

CAPITOLO 1: CENNI DI LOGICA E TEORIA DEGLI INSIEMI

(1.1) Dati gli insiemi $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, stabilire se sono vere le seguenti affermazioni:

- | | | |
|-----------------------------|---|---|
| (a) $a \in A$ | (b) $a \subset A$ | (c) $\{a\} \in A$ |
| (d) $\{a\} \subset A$ | (e) $A \in B$ | (f) $A \subset B$ |
| (g) $B \not\subset A$ | (h) $A \in \{A, B\}$ | (i) $A \setminus B = \emptyset$ |
| (l) $A \setminus B = \{c\}$ | (m) $A \setminus B = c$ | (n) $A \cap B = A$ |
| (o) $A \cup B = B$ | (p) $A \cap B = \{a, c, b\}$ | (q) $(a, c) \in A \times B$ |
| (r) $(a, c) \in B \times A$ | (s) $\forall x, x \in A \implies x \in B$ | (t) $\forall x, x \in A \implies x \in B$ |

(1.2) Dato un insieme A , si dice potenza o insieme delle parti di A , e si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A (compresi $\emptyset$ e A). Ad esempio:

se $A = \{a\}$, allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$, mentre se $A = \{a, b\}$ allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$.

(a) Descrivere $\mathcal{P}(A)$ se $A = \{a, b, c\}$.

(b) Se $A = \{a, b\}$, dire quali delle seguenti scritture sono corrette:

- (b₁) $a \in \mathcal{P}(A)$ (b₂) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ (b₃) $\{a\} \subset \mathcal{P}(A)$
 (b₄) $A \in \mathcal{P}(A)$ (b₅) $A \subset \mathcal{P}(A)$ (b₆) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$

(c) Provare per induzione che se A possiede n elementi, $\mathcal{P}(A)$ ne possiede 2^n .

(1.3) Trovare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ per i seguenti insiemi:

- (a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -3 < x < 3\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 5\}$
 (b) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -5 \leq x \leq 5\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} : 2 \leq x \leq 7\}$
 (c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$
 (d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x > -2 \text{ e } x < 2\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \text{ o } x < -1\}$

(1.4) Ricordiamo che se A è una proposizione vera, allora $A \implies B$ (A implica B) se anche B lo è; in questo caso si dice che A è una *condizione sufficiente per B* (nel senso che basta che sia vera A per essere sicuri che lo è anche B) o anche che B è una *condizione necessaria per A* (nel senso che perché A sia vera deve esserlo preliminarmente B , cioè se B non è vera non lo è nemmeno A). La scrittura $A \iff B$ (doppia implicazione) significa che A è vera se e solo se lo è B , cioè le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false, ovvero A è *condizione necessaria e sufficiente per B* .

Trasformare le seguenti affermazioni in una corretta implicazione o viceversa.

- (a) Condizione sufficiente perché un numero si amultiplo di 4 è che lo sia di 20.
 (b) Condizione necessaria e sufficiente perché sia $\sqrt{x-1} = 1$ è $x = 2$.
 (c) Condizione sufficiente ma (non necessaria) perché sia $x^2 > 1$ è $x > 1$.
 (d) Condizione necessaria e sufficiente che sia $x^3 > 1$ è $x > 1$.
 (e) Condizione necessaria (ma non sufficiente) perché una funzione sia derivabile è che sia continua.
 (Per svolgere l'esercizio non occorre conoscere il significato dell'affermazione)
 (f) f continua in $[a, b] \implies f$ derivabile in $[a, b]$.
 (g) Lo studente studia $\implies$ lo studente passa l'esame.
 (h) $x \in A \cap B \implies x \in A$.
 (i) $x = \sqrt{5} \implies \sqrt{x^2 - 1} = 2$.

(1.5) Date le seguenti coppie A, B di proposizioni, dire tra le implicazioni $A \implies B$, $B \implies A$, $A \iff B$ quali sono vere.

- | | | | |
|-------------------------|---|------------------------------|--|
| (a) $A: x(x-1) = 0$ | $B: x = 0$ | (f) $A: x \leq 0$ | $B: x = -x$ |
| (b) $A: x \leq 0$ | $B: x = 0$ | (g) $A: x \notin \mathbb{Q}$ | $B: x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ |
| (c) $A: x \in P \cap Q$ | $B: x \in P$ | (h) $A: x-1 \geq 2$ | $B: x \geq 3$ |
| (d) $A: x+y \geq 0$ | $B: x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$ | (i) $A: x^2 = 4$ | $B: x = 2$ |
| (e) $A: xy \geq 0$ | $B: x \text{ e } y \text{ hanno lo stesso segno}$ | (l) $A: x^2 = 4$ | $B: x = 2 \text{ oppure } x = -2$ |

- (m) $A: x^2 = 4$ $B: |x| = 2$ (r) $A: |x| > 1$ $B: x > 1$ oppure $x < -1$
 (n) $A: \sqrt{x^2} = 2$ $B: x = 2$ (s) $A: |x| > 1$ $B: x < 1$
 (o) $A: \sqrt{x^2} = 2$ $B: x = 2$ oppure $x = -2$ (t) $A: |x| > 1$ $B: x < 1$ oppure $x > -1$
 (p) $A: \sqrt{x^2} = 2$ $B: |x| = 2$ (u) $A: |x| > 1$ $B: x < 1$ e $x > -1$
 (q) $A: |x| > 1$ $B: x > 1$

(1.6) “Dato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, si ponga $a = n^2 + 1$, $b = n^2 - 1$, $c = 2n$. I numeri a , b , c formano una *terna pitagorica*, nel senso che $a^2 = b^2 + c^2$.”

Dire se le seguenti affermazioni sono corrette:

- (a) L’enunciato è falso, perché $a = 13$, $b = 12$, $c = 5$ è una terna pitagorica, ma non esiste alcun intero che risulti $13 = n^2 + 1$.
 (b) L’enunciato implica che se un triangolo è rettangolo, allora esiste un intero n tale che i cateti misurino $n^2 - 1$ e $2n$ e l’ipotenusa $n^2 + 1$.
 (c) L’enunciato è vero, perché $(n^2 + 1)^2 = (n^2 - 1)^2 + 4n^2$.
 (d) L’enunciato è falso, perché se b e c sono interi, non è detto lo sia $\sqrt{b^2 + c^2}$.

(1.7) Per ciascuna delle seguenti proposizioni scrivere la negazione:

- (a) Tutti gli studenti del corso abitano a Pisa.
 (b) Almeno uno studente del corso prenderà meno di 30 all’esame.
 (c) Tutte le studentesse del corso hanno gli occhi celesti e i capelli biondi.
 (d) Tutti i docenti del dipartimento svolgono almeno un corso oppure sono all’estero per motivi di studio.
 (e) $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in A \subset \mathbb{R}, x < M$.
 ($\mathbb{R}$ è l’insieme dei reali ed A un suo sottoinsieme. Spiegare il significato della proposizione, trovare un esempio di insieme A che la verifica ed uno che non la verifica).
 (f) $\forall x \in A \subset \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R}: x < M$, (come sopra).
 (g) $\forall x', x'' \in A \subset \mathbb{R}$ con $x' \neq x''$ risulta $f(x') \neq f(x'')$,
 (qui f è una funzione definita su A . Spiegare il significato della proposizione e trovare due funzioni, una che la verificano e l’altra no).
 (h) $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in A: f(x) = y$, (come sopra).

(1.8) Date le proposizioni p e s vere e le proposizioni q e r false, determinare quali delle seguenti espressioni logiche sono vere:

- (a) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s)$ (c) $[(\neg s \wedge (q \vee s)) \vee (p \wedge \neg r)]$
 (b) $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg r \wedge p)$ (d) $(p \vee q) \implies (r \vee \neg s)$

(1.9) Stabilire la tavola di verità delle seguenti espressioni logiche (cioè il valore vero o falso in funzione delle possibili alternative di verità per p , q ed r):

- (a) $(p \vee \neg q) \implies (r \wedge q)$ (e) $(p \wedge q) \iff (\neg p) \vee (\neg q)$
 (b) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ (f) $(p \iff \neg q) \iff (q \implies \neg p)$
 (c) $(p \implies \neg q) \iff (\neg p \implies q)$ (g) $[(p \implies q) \wedge \neg q] \implies \neg p$
 (d) $(p \implies q) \vee (\neg p \implies r)$

(1.10) Stabilire se gli schemi di ragionamento sintetizzati dalle seguenti proposizioni sono corretti. Poiché i vari schemi non coincidono né con il ragionamento diretto né con quello per assurdo, possiamo costruire le tavole di verità delle proposizioni e controllare se il risultato è sempre vero, qualunque sia il valore di verità dei dati.

Il ragionamento sintetizzato in (a) si può, ad esempio, esplicitare in questo modo:

- Ipotesi 1 : se p è falsa allora q è falsa.
 Ipotesi 2 : p è vera.
 Tesi : q è vera.

- | | |
|--|--|
| (a) $[(\neg p \implies \neg q) \wedge p] \implies q$ | (e) $[(\neg p \implies \neg q) \wedge q] \implies p$ |
| (b) $[(p \implies \neg q) \wedge q] \implies \neg p$ | (f) $[(\neg p \implies \neg q) \wedge q] \implies p$ |
| (c) $[(p \implies \neg q) \wedge \neg p] \implies q$ | (g) $[(\neg p \implies \neg q) \wedge \neg p] \implies \neg q$ |
| (d) $[(\neg p \implies q) \wedge p] \implies \neg q$ | (h) $[(\neg p \implies q) \wedge \neg p] \implies q$ |

(1.11) dati i seguenti enunciati definiti nell'insieme D indicato, determinare l'insieme di verità:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| (a) $P(x)$: x è numero primo | $D = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$ |
| (b) $P(x)$: x è un multiplo di 3 | $D = \{x \in \mathbb{N} : 10 \leq x \leq 20\}$ |
| (c) $P(x, y)$: $x < y$ | $D = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x \leq 20) \wedge (y \leq 4)\}$ |
| (d) $P(x, y)$: $y = x + 2$ | $D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (-5 \leq x \leq 8) \wedge (0 \leq y \leq 10)\}$ |

(1.12) Dati gli enunciati $P(x) : x = 5n$, $Q(x) : x = 3n$ definiti in $D = \{x \in \mathbb{N} : 10 \leq x \leq 100\}$ e con $n \in \mathbb{N}$, stabilire l'insieme di verità di $P(x) \wedge Q(x)$ e quello di $P(x) \wedge \neg Q(x)$.

(1.3) Dimostrare per induzione.

Dimostrare per induzione la seguente identità:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (3k^2 + k) = n^2(n-1), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$