

CAPITOLO 2: CENNI DI GEOMETRIA ANALITICA

Nota: nella maggior parte dei problemi che seguono è richiesto di saper risolvere equazioni o sistemi: per questo argomento rimandiamo al capitolo 5.

(2.1) Tracciare le rette di equazione:

(a) $x - 2y + 1 = 0$, (b) $2x - y + 2 = 0$, (c) $-2x + y + 1 = 0$, (d) $x + y - 1 = 0$.

(2.2) Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P e avente coefficiente angolare m assegnato:

(a) $P = (7, -3)$ $m = -1$ (b) $P = (0, 0)$ $m = -\frac{5}{2}$ (c) $P = (1, -2)$ $m = \frac{4}{3}$
(d) $P = (-2, \frac{1}{16})$ $m = \frac{1}{2}$ (e) $P = (\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$ $m = 0$ (f) $P = (-4, 0)$ $m = -\frac{3}{4}$

(2.3) Verificare se i seguenti punti sono allineati e, in caso affermativo, scrivere la retta che li unisce:

(a) $A = (2, 1)$ $B = (-6, -3)$ $C = (5, \frac{5}{2})$ (b) $A = (-2, 3)$ $B = (1, -1)$ $C = (2, -3)$
(c) $A = (-1, -3)$ $B = (0, -2)$ $C = (1, -1)$ (d) $A = (1, 0)$ $B = (1, 5)$ $C = (1, \frac{5}{2})$
(e) $A = (-1, -1)$ $B = (0, 1)$ $C = (1, 2)$

(2.4) Individuare se tra le seguenti rette ve ne sono di parallele:

$$x - 5y + 1 = 0 \quad 2x - 4y + 3 = 0 \quad x - 2y = 0 \quad \frac{3}{4}x - 2y = 5 \quad y = \frac{8}{3}x - 6 \quad \frac{1}{5}x - y + 2 = 0$$

(2.5)

Individuare se tra le seguenti rette ve ne sono di perpendicolari:

$$x - y + 1 = 0 \quad x + y - 3 = 0 \quad 3x + y = 2 \quad 6x - 2y - 7 = 0 \quad 3x - y + 5 = 0 \quad x + 3y - 1 = 0$$

(2.6) Scrivere l'equazione della retta:

- (a) passante per $P = (1, 0)$ e parallela a quella di equazione $x - 2y + 1 = 0$
(b) che interseca l'asse y nel punto $(0, \frac{3}{4})$ ed è perpendicolare a quella di equazione $y = \frac{1}{2}x - 3$
(c) passante per $P = (-4, 3)$ e parallela a quella passante per i punti $A = (2, 0)$ e $B = (-1, 1)$
(d) passante per $P = (3, -2)$ e perpendicolare a quella di equazione $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$
(e) passante per $P = (3, -5)$ e perpendicolare alla bisettrice del primo e del terzo quadrante
(f) passante per $P = (1, -\frac{2}{5})$ e formante un angolo di 135° con la direzione positiva dell'asse delle x .

(2.7) Trovare il valore del parametro k in modo che

- (a) le rette di equazioni $x - 3y + 2 = 0$, $2x + ky - 1 = 0$ siano parallele
(b) le rette di equazioni $\sqrt{2}x - 3y = 0$, $kx + y - 1 = 0$ siano perpendicolari.

(2.8) Dati i punti $A = (5, -2)$, $B = (-1, -2)$, $C = (4, 1)$:

- (a) descrivere il triangolo da essi individuato servendosi di un sistema di disequazioni
(b) determinare l'equazione dell'altezza relativa alla base AB e la sua lunghezza
(c) provare che le altezze si intersecano in un punto di cui si chiedono le coordinate
(d) trovare la lunghezza del perimetro del triangolo
(e) trovare l'area del triangolo
(f) verificare che il segmento che unisce i punti medi dei due lati AB e AC è parallelo al lato BC e che la sua lunghezza è metà di quella del lato BC .

(2.9) Un rettangolo ha due vertici opposti nei punti $P = (5, 3)$ e $Q = (0, -2)$ e la retta di uno dei lati uscenti da P ha equazione $y = 2x - 7$. Scrivere le equazioni delle altre rette dei lati del rettangolo e indicare gli altri vertici.

(2.10) Stabilire la posizione reciproca delle seguenti coppie di rette e, nel caso di rette incidenti, trovare le coordinate del punto di intersezione:

- | | | | |
|----------------------------|-------------------|--------------------------------------|------------------------|
| (a) $3x - 1 = 0$ | $5 + 2x = 0$ | (e) $5x - 3y - 4 = 0$ | $5x - y - 2 = 0$ |
| (b) $2x - 7 = 0$ | $y + 3 = 0$ | (f) $4x - 3y - 2 = 0$ | $3x + 4y - 1 = 0$ |
| (c) $x - y + 2 = 0$ | $y = 3x + 1$ | (g) $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ | $y = 2x + \frac{7}{2}$ |
| (d) $y = \frac{2}{3}x - 1$ | $4x - 6y - 6 = 0$ | (h) $5x - 7y + 11 = 0$ | $15x - 21y + 10 = 0$ |

(2.11) Data la retta di equazione $2x - 5y + 1 = 0$, scrivere l'equazione di una retta

- (a) ad essa parallela (b) ad essa incidente (c) ad essa perpendicolare

(2.12) Un triangolo isoscele ha per base il segmento AB di estremi $A = (1, 3)$ e $B = (-3, 5)$, mentre il suo vertice si trova sull'asse x . Calcolare le coordinate di C e l'area del triangolo.

(2.13) Un trapezio $ABCD$, rettangolo in A e di base maggiore AB , ha tre vertici nei punti $A = (0, 2)$, $B = (8, 4)$, $C = (2, 7)$; calcolare le coordinate del quarto vertice.

(2.14) Un triangolo isoscele ha vertice in $A = (3, 2)$; il punto medio M della base BC ha coordinate $(-3, 0)$ e la retta del lato AB passa per $P = (-1, 4)$. Calcolare perimetro e area del triangolo.

(2.15) Determinare un punto P sulla retta di equazione $y = -\frac{1}{3}x + 2$ in modo che, tracciata per P la retta di coefficiente angolare 2, il triangolo che le due rette formano con l'asse delle y abbia area $\frac{21}{2}$.

(2.16) Calcolare la distanza del punto P dalla retta r

- | | | | |
|------------------|----------------------|----------------------------|----------------------------|
| (a) $P = (4, 0)$ | $r : x - 2y + 6 = 0$ | (c) $P = (5, \frac{3}{2})$ | $r : 3x + 4y + 4 = 0$ |
| (b) $P = (1, 0)$ | $r : x + y - 1 = 0$ | (d) $P = (6, -2)$ | $r : y = \frac{3}{2}x + 2$ |

(2.17) Date due rette parallele, la distanza di un qualunque punto della prima dalla seconda si mantiene costante; questo misura la distanza tra le due rette. Trovare questa distanza per le seguenti coppie di rette:

- (a) $y = 2x$, $2x - y + 6 = 0$ (b) $2x + y + 4 = 0$, $4x + 2y - 7 = 0$.

Stabilire il risultato nel caso generale per le rette $ax + by + c = 0$, $ax + by + c' = 0$.

(2.18) Dire quali delle seguenti equazioni individua un fascio di rette proprio (cioè le rette passano tutte per uno stesso punto) o improprio (cioè le rette sono tra loro parallele):

- | | | |
|------------------|-----------------------|--------------------------|
| (a) $y - 2x = k$ | (c) $y = -3x + k + 1$ | (e) $y - 2 = k(x + 1)$ |
| (b) $y = kx + 2$ | (d) $2y - k + 3 = 0$ | (f) $2ky + 1 = 2(k - x)$ |

(2.19) Scrivere l'equazione del fascio di rette

- (a) parallele alla retta di equazione $y - 2x + 6 = 0$
 (b) passanti per $P = (-3, -1)$

(2.20) Date due rette di equazioni $ax + by + c = 0$ $a'x + b'y + c' = 0$, il fascio da esse generato ha equazioni $s(ax + by + c) + t(a'x + b'y + c') = 0$, dove s e t sono parametri non contemporaneamente nulli. Posto $k = \frac{t}{s}$, possiamo riscrivere l'equazione nella forma $(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0$, che non è equivalente alla precedente, perché nel passaggio dalla prima alla seconda dobbiamo supporre $s \neq 0$ (in questo modo si perde l'equazione $a'x + b'y + c' = 0$). Il fascio di rette di partenza sono incidenti, improprio altrimenti.

Scrivere l'equazione del fascio generato dalle rette di equazione $x - y - 2 = 0$, $x - 3y - 1 = 0$. Tra le rette di questo fascio trovare quella che passa per $A = (-1, 1)$.

(2.21) Trovare il centro del fascio proprio (cioè il punto per cui passano tutte le rette) e la direzione di quelli impropri

- (a) $2x - 3y + 5k - 1 = 0$ (c) $3x - 2y + k(6x - 4y - 1) = 0$
 (b) $2kx - y + 3 + 2k = 0$ (d) $(2 + 3k)x + (1 - 2k)y + 4 + 6k = 0$

(2.22) Dato il fascio di equazione $(2 + k)x + (3k - 1)y + 7 = 0$, determinare:

- (a) le caratteristiche del fascio e le sue generatrici
 (b) la retta passante per $P = (1, 4)$ e quella passante per l'origine
 (c) la retta che dista 1 dall'origine.

(2.23) Scrivere l'equazioni del fascio generato dalle rette di equazione $3x - y = 0$ e $5x + 9y = 0$; successivamente determinare:

- (a) la retta del fascio per $P = (7, -2)$
 (b) la retta perpendicolare a quella passante per i punti $A = (0, 3)$ e $B = (4, 4)$
 (c) l'area del triangolo ABC , essendo C il centro del fascio.

(2.24) Dati due punti distinti A e B , l'asse del segmento AB può essere caratterizzato in due modi equivalenti

- come la retta perpendicolare ad AB passante per il punto medio del segmento
- come l'insieme dei punti equidistanti da A e B .

Usando prima l'una e poi l'altra caratterizzazione, trovare l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A = (1, 0)$, $B = (2, 2)$. Ripetere i calcoli per il caso generale $A = (a, b)$, $B = (a', b')$.

(2.25) Due rette r, s incidenti in un punto P individuano quattro angoli a due a due uguali e opposti al vertice. Le bisettrici sono due rette passanti per P , caratterizzato dall'essere l'insieme dei punti equidistanti dalle due rette date. Trovare le bisettrici nel caso

- (a) $r: 3x - 4y + 1 = 0$ $s: 12x + 5y - 1 = 0$ (b) $r: y = x + 4$ $s: y = -\frac{1}{7}x + \frac{3}{7}$

(2.26) Dato il triangolo di vertici $O = (0, 0)$, $A = (4, 0)$, $B = (1, 2)$, trovare il punto di incontro dalle bisettrici, quello delle altezze, quello degli assi, quello delle mediane.

(2.27) Trovare al variare del parametro k la posizione reciproca delle rette di equazione

$$x + ky + 2 - k = 0 \quad 2x + (k - 2)y + 5 = 0$$

(2.28) Un triangolo isoscele ABC ha la base AB i cui estremi sono $A = (1, 1)$ e $B = (7, 5)$. Trovare le coordinate del terzo vertice, in modo che l'area sia 26.

(2.29) Verificare se le seguenti equazioni rappresentano una circonferenza; in caso affermativo, determinare centro e raggio:

- (a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (c) $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$
 (d) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$ (e) $3x^2 + 3y^2 + x + y + 3 = 0$

(2.30) Verificare per quali valori del parametro reale k le seguenti equazioni rappresentano una circonferenza; di queste determinare centro e raggio:

- (a) $x^2 + y^2 - 2x + 3y + k = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + k = 0$ (c) $x^2 + y^2 + kx + 3ky - 2 = 0$.

(2.31) Stabilire la posizione dei seguenti punti rispetto alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ (si ricordi che un punto è esterno ad una circonferenza se la sua distanza dal centro è maggiore del raggio, interno se è minore, appartenente se è uguale):

- (a) $(0, 0)$ (b) $(3, 2)$ (c) $(1, 5)$ (d) $(-3, 0)$ (e) $(1, 1)$ (f) $(\sqrt{5}, 4)$.

(2.32) Stabilire per quali valori di k l'equazione $x^2 + y^2 + 2kx - 3(1+k)y + 2k - 1 = 0$ rappresenta una circonferenza e in quale caso questa circonferenza:

- (a) passa per il punto $A = (2, -1)$
- (b) ha raggio uguale a 2
- (c) ha centro di ascissa $\frac{1}{2}$
- (d) ha centro sull'asse delle ordinate
- (e) è tangente alla retta $y = x$
- (f) è tangente esternamente alla circonferenza $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$
- (g) è tangente internamente alla circonferenza $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

(2.33) Scrivere l'equazione della circonferenza che soddisfa le seguenti condizioni:

- (a) ha centro in $C = (2, 0)$ e passa per $P = (0, 2)$
- (b) ha per diametro il segmento di estremi $A = (-2, 4)$, $B = (0, 2)$
- (c) passa per i punti $A = (-1, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (-7, 7)$
- (d) ha centro sulla retta $y = x + 1$ e passa per i punti $A = (3, 2)$, $B = (1, 0)$.

(2.34) Stabilire se la retta r è esterna, secante o tangente alla circonferenza γ : nel caso di una retta secante o tangente trovare i punti di intersezione:

- (a) $r : y = x + 3$ $\gamma : x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$
- (b) $r : x + y = 0$ $\gamma : x^2 + y^2 + 6x + 6y = 0$
- (c) $r : x + 3y - 3 = 0$ $\gamma : x^2 + y^2 + 12x + 32 = 0$
- (d) $r : y = x + 3$ $\gamma : x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$

(2.35) Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P tangente alla circonferenza γ :

- (a) $P = (2, 2)$ $\gamma : x^2 + y^2 + 2x - 2y = 8$
- (b) $P = (1, 0)$ $\gamma : x^2 + y^2 - 8x - 2y = -12$
- (c) $P = (-2, 1)$ $\gamma : x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$

(2.36) Scrivere l'equazione della circonferenza tangente alle rette di equazione:

$$y = 1, \quad 3x - 4y = 0 \quad 3x + 4y + 32 = 0$$

(2.37) Scrivere le equazioni delle circonferenze tangenti alle rette $y = x$, $y = x + 8$ e passanti per $P = (0, 4)$.

(2.38) Calcolare la lunghezza della corda intercettata dalla circonferenza $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$ sulla retta $x - 3y + 2 = 0$.

(2.39) Trovare i vertici e fuochi delle seguenti ellissi:

$$(a) \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (b) 4x^2 + 9y^2 = 36 \quad (c) \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{81} = 1$$

(2.40) Trovare per quali valori di k le seguenti equazioni rappresentano un'ellisse, stabilire la posizione dei fuochi e precisare in quali casi si ottengono delle circonferenze:

$$(a) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{k^2 - 1} = 1 \quad (c) \frac{x^2}{3k + 1} + \frac{y^2}{k^2 + 3} = 1$$

(2.41) Scrivere l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine e tale che:

- (a) ha due vertici in $P = (3, 0)$ e $Q = (0, 1)$

- (b) ha semiassi di lunghezza 5 e 3
- (c) ha un fuoco in $F = (0, 1)$ e un vertice in $V = (0, 2)$
- (d) passa per $A = (4, 1)$ e $B = (2, 2)$
- (e) passa per $A = (1, 2)$ ed ha vertice in $V = (0, 3)$

(2.42) Scrivere le equazioni delle rette tangenti all'ellisse γ uscente dal punto P :

- (a) $\gamma: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ $P = (0, 4)$
- (b) $\gamma: 4x^2 + 3y^2 = 1$ $P = (-\frac{3}{2}, 1)$
- (c) $\gamma: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ $P = (-3, 1)$

(2.43) Scrivere l'equazione dell'ellisse tale che:

- (a) ha centro in $(-4, 6)$, i fuochi su una parallela all'asse x , i semiassi di lunghezza 5 e 3
- (b) ha i fuochi in $(-10, 2)$ e $(-2, 2)$ e il semiasse maggiore uguale a 8.

(2.44) Scrivere i vertici, i fuochi e gli asintoti delle seguenti iperboli

- (a) $4x^2 - y^2 = 1$ (d) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ (g) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 3$
- (b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1$ (e) $y^2 - x^2 = 1$ (h) $4x^2 - 5y^2 = 20$
- (c) $2x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (f) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ (i) $xy = 1$

(2.45) Scrivere l'equazione dell'iperbole che ha un vertice in A e un fuoco in F :

- (a) $A = (2, 0)$ $F = (3, 0)$ (b) $A = (-2, 0)$ $F = (\frac{5}{2}, 0)$ (c) $A = (0, 1)$ $F = (0, 2)$

(2.46) Scrivere l'equazione dell'iperbole con centro in $O = (0, 0)$ tale che:

- (a) ha un vertice in $V = (-2, 0)$ e passa per $P = (-3, 2)$
- (b) ha i fuochi sull'asse y e passa per $P = (-3, 2)$ e $Q = (-2, 1)$
- (c) è equilatera ed ha un fuoco in $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
- (d) ha per asintoti le rette $y = \pm 2x$ e passa per $P = (\frac{\sqrt{5}}{2}, 3)$.

(2.47) Scrivere le equazioni delle rette tangenti all'iperbole γ uscenti da P

- (a) $\gamma: 8x^2 - y^2 = 1$ $P = (\frac{1}{2}, -1)$
- (b) $\gamma: y^2 - 8x^2 = 2$ $P = (0, 1)$
- (c) $\gamma: xy = 3$ $P = (-3, 1)$

(2.48) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = -\sqrt{16 + x^2}$ nel punto in cui questa interseca la retta $x - y = 2$.

(2.49) Disegnare le curve individuate dalle seguenti equazioni:

- (a) $y = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}$ (e) $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ (i) $\frac{x|x|}{4} + \frac{y|y|}{16} = 1$
- (b) $y = -\sqrt{1 + 4x^2}$ (f) $y = -2\sqrt{1 - x^2}$ (l) $y^2 = x^2 - 2|x| + 1$
- (c) $x = \sqrt{1 + 9y^2}$ (g) $|xy| = 1$ (m) $x^2 - 2|x| + y^2 - 2y = -1$
- (d) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ (h) $x|x| + y^2 = 1$ (n) $|xy| = 1$

(2.50) Trovare l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti tale che:

- (a) passa per $P = (1, 2)$
- (b) ha vertice in $(2, 2)$
- (c) è tangente alla retta di equazione $x - 2y + 1 = 0$
- (d) stacca sulla retta $2x + y - 8 = 0$ una corda di lunghezza $2\sqrt{10}$.

(2.51) Disegnare l'iperbole equilatera traslata e indicarne vertici, fuochi e asintoti:

$$(a) \quad y = \frac{2x-1}{1-x} \qquad (b) \quad y = \frac{1-x}{1+2x}$$

(2.52) Studiare al variare di k le seguenti iperboli equilatera traslate, trovandone centro e asintoti; precisare per quali valori degenerano in una retta:

$$(a) \quad y = \frac{kx+1}{(k-6)x+(k-4)} \qquad (b) \quad y = \frac{kx-3}{(3-k)x+2}$$

(2.53) Trovare l'equazione dell'iperbole equilatera traslata, tale che

- (a) ha centro in $C = (1, -3)$ e passa per $P = (-1, -1)$
- (b) ha come asintoti le rette $x = -8$, $y = -5$ e passa per $P = (4, -\frac{7}{6})$
- (c) ha come asintoto la retta $y = \frac{1}{2}$ e passa per i punti $P = (0, -7)$, $Q = (\frac{1}{2}, 8)$.
- (d) passa per i punti $O = (0, 0)$, $P = (-1, -\frac{1}{2})$, $Q = (4, 12)$
- (e) passa per il punto $P = (-\frac{1}{3}, -4)$ ed è tangente alla retta $y = 4x - 2$ nel punto $P = (0, -2)$.

(2.54) Scrivere l'equazione della parabola avente vertice in $O = (0, 0)$ e fuoco in $F = (0, -\frac{1}{2})$.

(2.55) Data la parabola di equazione $y = \frac{x^2}{4}$, trovare le coordinate del suo fuoco e l'equazione della sua direttrice.

(2.56) Trovare vertice, fuoco e direttrice della parabola di equazione $y = -2x^2 + 4x - 3$ e disegnarla.

(2.57) Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y , che verifica le seguenti condizioni:

- (a) passa per i punti $A = (0, -6)$, $B = (2, -4)$, $C = (1, -6)$
- (b) ha vertice in $V = (0, -1)$ e passa per $P = (1, 2)$
- (c) ha vertice in $V = (1, 3)$ e fuoco in $F = (1, \frac{5}{2})$
- (d) ha vertice in $V = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ e direttrice $y = -\frac{5}{8}$.

(2.58) Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x , che verifica le seguenti condizioni:

- (a) ha vertice in $V = (3, -1)$ e fuoco in $F = (2, 0)$
- (b) ha vertice in $V = (1, -2)$ e fuoco in $F = (\frac{3}{2}, -2)$
- (c) ha vertice in $V = (4, 2)$ e direttrice $x = \frac{17}{4}$.

(2.59) Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y , che verifica le seguenti condizioni:

- (a) passa per $A = (0, 3)$, $B = (3, 0)$ ed ha vertice sulla retta di equazione $y = 5 - x$
- (b) ha come asse la retta $x = -1$ e passa per $A = (0, 2)$ e $B = (-3, 5)$
- (c) ha come fuoco in $F = (2, \frac{3}{4})$ e passa per $A = (3, 0)$
- (d) ha fuoco in $F = (0, \frac{7}{6})$ e vertice di ordinata 1.

(2.60) Determinare la posizione reciproca della parabola γ e della retta r :

$$\begin{array}{ll} (a) \quad \gamma: y + \frac{x^2}{2} - x - 2 & r: y = -\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \\ (b) \quad \gamma: y = -2x^2 + 3x + 1 & r: y = 7 - x \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (c) \quad \gamma: y = \frac{x^2}{3} - x + 2 & r: x - 3y + 2 = 0 \\ (d) \quad \gamma: x = -y^2 - 8y - 11 & r: x - 2y - 14 = 0. \end{array}$$

(2.61) Trovare le rette tangenti alla parabola γ condotte dal punto P e le coordinate dei punti di tangenza:

- (a) $\gamma: y = x^2 + 2x + 2$ $P = (-\frac{3}{2}, -1)$
- (b) $\gamma: y = -x^2 + 2x + 4$ $P = (\frac{1}{2}, 7)$
- (c) $\gamma: y = -x^2 + 5x + 1$ $P = (0, 1)$.

(2.62) Determinare l'equazione di una retta parallela all'asse x , in modo che la corda staccata su di essa dalla parabola di equazione $y = \frac{1}{3}(-x^2 - 2x + 8)$ sia lunga 2.

(2.63) Dopo aver trovato l'equazione della parabola avente fuoco in $F = (3, 4)$ e direttrice $y = 6$, calcolare la lunghezza del lato del quadrato inscritto nel segmento parabolico delimitato dall'asse x , avente un lato su tale asse.

(2.64) Trovare due numeri tali che la somma sia 60 e il loro prodotto sia massimo

(2.65)

(a) Nell'equazione $y = kx^2 - 4x + 5$ determinare il valore del parametro k in modo che la funzione corrispondente assuma valore minimo per $x = 4$.

(b) Nell'equazione $y = -2x^2 + 3kx + 1$ determinare il valore del parametro k in modo che la funzione corrispondente assuma valore massimo per $x = 6$.

(2.66) Trovare l'equazione della parabola che ha per asse la retta $x = 2$, passa per l'origine ed ha vertice sulla retta di equazione $x + 2y = 14$. detta A l'ulteriore intersezione della parabola con l'asse delle x , trovare il punto della parabola di ordinata positiva tale che l'area del triangolo OPA sia 9.

(2.67) Trovare la retta parallela all'asse delle y che intercetta corde uguali sulle due parabole

$$x = 2y^2 - 4y - 1 \qquad x = \frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{4}y + \frac{27}{16}.$$

(2.68) Scrivere l'equazione della retta che è tangente contemporaneamente alle parabole di equazione

$$y = \frac{1}{4}x^2 \qquad y = x^2 - 2x - 2.$$

(2.69) Provare che due punti $P = (a, b)$, $P' = (a', b')$ sono simmetrici rispetto alla retta $y = mx$ se

$$a' = \frac{(1 - m^2)a + 2mb}{1 + m^2} \qquad b' = \frac{2ma + (m^2 - 1)b}{1 + m^2}.$$

Più in generale, che i punti sono simmetrici rispetto alla retta $y = mx + p$ se:

$$a' = \frac{(1 - m^2)a + 2mb - 2mp}{1 + m^2} \qquad b' = \frac{2ma + (m^2 - 1)b + 2p}{1 + m^2}.$$

(2.70) Determinare le curve simmetriche rispetto all'asse x delle seguenti curve:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x^3 - 2y^2 = 0 & \text{(c)} \quad y = 3x^2 \qquad \text{(e)} \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \\ \text{(b)} & x + y - 1 = 0 & \text{(d)} \quad 4y^2 - x - 1 = 0 \end{array}$$

(2.71) Lo stesso per le seguenti curve rispetto all'asse y :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & 3x - 2y + 1 = 0 & \text{(c)} \quad x^2 + y^2 - x - y = 0 \qquad \text{(e)} \quad 4x^2 + y^2 = 25 \\ \text{(b)} & x - 5y^2 = 0 & \text{(d)} \quad x^3 - y = 0 \qquad \text{(f)} \quad x^3 - y^2 = 0 \end{array}$$

(2.72) Lo stesso per le seguenti curve per la simmetria rispetto all'origine:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & 3x + 2y + 4 = 0 & \text{(c)} \quad x^2 + y^2 + x + y = 7 \qquad \text{(e)} \quad xy = 1 \\ \text{(b)} & 4x^2 - y^2 + 6 = 0 & \text{(d)} \quad x - 3y^2 = 0 \end{array}$$

(2.73) Lo stesso per le seguenti curve per la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante:

- (a) $x + y = 0$ (c) $x^2 + y^2 = 1$ (e) $x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 0$
 (b) $4x^2 - y = 0$ (d) $x - y^3 = 0$ (f) $y^2 = x$

(2.74) Trovare l'eventuale centro di simmetria delle seguenti curve:

- (a) $4x^2 - y^2 = 4$ (c) $x^2 + 9y^2 + 2x + 18y + 9 = 0$ (e) $3x^2 + y^2 + 2y = 0$
 (b) $4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0$ (d) $xy - 2y - 4 = 0$

(2.75) Trovare la curva simmetrica di quella data rispetto al punto P_0 :

- (a) $2x + 1 = 0$ $P_0 = (3, 1)$ (d) $x^2 + y^2 = 1$ $P_0 = (1, 1)$
 (b) $x + y = 4$ $P_0 = (1, 2)$ (e) $4x^2 - y^2 = 1$ $P_0 = (0, -3)$
 (c) $4x^2 - y = 0$ $P_0 = (1, 0)$