(\frac{3}{2} - \sqrt{1-x^2} \right)$

(3.15) Date due funzioni f e g definite in $\mathbb{R}$, si consideri la funzione composta $g \circ f$. Dimostrare che valgono le seguenti proprietà:

- (a) se f è pari, allora $g \circ f$
- (b) se f è dispari e g è pari, allora $g \circ f$
- (c) se f è dispari e g è dispari, allora $g \circ f$ è dispari
- (d) se f è periodica, allora $g \circ f$ è periodica.

(3.16) Date due funzioni f e g definite in $\mathbb{R}$, si consideri la funzione composta $g \circ f$. Dimostrare con un controesempio che le seguenti affermazioni sono **false**:

- (a) se g è pari, allora $g \circ f$ è pari
- (b) se g è periodica, allora $g \circ f$ è periodica
- (c) se f è periodica di periodo T , allora $g \circ f$ è periodica di periodo T .

(3.17) Trovare (se esiste) l'inversa della funzione data:

- (a) $2x + 4$
- (b) $x^2 + 3x - 2$
- (c) $x^2 + 3x - 2$, con $x \geq -\frac{3}{2}$
- (d) $x^2 + 3x - 2$, con $x \leq -\frac{3}{2}$
- (e) $\log(x-1)$
- (f) $\frac{x}{x-4}$
- (g) $\sqrt{2x-6}$
- (h) $\log \sqrt{x} - \log \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$
- (i) $10^{\sqrt[3]{x}}$
- (l) $2^{\frac{x-1}{x+1}}$
- (m) $\log x^2, x > 0$
- (n) $\sqrt{4-x^2}, -2 \leq x \leq 0$.

(3.18) Studiare il segno e gli zeri delle seguenti funzioni nel loro campo di esistenza:

- (a) $\frac{x-1}{1-2x}$ (b) $\frac{2-|x|}{1+|x|}$ (c) x^5-1 (d) $3x^4-1$
- (e) x^3-6x^2-2x+7 (f) $\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x}$ (g) $\sqrt[3]{1+x^3}-1-x$ (h) $\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-3x}$
- (i) $\log \frac{x-1}{x+2}$ (l) $\log(x-1)-\log(x+2)$ (m) $\log \log |x-1|$ (n) 4^x-2^x-6
- (o) $\sqrt{2-\log_2(1+x)}$ (p) $\log(x-\sqrt{x^2-2x})$ (q) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}$ (r) $\frac{1-|x^2-x|}{1-x^2}$.