Punti di massimo o minimo locale per funzioni di due variabili

Sia f (x , y) una funzione definita in un dominio A del piano e sia P_0 un <u>punto interno</u> ad A in un intorno del quale f ha derivate prime e seconde continue.

Le definizioni di punto di massimo o minimo locale sono del tutto analoghe a quelle date per funzioni di una variabile.

La condizione gradf (P_0) = 0 (P_0 si dice allora <u>punto stazionario</u>) è necessaria perché P_0 sia di massimo o di minimo locale (cioè sia un estremante), ma non è sufficiente . Ad esempio la funzione $x^2 - y^2$ ha gradiente nullo in (0 , 0) che non è un estremante , perché la funzione in questo punto si annulla, ma in un qualunque intorno assume valori sia positivi che negativi) .

Si chiama matrice hessiana nel punto P_0 la matrice $\mathcal{H}$ (P_0) delle derivate seconde della funzione calcolate nel punto :

$$\mathcal{H}(P_0) = \begin{matrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{matrix}$$

Nelle ipotesi di regolarità fatte sulla funzione , $f_{xy} = f_{yx}$: la matrice si dice simmetrica.

La formula di Taylor per la funzione f (x , y) diventa :

$$f(X) - f(P_0) = \text{grad } f(P_0) \,.\, (X - P_0) +$$

$$+ \ (1/2)\, \mathcal{H}(P_0)(X - P_0) \,.\, (X - P_0) + o(\,||X - P_0||^2$$

Dato che P_0 è stazionario , la formula si riduce a :

$$f(X) - f(P_0) = (1/2)\, \mathcal{H}(P_0)(X - P_0) \,.\, (X - P_0) + o(\,||X - P_0||^2) \ .$$

Posto $X - P_0 = H$, possiamo riscrivere :

$$f(P_0 + H) - f(P_0) = (1/2)\, \mathcal{H}(P_0)\, H \,.\, H + o(\,||H||^2)$$

La funzione

$\mathcal{H}$ (P_0) H . H = f_{xx} (P_0) h^2 + 2 f_{xy} (P_0) h k + f_{yy} (P_0) k^2

(dove abbiamo posto H = (h , k)) si chiama <u>forma quadratica</u> : nello studio dei punti di massimo o minimo locale liberi (cioè interni al dominio) svolge lo stesso ruolo che la derivata seconda nel punto aveva per funzioni di una variabile.

Q (H) si dice definita positiva se è $>$ 0 per ogni H $\neq$ O

Q (H) si dice definita negativa se è $<$ 0 per ogni H $\neq$ O

Q (H) si dice indefinita se non ha segno costante

Q (H) si dice semidefinita positiva se è $\geq$ 0 per ogni H $\neq$ O

Q (H) si dice semidefinita negativa se è $\leq$ 0 per ogni H $\neq$ O

Esempi:

$x^2 + y^2$ è d.positiva , $-x^2 - y^2$ è d.negativa , $x^2 - y^2$ è indefinita.

<u>Condizioni di ottimalità al secondo ordine</u>

Sia P_0 un punto interno stazionario.

Q (H) definita positiva $\rightarrow$ P_0 punto di minimo locale

Q (H) definita negativa $\rightarrow$ P_0 punto di massimo locale

Q (H) indefinita $\rightarrow$ P_0 punto di sella (né massimo né minimo)

<u>Condizioni sufficienti (*)</u>

det $\mathcal{H}$ (P_0) > 0 f_{xx} (P_0) > 0 $\rightarrow$ Q (H) definita positiva

det $\mathcal{H}$ (P_0) > 0 f_{xx} (P_0) < 0 $\rightarrow$ Q (H) definita negativa

det $\mathcal{H}$ (P_0) < 0 $\rightarrow$ Q (H) indefinita

det $\mathcal{H}$ (P_0) = 0 $\rightarrow$ caso dubbio ; non si può concludere.

Osservazione

Se det $\mathcal{H}$ (P_0) = f_{xx} (P_0) f_{yy} (P_0) - f_{xy}^2 (P_0) > 0 , allora f_{xx} (P_0) f_{yy} (P_0) > f_{xy}^2 (P_0) e dunque f_{xx} (P_0) f_{yy} (P_0) > 0 , cioè le due derivate hanno lo stesso segno. Quindi imporre f_{xx} (P_0) > 0 (o < 0) è la stessa cosa che imporre f_{yy} (P_0) > 0 (o < 0).

Osservazione sulle condizioni sufficienti (*)

Se la matrice è diagonale , cioè :0

$$\begin{matrix} a & 0 \\ 0 & b \end{matrix}$$

si verifica facilmente che la forma quadratica associata è definita positiva se a e b sono entrambi positivi , definita negativa se a e b sono entrambi negativi , indefinita se a e b hanno segno discorde.

Il determinante della matrice vale ab :

- è positivo quando a e b hanno lo stesso segno ; la condizione su f_{xx} fornisce il segno comune ai due termini
- è negativo quando a e b hanno segno discorde.

Esempio 1.

$f (x , y) = x^2 y – x y^2 + x y$

grad f = $(2 x y – y^2 + y , x^2 – 2 x y + x)$

$$\mathcal{H} (x , y) = \begin{matrix} 2 y & 2 x - 2 y + 1 \\ 2 x - 2 y + 1 & -2x \end{matrix}$$

grad f (x , y) = O nei punti (0 , 0) , (-1 , 0) , (0 , 1) , (-1/3 , 1/3)

(il lettore svolga i calcoli qui non riportati).

Controlliamo la matrice hessiana in ciascuno dei punti stazionari.

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \quad \det < 0 \text{ ; punto di sella}$$

$$\mathcal{H}(-1,0) = \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix} \quad \det < 0 \text{ ; punto di sella}$$

$$\mathcal{H}(0,1) = \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \quad \det < 0 \text{ ; punto di sella}$$

$$\mathcal{H}(-1/3,1/3) = \begin{matrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{matrix} \quad \det > 0 \quad f_{xx} > 0 \quad \text{; punto di minimo loc.}$$

Esempio 2.

$f(x,y) = x^2 y^2 / 2 - 2y^2 + x^3/3$

$\text{grad } f = (x y^2 + x^2 , x^2 y - 4y)$

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{matrix} y^2 + 2x & 2xy \\ 2xy & x^2 - 4 \end{matrix}$$

grad f (x , y) = O nei punti (0 , 0) , (-2 , √ 2) , (-2 , -√ 2)

(il lettore svolga i calcoli qui non riportati).

Controlliamo la matrice hessiana in ciscuno dei punti stazionari.

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{matrix} \quad \det = 0 \text{ ; non possiamo concludere}$$

Possiamo studiare la restrizione della funzione all'asse delle x ; questa vale $x^3/3$ che in x = 0 non ha né massimo né minimo.

$$\mathcal{H}(-2,\sqrt{2}) = \begin{matrix} -2 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 0 \end{matrix} \quad \det < 0 \text{ ; punto di sella}$$

In maniera analoga si procede anche per (-2 , -√ 2) .

$$\mathcal{H}(-2, \sqrt{2}) = \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \quad \det < 0 \text{ ; punto di sella}$$

$$\mathcal{H}(-1/3, 1/3) = \begin{matrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{matrix} \quad \det > 0 \quad f_{xx} > 0 \quad \text{; punto di minimo loc.}$$

Esempio 3.

$f(x, y) = (x - 1)^2 (x^2 - y^2)$

grad $f = (2(x - 1)(x^2 - y^2) + 2x(x - 1)^2, -2(x - 1)^2 y)$

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{matrix} 12x^2 - 2y^2 - 12x + 2 & -4(x-1)y \\ -4(x-1)y & -2(x-1)^2 \end{matrix}$$

grad $f(x, y) = O$ nei punti $(0, 0)$, $(1/2, 0)$, la retta $x = 1$

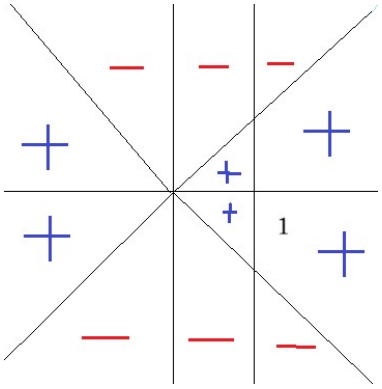
(il lettore svolga i calcoli qui non riportati).

$$\mathcal{H}(0, 0) = \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{matrix} \quad ; \ \det < 0 \text{ ; punto di sella}$$

$$\mathcal{H}(1/2, 0) = \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{matrix} \quad ; \ \det > 0 \text{ ; punto di minimo}$$

$$\mathcal{H}(1, y) = \begin{matrix} 2(1 - y^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad ; \ \det = 0 \text{ ; non possiamo concludere}$$

Studiando il segno della funzione :



si trova che i punti (1 , y_0) sono di massimo per $y_0 > 1$ e per $y_0 < -1$, di minimo per $-1 < y_0 < 1$, di sella per $y_0 = \pm 1$.