

# Note per il corso *Analisi di Fourier e alcune equazioni differenziali della Fisica Matematica*

Claudio Saccon

## 1 Richiamo sulle serie a termini positivi

**1.1 Definizione.** Se  $(a_n)_{n \geq n_0}$  è una successione di numeri reali si chiama *somma parziale*  $n$ -esima:

$$S_n := \sum_{k=n_0}^n a_k = a_{n_0} + \cdots + a_n$$

La (nuova) successione  $(S_n)_{n \geq n_0}$  si chiama *serie* associata ad  $(a_n)_{n \geq n_0}$  o serie degli  $a_n$ . Si dice che *la serie è convergente* se  $(S_n)_{n \geq n_0}$  ammette limite finito  $S$ , si dice che *la serie è divergente* se  $(S_n)_{n \geq n_0}$  tende a  $\pm\infty$  e si dice che *la serie è indeterminata* se  $(S_n)_{n \geq n_0}$  non ha limite.

Consideriamo qui solo il caso in cui i termini  $a_n$  della serie sono **positivi**:  $a_n \geq 0$ . Allora è facile constatare che  $(S_n)$  è una successione crescente. Ne segue per un teorema noto che  $(S_n)$  ammette limite, finito o  $+\infty$ . Chiamiamo tale limite *somma della serie degli  $a_n$*  e lo indichiamo con

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Ricordiamo il comportamento di alcune serie.

**1.2 Proposizione.** *La serie geometrica di ragione  $A \geq 0$ :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \begin{cases} \frac{1}{1-A} < +\infty & \text{se } 0 \leq A < 1, \\ +\infty & \text{se } 0 \leq A \geq 1. \end{cases}$$

**1.3 Proposizione.** *La serie armonica di esponente  $\alpha$ :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha > 1, \\ = +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Ricordiamo i principali criteri di convergenza per le serie a termini positivi.

**1.4 Proposizione.** *Se  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  converge, allora  $a_n \rightarrow 0$ .*

**1.5 Proposizione** (criterio del confronto). *Siano  $(a_n)$  e  $(b_n)$  due successioni di numeri positivi. Se  $a_n \leq b_n$  per ogni  $n$  (per ogni  $n$  grande), allora*

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge} & \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge} & \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ diverge} \end{aligned}$$

**1.6 Proposizione** (criterio del confronto asintotico). Siano  $(a_n)$  e  $(b_n)$  due successioni di numeri positivi. Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

Allora, se  $l \in ]0, +\infty[$ :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge},$$

se  $l = 0$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge},$$

mentre se  $l = +\infty$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ converge}.$$

I due criteri che seguono sono scritti in termine del limite superiore e del limite inferiore di opportune espressioni; in prima istanza si può pensare che esista il limite delle quantità indicate cioè che  $\liminf = \limsup$ .

**1.7 Proposizione** (criterio della radice). Sia  $(a_n)$  una successione di numeri positivi. Allora

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 & \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge}, \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 & \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge}. \end{aligned}$$

**1.8 Proposizione** (criterio del rapporto). Sia  $(a_n)$  una successione di numeri positivi. Allora

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 & \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge}, \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 & \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge}. \end{aligned}$$

## 2 Convergenza puntuale e uniforme

Supponiamo che  $A$  sia un sottointervallo di  $\mathbb{R}$  e supponiamo che per ogni intero  $n$  sia data una funzione  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremo in questo caso che  $(f_n)$  è una successione di funzioni da  $A$  in  $\mathbb{R}$ .

**2.1 Definizione.** Diciamo che la successione  $(f_n)$  converge puntualmente in un punto  $x_0$  di  $A$  se esiste il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Diciamo che  $(f_n)$  converge puntualmente su  $A$  se  $(f_n)$  converge puntualmente in ogni  $x_0$  di  $A$ . È chiaro che in quest'ultimo caso siamo autorizzati a considerare la funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$  definita da

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

e potremo quindi dire che  $(f_n)$  converge puntualmente a  $f$  (in forma abbreviata scriveremo  $f_n \rightarrow f$  puntualmente o anche  $f_n \xrightarrow{\text{punct}} f$ ).

**2.2 Definizione.** Data la successione di funzioni  $(f_n)$  e una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  diciamo che  $f_n$  converge uniformemente su  $A$  a  $f$  se si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

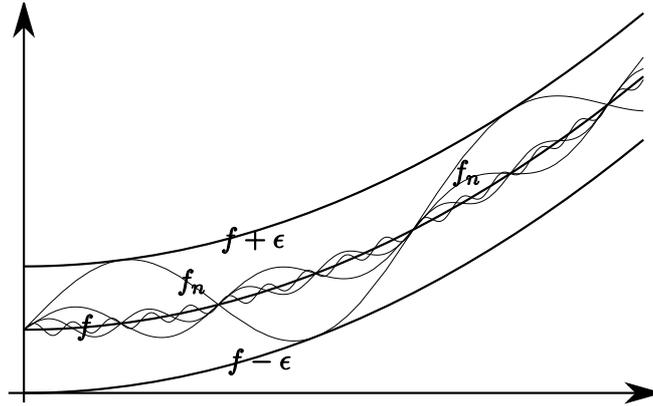


Figura 1: convergenza uniforme

Se introduciamo la *norma uniforme* di una funzione  $f$  (sull'insieme  $A$ ) mediante

$$\|f\|_{\infty} = \|f\|_{\infty, A} := \sup_{x \in A} |f(x)|$$

allora la convergenza uniforme si può esprimere dicendo che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

Per indicare che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ , useremo la notazione  $f_n \rightarrow f$  uniformemente (su  $A$ ), o anche  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$  (su  $A$ ).

Notiamo che l'espressione introdotta sopra, che abbiamo chiamato norma, non è necessariamente finita (può essere  $+\infty$ ). Essa è finita se e solo se  $f$  è limitata su  $A$ , per esempio se  $A$  è chiuso e limitato in  $\mathbb{R}^N$  e  $f$  è continua.

È comunque vero in ogni caso che se  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$   $\|f_n - f\|_{\infty}$  **deve** essere finito e tendere a zero.

**2.3 Osservazione.** Un modo di visualizzare la convergenza uniforme è di dire che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , il grafico delle  $f_n$  è *definitivamente* compreso tra il grafico di  $f - \varepsilon$  e quello di  $f + \varepsilon$  (vedi figura 1).

La seguente proprietà è una semplice conseguenza delle definizioni.

**2.4 Proposizione.** *Se  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $A$ , allora  $f_n$  converge puntualmente su  $A$ .*

La proposizione precedente dice che se  $f_n$  converge uniformemente a qualcosa, questo qualcosa deve essere il limite puntuale delle  $f_n$ : il limite puntuale **individua** il candidato limite uniforme.

La proposizione non è invertibile come mostrano i vari esempi che seguono.

**2.5 Esempio.** Consideriamo  $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$ . Si vede subito che, dato  $x$  in  $\mathbb{R}$ ,  $f_n(x) \rightarrow 1$  e dunque  $f_n$  converge puntualmente su  $\mathbb{R}$  alla funzione  $f$  che vale costantemente 1. Si vede abbastanza facilmente però che  $f_n$  non converge uniformemente su  $\mathbb{R}$  a  $f$ . Si vede infatti che non c'è nessun intero  $n$  per cui il grafico di  $f_n$  è *tutto* tra il grafico di  $f - \varepsilon$  e quello di  $f + \varepsilon$  dato che ogni retta di equazione  $y = 1 + \frac{x}{n}$  va all'infinito e quindi supera  $1 + \varepsilon$  per  $x$  abbastanza grande (vedi figura 2).

In particolare  $\|f_n - f\|_{\infty} = +\infty$  e dunque non è possibile che  $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ .

In sostanza, anche se a  $x$  fissato  $f_n(x) \rightarrow 1$ , la *velocità di convergenza* dipende da  $x$  (e peggiora tanto più  $x$  è grande) e non è quindi *uniforme* rispetto a  $x$ .

Notiamo che se invece di prendere le  $f_n$  su tutto  $\mathbb{R}$  consideriamo  $A := [0, 1]$  (o un qualunque intervallo limitato), allora  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} 1$  su  $A$ . Infatti

$$\|f_n - f\|_{\infty, [0,1]} = \sup_{0 \leq x \leq 1} |1 + x/n - 1| = \max_{0 \leq x \leq 1} x/n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Dunque le  $f_n$  non convergono uniformemente a 1 su  $\mathbb{R}$  ma convergono uniformemente a 1 su ogni intervallo  $[a, b]$ .

**2.6 Esempio.** Consideriamo  $f_n(x) := e^{-nx}$  definite su  $A := [0, +\infty[$  (vedi la figura 3).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

cioè  $f_n$  converge puntualmente alla funzione  $f$  che vale zero su  $]0, +\infty[$  e vale uno in zero. Però  $f_n$  non converge uniformemente a  $f$  in quanto, per ogni  $n$

$$\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{x \geq 0} |e^{-nx} - f(x)| = \sup_{x > 0} |e^{-nx}| = 1$$

che non tende a zero. Notiamo che le  $f_n$  sono tutte funzioni continue mentre il loro limite puntuale  $f$  non è continua in 0 dato che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$ . Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) (= 0) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 (= 1)$$

**2.7 Esempio.** Consideriamo  $f_n(x) := ne^{-nx}$  definite su  $A := ]0, +\infty[$  (vedi la figura 4). Anche in questo caso  $f_n(x) \rightarrow 0$  per ogni  $x > 0$  (anche se c'è un  $n$  a moltiplicare l'esponenziale  $e^{-nx}$  "vince"); notiamo che non abbiamo messo lo zero in  $A$  (altrimenti  $f_n(0) \rightarrow +\infty$ ). Quindi le  $f_n$  tendono puntualmente a zero su  $A$ . Anche stavolta la convergenza non è uniforme, si vede infatti che, per ogni  $n$

$$\|f_n - 0\|_{\infty} = \sup_{x > 0} |ne^{-nx}| = n$$

che addirittura tende all'infinito. Notiamo che

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} ne^{-nx} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 1$$

e quindi l'integrale delle  $f_n$  non tende all'integrale della funzione limite (che sarebbe zero).

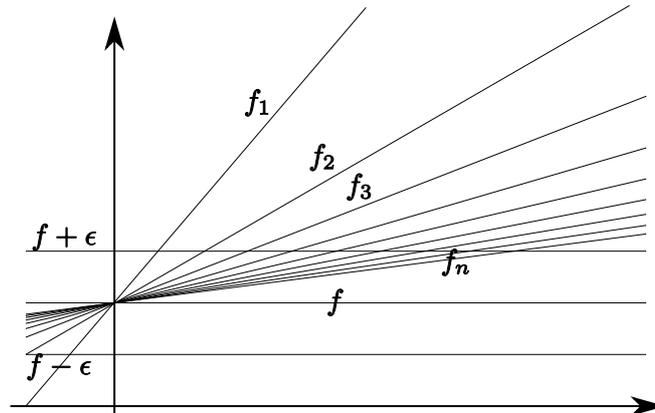


Figura 2:  $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$

Si potrebbe ritenere che questo dipenda dal fatto che  $A$  è un intervallo aperto, oppure che  $A$  non è limitato. In realtà, con un po' di pazienza, si può costruire un esempio analogo su  $[0, 1]$ ; prendiamo infatti  $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$g_n(x) := \begin{cases} ne^{-nx} & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ \frac{n^2}{e}x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

(vedi la figura 5).

Come prima, per  $x$  fissato,  $g_n(x) \rightarrow 0$ . Infatti se  $x = 0$   $g_n(0) = 0 \rightarrow 0$ , mentre se  $x > 0$  per  $n$  grande  $g_n(x) = f_n(x) \rightarrow 0$ . D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_n(x) dx &= \int_0^{1/n} ne^{-nx} dx + \int_{1/n}^1 ne^{-nx} dx = \\ & \left[ ne^{-1} \frac{x^2}{2} \right]_0^{1/n} + \left[ n \frac{e^{-nx}}{-n} \right]_{1/n}^1 = \frac{e^{-1}}{2n} - e^{-n} + e^{-1} \rightarrow e^{-1} \neq 0 \end{aligned}$$

e quindi di nuovo l'integrale delle  $g_n$  non tende all'integrale del limite puntuale (che sarebbe zero).

Questi esempi mostrano che la convergenza puntuale *non va d'accordo* coi limiti e con gli integrali.

I teoremi che riportiamo di seguito mostrano, al contrario, che la convergenza uniforme si comporta bene.

**2.8 Teorema.** Siano  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$  e supponiamo che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $A$ . Sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A$  e supponiamo che per ogni  $n$  esista  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$  che indichiamo con  $l_n$ . Allora

1. esiste  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ ;
2. si ha che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

In sostanza si può dire che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

Come conseguenza ricaviamo subito il seguente risultato

**2.9 Teorema.** Siano  $(f_n)$  ed  $f$  tali che  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$  su  $A$  e sia  $x_0 \in A$ . Se tutte le  $f_n$  sono continue in  $x_0$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$ . Se poi le  $f_n$  sono continue su  $A$ , anche la  $f$  è continua su  $A$ .

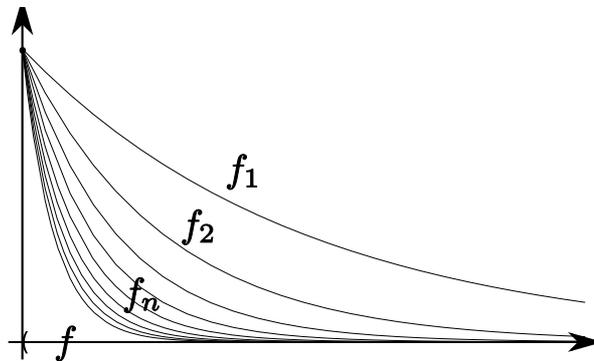


Figura 3:  $f_n(x) = e^{-nx}$

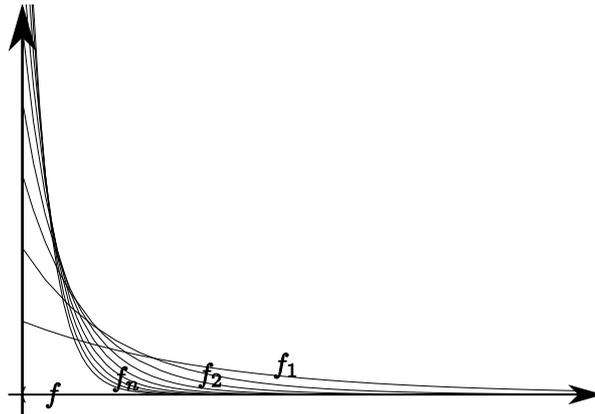


Figura 4:  $f_n(x) = n e^{-nx}$

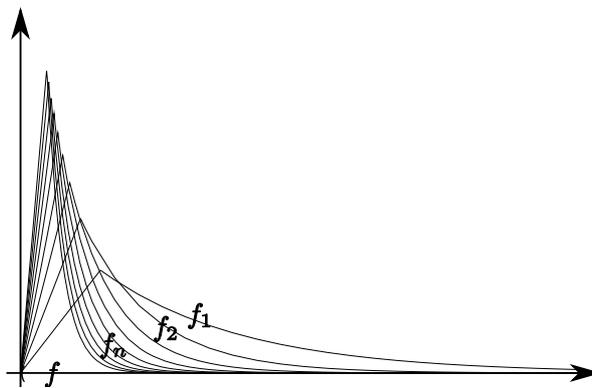


Figura 5:  $g_n(x)$

**2.10 Teorema.** Supponiamo che  $A = [a, b]$  sia un intervallo limitato e siano  $(f_n)$  ed  $f$  tali che  $f_n$  e la  $f$  siano integrabili su  $[a, b]$  e  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$  su  $[a, b]$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Si può vedere facilmente che il risultato sopra non vale se si integra su un intervallo illimitato.

Contrariamente all'integrazione l'operazione di derivata *non va d'accordo* con la convergenza uniforme come mostra l'esempio seguente.

**2.11 Esempio.** Consideriamo le funzioni  $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definite da:

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

(vedi la figura 6)

si vede che  $f_n$  è derivabile e che

$$f'_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \\ n & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n} \\ -1 & \text{se } x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

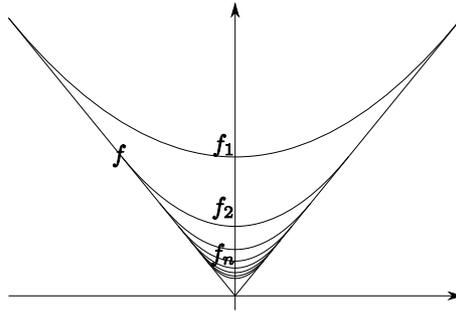


Figura 6: approssimazioni derivabili di  $|x|$

Non è difficile verificare che  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ , dove  $f(x) = |x|$  ed è chiaro che  $f$  non è derivabile in zero. Quindi è possibile che funzioni derivabili convergano ad una non derivabile. Vale però il seguente risultato.

**2.12 Teorema.** *Supponiamo che  $I$  sia un intervallo in  $\mathbb{R}$  e che  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  sia una successione di funzioni derivabili su  $I$  con derivata  $f'_n$  continua su  $I$ . Supponiamo che ci siano due funzioni  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  per cui:*

$$f_n \rightarrow f \quad \text{puntualmente} \quad f'_n \rightarrow g \quad \text{uniformemente}$$

(ne segue che  $g$  è continua). Allora  $f$  è derivabile e  $f' = g$ .

### 3 Serie di funzioni

Come abbiamo considerato le successioni di funzioni possiamo considerare le serie.

**3.1 Definizione.** Supponiamo che  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  formino una successione di funzioni. Per ogni intero  $n$  chiamiamo somma parziale  $n$ -esima relativa a  $(f_n)$  la funzione  $F_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

Chiamiamo *serie* di funzioni associata a  $(f_n)$  la successione delle somme parziali  $(F_n)$ . Diciamo che la serie delle  $f_n$  è uniformemente convergente su  $A$  se esiste una funzione  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  a cui le  $F_n$  convergono uniformemente:  $F_n \xrightarrow{\text{unif}} F$ . In questo caso chiamiamo  $F$  *somma* della serie e la indichiamo con

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \left( \text{e quindi } F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in A \right).$$

Molto spesso si indica con  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  la serie (cioè la successione) oltre che la sua somma. Quindi su usa dire, con un leggero abuso, che la “serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ” è (o non è) uniformemente convergente.

Rimarchiamo anche in questo caso che se la serie converge uniformemente ( $F_n \xrightarrow{\text{unif}} F$ ), allora essa converge puntualmente ( $F_n \xrightarrow{\text{punct}} F$ ), cioè per ogni  $x$  di  $A$  la serie numerica  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  è convergente. Si può dire in questo caso che la serie converge puntualmente.

Anche nel caso delle serie la convergenza uniforme gioca un ruolo assai più importante di quella puntuale. È quindi fondamentale trovare dei criteri che assicurino la convergenza uniforme. In tal senso il seguente risultato si rivela molto utile.

**3.2 Teorema** (criterio della convergenza totale). *Sia  $(f_n)$  una successione di funzioni limitate su  $A$ . Se la serie numerica  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)|$  è convergente, allora la serie delle  $f_n$  converge uniformemente su  $A$  ad una funzione limitata; in altri termini*

$$\sum_{k=1}^n f_k \xrightarrow{\text{unif}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

La proprietà  $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| < +\infty$  viene detta convergenza totale della serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Il teorema afferma quindi che una serie di funzioni limitate che sia totalmente convergente è uniformemente convergente.

Dalla convergenza uniforme si ricavano varie proprietà delle serie di funzioni, analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente.

**3.3 Corollario.** *Sia  $A = [a, b]$  un intervallo limitato e sia  $(f_n)$  una successione di funzioni continue su  $[a, b]$ . Supponiamo che la serie numerica  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x)|$  sia convergente. Allora*

1.  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  è una funzione continua su  $[a, b]$ .

2. Si ha

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

3. Se le  $f_n$  sono tutte derivabili con derivata continua e se anche la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f'_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{a \leq x \leq b} |f'_n(x)|$  è convergente allora  $F$  è derivabile e si ha

$$F'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \text{ in } [a, b].$$

**3.4 Esempio.** Consideriamo la seguente successione di funzioni  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definite da

$$f_n(x) := \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

Si vede facilmente che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0, \quad f'_n(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

Quindi il grafico di ogni  $f_n$  è quello rappresentato in figura 7.

In particolare  $f_n$  raggiunge il suo massimo in  $x = \frac{1}{n}$  e il massimo di  $f_n$  vale  $f_n(1/n) = 1/2n$ . Dunque

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2n}.$$

e quindi  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$  (su tutto  $\mathbb{R}$ ). Consideriamo ora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

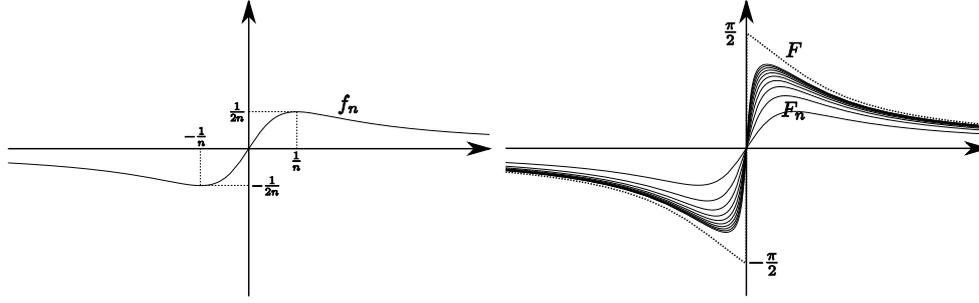


Figura 7:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

Studiamone la convergenza puntuale: fissato  $x$  in  $\mathbb{R}$  vediamo se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

è convergente. Questo è vero per ogni  $x$  dato che, se  $x = 0$  la serie ha tutti i suoi termini nulli, mentre se  $x \neq 0$

$$\left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2|x|}$$

e quindi la serie converge (dato che la serie  $\frac{1}{|x|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge). Dunque ha senso scrivere

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

( $x$  per  $x$ ). Notiamo che  $F(0) = 0$ . Ci possiamo chiedere se  $F$  sia continua su tutto  $\mathbb{R}$ . Ciò sarebbe sicuramente vero se  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} < +\infty$ ; sfortunatamente tale serie diverge essendo eguale a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$  e quindi con questo ragionamento non si perviene a nulla.

Se però fissiamo un qualunque  $a > 0$  e consideriamo  $A := [a, +\infty[$ , si ha

$$\|f_n\|_{\infty, A} = \sup_{x \geq a} f_n(x) = f_n(a) \quad \text{se } n \geq 1/a.$$

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, A} &= \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty, A} + \sum_{n > 1/a} f_n(a) = \\ &= \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty, A} + \sum_{n > 1/a} \frac{a}{1+n^2a^2} \leq \sum_{n \leq 1/a} \|f_n\|_{\infty, A} + \frac{1}{a} \sum_{n > 1/a} \frac{1}{n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Applicando il corollario 3.3 (in  $A$ ) otteniamo che la serie converge uniformemente su  $A$  e la sua somma  $F$  risulta continua su  $A$ . Dato che il numero  $a > 0$  è arbitrario ne deduciamo che  $f$  è continua su  $]0, +\infty[$ . Analogamente si dimostra che  $F$  è continua su  $] -\infty, 0[$ .

In maniera analoga possiamo dimostrare che  $F$  è derivabile su  $A$  e quindi è derivabile in ogni  $x \neq 0$ . Infatti consideriamo la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n, \quad \text{dove } f'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Si ha

$$\|f'_n\|_{\infty, A} = \sup_{x \geq a} \left| \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} \right| \leq \sup_{x \geq a} \frac{1 + n^2 x^2}{n^4 x^4} \leq \frac{1}{n^4 a^4} + \frac{1}{n^2 a^2}.$$

Dato che  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 a^4} + \frac{1}{n^2 a^2} < +\infty$  la serie delle derivate è uniformemente convergente su  $A$  e quindi tale serie è la derivata di  $F$ .

Vediamo che invece  $F$  non è continua in zero. Infatti se  $0 < x < 1$  si ha <sup>1</sup>

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2} \geq \sum_{n=1}^{[1/x]} \frac{x}{1 + n^2 x^2} \geq \sum_{n=1}^{[1/x]} \frac{x}{1 + 1} = \frac{1}{2} x [1/x] \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}.$$

Questa disuguaglianza rende impossibile che  $F(x) \rightarrow 0 = F(0)$  per  $x \rightarrow 0^+$  e quindi  $F$  non è continua in zero (almeno da destra - si può anche ripetere lo stesso ragionamento per  $x \rightarrow 0^-$ ). In verità possiamo essere più precisi. Usando una caratterizzazione delle serie possiamo scrivere

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + [y]^2 x^2} dy \text{ da cui}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + y^2 x^2} dy \leq F(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + (y-1)^2 x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + y^2 x^2} dy.$$

Sostituendo  $t = xy$  si ricava

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + t^2} dt$$

e facendo tendere  $x$  a zero si ricava

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

La figura 7 rappresenta le somme parziali fino all'ordine 10 delle  $f_n$  e, con linea tratteggiata, la somma della serie (in realtà la somma di ordine  $n = 5000$ ).

## 4 Serie di potenze

In questo paragrafo useremo il risultati precedenti per studiare serie del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dove  $(a_k)$  è una successione di numeri reali e  $x_0 \in \mathbb{R}$  è fissato.

**4.1 Teorema.** *Siano  $(a_n)$  una successione in  $\mathbb{R}$  e poniamo:*

$$M := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(per esempio supponiamo che esista il limite di  $\sqrt[n]{|a_n|}$  e chiamiamolo  $M$ ). In generale  $M \in [0, +\infty]$ . Poniamo

$$\bar{R} := \begin{cases} +\infty & \text{se } M = 0, \\ \frac{1}{M} & \text{se } M \in ]0, \infty[, \\ 0 & \text{se } M = +\infty. \end{cases}$$

Allora:

<sup>1</sup>ricordiamo che  $[t]$  indica la parte intera di un numero  $t$ , definita da  $[t] := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq t\}$ ; ne segue allora che  $[t]$  è un intero e che  $[t] \leq t < [t] + 1$

1. per ogni  $R$  con  $0 < R < \bar{R}$  la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  converge uniformemente su  $[x_0 - R, x_0 + R]$ ; questo implica che per ogni  $x$  in  $]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$  la serie converge puntualmente in  $x$ ;
2. per ogni  $x$  fuori da  $[x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}]$  la serie non converge in  $x$

Si noti che non si dice nulla (e la situazione è diversa caso per caso) di cosa succeda nei punti  $x_0 - \bar{R}$  e  $x_0 + \bar{R}$ .

**4.2 Definizione.** Data la successione  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}$  chiamiamo *raggio di convergenza* della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  il numero  $\bar{R}$  (in  $[0, +\infty[$ ) ottenuto nel teorema (4.1).

Risulta quindi definita la funzione  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  per ogni  $x$  in  $B(]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$ .

L'intervallo aperto  $]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$  viene detto *intervallo di convergenza* per la serie. (se  $\bar{R} = 0$  tale intervallo è vuoto, se  $\bar{R} = +\infty$  esso coincide con  $\mathbb{R}$ ).

**4.3 Proposizione.** *La funzione*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (1)$$

è (ben definita e) continua nel suo intervallo di convergenza.

In realtà si può dire molto di più sulla regolarità di  $f$

*Dimostrazione.* La tesi è una conseguenza del teorema 2.9, dato che le somme parziali  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$  sono ovviamente continue e convergono uniformemente a  $f$  su ogni intervallo chiuso  $[x_0 - R, x_0 + R]$  strettamente contenuto nell'intervallo di convergenza (cioè con  $R < \bar{R}$ ).  $\square$

**4.4 Proposizione.** *La funzione  $f$  definita in (1) è di classe  $C^\infty$ , cioè ha derivata  $k$ -esima continua per qualunque  $k$  intero. Inoltre vale la formula*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (x - x_0)^{n-k} \quad \forall x \text{ in } ]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[ \quad (2)$$

*Inoltre la serie (delle derivate) scritta sopra ha lo stesso raggio di convergenza  $\bar{R}$  della serie di partenza.*

*Dimostrazione.* Ammettiamo di aver dimostrato che la serie delle derivate  $k$ -esime ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza qualunque sia  $k$  intero. Allora ognuna di queste serie converge uniformemente su ogni intervallo chiuso  $[x_0 - R, x_0 + R]$  strettamente contenuto nell'intervallo di convergenza. Ne segue la tesi segue per il corollario (3.3).  $\square$

**4.5 Osservazione.** Se mettiamo  $x = x_0$  nella formula (2), otteniamo:

$$f^{(k)}(x_0) = a_k k! \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

cioè  $f$  (in  $]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$ ) è eguale alla sua serie di Taylor.

**4.6 Esempio.** Consideriamo la serie  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . Allora il raggio di convergenza è 1 dato che  $\sqrt[n]{1} \rightarrow 1$ . Peraltro si sa che:

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \rightarrow \frac{1}{1 - x} \quad \text{se } |x| < 1$$

e quindi  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  per ogni  $x$  con  $|x| < 1$ .

Consideriamo ora un'altra serie  $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ . Anche questa serie ha raggio di convergenza 1 dato che  $\sqrt[n]{1/n} \rightarrow 1$ . Notiamo che  $\frac{d}{dx} \frac{x^n}{n} = x^{n-1}$  e dunque

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = f(x).$$

In altre parole  $g$  è una primitiva di  $f$ , cioè  $g(x) = \ln(1-x) + c$  per  $c$  costante. Ma calcolando tutto in  $x = 0$  si trova  $0 = g(0) = c$  e quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x) \quad \text{se } -1 < x < 1.$$

Consideriamo una terza serie:  $h(x) := \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ . Anch'essa ha raggio di convergenza 1 perché  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ . Si ha

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = x \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) = x f'(x)$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{se } -1 < x < 1.$$

**4.7 Esempio.** Consideriamo la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ . Questa serie ha raggio di convergenza 1.

In questo caso in verità non esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  perché si ha:

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k \\ 0 & \text{se } n = 2k + 1 \end{cases}$$

però il massimo limite fa 1, come si vede passando alla sottosuccessione  $\sqrt[2k]{|a_{2k}|}$ . Si vede facilmente che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{se } |x| < 1.$$

Quindi la serie converge a  $\frac{1}{1+x^2}$  per le  $x$  in  $\{|x| < 1\}$ . Guardando la cosa dal punto di vista di  $\mathbb{R}$  la cosa è abbastanza strana, dato che non si capisce come c'entri il numero 1 con la funzione  $\frac{1}{1+x^2}$ , che è ben definita su tutto  $\mathbb{R}$ . La cosa si capirebbe se si ambientasse tutto nell'ambito dei numeri complessi. Sarebbe allora chiaro che il raggio di convergenza non può essere più di 1 dato che  $i$  e  $-i$ , che hanno modulo uno, sono delle singolarità per  $\frac{1}{1+z^2}$ .

Concludiamo mettendo in evidenza una proprietà delle serie di potenze analogo al principio di identità dei polinomi.

**4.8 Teorema.** *Data una serie di potenze  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  essa è identicamente nulla sul suo intervallo di convergenza se e solo se i suoi coefficienti sono tutti nulli:*

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in ]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[ \quad \Leftrightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

## 5 Serie di potenze nella soluzione di equazioni differenziali ai dati iniziali

Vediamo un esempio di applicazione delle serie di potenze alla soluzione di problemi differenziali ai dati iniziali. Supponiamo di avere un'equazione del secondo ordine

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f \\ y(0) = A, y'(0) = B \end{cases} \quad (4)$$

dove  $a, b, c$  sono numeri reali con  $a \neq 0$ ,  $A, B$  sono due *dati iniziali* assegnati in  $\mathbb{R}$  e dove  $f(x)$  è una funzione assegnata che supponiamo sviluppabile in serie di potenze in un intervallo centrato nell'origine (sarebbe lo stesso se l'origine fosse sostituita da un arbitrario  $x_0$  in  $\mathbb{R}$ ). Quest'ultima proprietà significa che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad \text{per } -R < x < R$$

con  $R > 0$ , per un'opportuna successione  $(f_n)$ . L'idea spontanea è di cercare la soluzione  $y$  della forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \quad (5)$$

per degli opportuni coefficienti  $y_n$ , sperando che tali coefficienti si riescano a trovare e che la serie (5) sia convergente. Per trovare gli  $y_n$  possiamo ragionare come segue – ammettiamo che la serie (5) converga su  $]r, r[$  per un qualche  $r > 0$ ; allora per le proprietà delle serie di potenze si ha che  $y$  è infinitamente derivabile in  $] -r, r[$  e

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} (n+1) x^n \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2} (n+1)(n+2) x^n \end{aligned}$$

che inseriti nell'equazione (4):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ay_{n+2}(n+1)(n+2) + by_{n+1}(n+1) + cy_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

Se ne ricava da (3):

$$ay_{n+2}(n+1)(n+2) + by_{n+1}(n+1) + cy_n = f_n \quad \forall n \quad (6)$$

Notiamo inoltre che

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1$$

e quindi la successione  $(y_n)$  deve verificare la *condizione ricorsiva* (6) unitamente alle condizioni  $y_0 = A, y_1 = B$ . È facile convincersi che queste condizioni individuano **una e una sola** successione  $(y_n)$ . Si può inoltre dimostrare, con un po' di pazienza che la serie di potenze risultante da tale successione ha raggio di convergenza **maggiore o eguale** al numero  $R$  in cui converge la serie relativa a  $f$  e dunque, ragionando a rovescio, la  $y$  così costruita risolve effettivamente l'equazione (4) nell'intervallo  $] -R, R[$ .

Una caratteristica interessante di questo metodo è che è assai facile calcolare i coefficienti  $y_n$  usando la formula ricorsiva (ammesso naturalmente che si conoscano gli  $f_n$ ).

Abbiamo considerato sopra un esempio abbastanza elementare, in cui in realtà, a causa dei coefficienti costanti si può dire molto di più con la teoria "elementare". In realtà si potrebbe dimostrare un teorema più generale

**5.1 Teorema.** Consideriamo l'equazione differenziale (4) con  $a, b, c$  ed  $f$  funzioni di  $x$  sviluppabili in serie di potenze in un intervallo simmetrico centrato in zero:

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \quad \text{per } |x| < R$$

e supponiamo che  $a(x) \neq 0$  per  $|x| < R$ . Allora la soluzione  $y$  è sviluppabile in potenze nell'intervallo  $] -R, R[$ .

Il teorema precedente ci permette di studiare le proprietà delle soluzioni di equazioni per cui non è possibile trovare esplicitamente la soluzione.

**5.2 Esempio** (Equazione di Legendre). Consideriamo il problema

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + p(p-1)y = 0 \\ y(0) = A, y'(0) = B \end{cases} \quad (7)$$

dove  $p$  è un parametro assegnato (e  $A, B$  sono assegnati in  $\mathbb{R}$ ). In virtù del teorema precedente possiamo scrivere

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \quad \text{per } -1 < x < 1 \quad (8)$$

Ripetendo i calcoli fatti nel primo esempio possiamo ricavare  $y'$  e  $y''$  – moltiplicando  $y''$  per  $1-x^2$  otteniamo

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'' &= (1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1) x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2} (n+2)(n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} y_n n(n-1) x^n \end{aligned}$$

(nella prima serie abbiamo “scalato” di due l'indice, nella seconda aggiunto i primi due termini che comunque fanno zero). Analogamente

$$2xy' = 2x \sum_{n=1}^{\infty} y_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2y_n n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2y_n n x^n.$$

Mettendo tutto nell'equazione:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+2}(n+2)(n+1) - y_n n(n-1) - 2y_n n + p(p+1)y_n) x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+2}(n+2)(n+1) - y_n (n^2 + n - p^2 - p)) x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+2}(n+2)(n+1) - y_n (n-p)(n+p+1)) x^n \end{aligned}$$

da cui ricaviamo la relazione ricorsiva

$$y_{n+2} = \frac{(n-p)(n+p+1)}{(n+2)(n+1)} y_n \quad y_0 = A, y_1 = B \quad (9)$$

Notiamo che nella formula sopra manca  $y_{n+1}$  quindi, se per esempio  $n$  è pari il valore di  $y_n$  dipende solo dal valore di  $y_{n-2}$  che è il termine pari precedente e la stessa cosa vale per i termini dispari.

Possiamo esprimere matematicamente questo fatto ponendo  $u_n := y_{2n}$ ,  $v_n := y_{2n+1}$ . Allora

$$u_{n+1} = y_{2n+2} = \frac{(2n-p)(2n+p+1)}{(2n+2)(2n+1)} y_{2n} = \frac{(2n-p)(2n+p+1)}{(2n+2)(2n+1)} u_n$$

e quindi  $(u_n)$  verifica

$$u_{n+1} = \frac{(2n-p)(2n+p+1)}{(2n+2)(2n+1)}u_n, \quad u_0 = A \quad (10)$$

e analogamente

$$v_{n+1} = y_{2n+3} = \frac{(2n+1-p)(2n+1+p+1)}{(2n+1+2)(2n+1+1)}y_{2n+1} = \frac{(2n+1-p)(2n+p+2)}{(2n+3)(2n+2)}v_n$$

da cui

$$v_{n+1} = \frac{(2n+1-p)(2n+p+2)}{(2n+3)(2n+2)}v_n, \quad v_0 = B. \quad (11)$$

In questo modo risulta che  $y(x) = u(x) + v(x)$  dove

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{2n}, \quad v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^{2n+1}, \quad \text{per } |x| < 1.$$

La funzione  $u$  (pari) e la funzione  $v$  (dispari) sono le soluzioni dell'equazione (7) con condizioni iniziali  $u(0) = A$ ,  $u'(0) = 0$  e  $v(0) = 0$ ,  $v'(0) = B$ , rispettivamente.

Supponiamo ora che  $p$  sia un intero positivo pari, diciamo  $p = 2k$ . Allora guardando la (10) si vede che  $u_{k+1} = 0$  e per ricorsività tutti gli  $u_n$  fanno zero per  $n \geq k+1$ . In altre parole  $u$  è un polinomio di grado  $p = 2k$ .

Analogamente se  $p = 2k+1$  è un intero dispari si vede dalla (11) che tutti i  $v_n$  sono nulli da  $k+1$  in poi e quindi  $v$  è un polinomio di grado  $p = 2k+1$ .

È evidente che  $u$  dipende linearmente da  $A$  e  $v$  dipende linearmente da  $B$ . Dato  $p$  pari si può allora scegliere  $A$  in modo che  $u(1) = 1$  (andrebbe dimostrato che  $u(1)$  non può essere zero, cosa che si può fare). Il polinomio  $u(x)$  di grado  $p$  trovato in questo modo (che ha solo potenze pari) viene detto **polinomio di Legendre di grado  $p$** .

Analogamente per  $p$  dispari si definisce polinomio di Legendre di grado  $p$ , il polinomio  $v(x)$  (che ha solo potenze dispari) con  $B$  scelto in modo che  $v(1) = 1$ .

Possiamo indicare allora con  $L_p(x)$  il polinomio di Legendre di grado  $p$ , per  $p$  intero positivo qualunque.

*5.3 Osservazione.* I polinomi di Legendre sono *ortogonali* nel seguente senso

$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x) dx = 0 \quad \text{se } n \neq m. \quad (12)$$

Per vederlo notiamo che l'equazione di Legendre si può scrivere:

$$((1-x^2)y')' + n(n+1)y = 0$$

Mettendo  $L_n$  al posto di  $y$ , moltiplicando per  $L_m$  e integrando tra  $-1$  e  $1$

$$0 = \int_{-1}^1 ((1-x^2)L_n'(x))' L_m(x) dx + n(n+1) \int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x) dx =$$

$$\underbrace{[(1-x^2)L_n'(x)L_m(x)]_{x=-1}^{x=1}}_{=0} - \int_{-1}^1 (1-x^2)L_n'(x)L_m'(x) dx + n(n+1) \int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x) dx$$

(abbiamo integrato per parti il primo termine). Ne segue:

$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x) dx = \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^1 (1-x^2)L_n'(x)L_m'(x) dx.$$

Scambiando  $n$  con  $m$  otteniamo anche

$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x) dx = \frac{1}{m(m+1)} \int_{-1}^1 (1-x^2)L_n'(x)L_m'(x) dx.$$

e siccome  $n \neq m$  l'unica possibilità è che

$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)L'_n(x)L'_m(x) dx = 0$$

Vedremo più avanti l'interpretazione di questa proprietà.

## 6 Funzioni di Bessel

Cerchiamo le soluzioni dell'equazione lineare

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (13)$$

dove  $n$  è un intero assegnato. Notiamo che l'equazione non è in forma normale (e se la mettiamo in forma normale diventa singolare in zero). Proviamo a cercare la soluzione come somma di una serie di potenze centrate nell'origine (anche se l'origine è un punto "cattivo" per l'equazione). Poniamo cioè  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Derivando:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2},$$

da cui

$$\begin{aligned} x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} - n^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k (k^2 - k)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k - n^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} [a_k (k^2 - n^2) + a_{k-2}] x^k - n^2 a_0 + (1 - n^2) a_1 x \end{aligned}$$

da cui

$$n^2 a_0 = 0, \quad (1 - n^2) a_1 = 0, \quad a_k (k^2 - n^2) + a_{k-2} = 0 \quad \forall k \geq 2.$$

Consideriamo il caso  $n \geq 2$ . Allora le due prime eguaglianze danno  $a_0 = a_1 = 0$ . La terza fornisce la relazione ricorsiva, valida da 2 in poi:

$$a_k (k^2 - n^2) = -a_{k-2} \quad (14)$$

che, come abbiamo già notato nel caso dei polinomi di Legendre, permette di ricavare indipendentemente i termini con  $k$  pari e i termini con  $k$  dispari. Supponiamo per esempio che  $n$  sia pari, allora si vede che tutti gli  $a_k$  con  $k$  dispari sono nulli. Infatti dalla (14) si ottiene:

$$\begin{cases} a_{2m+1} = -\frac{a_{2m-1}}{(2m+1)^2 - n^2} \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

e il denominatore  $(2m+1)^2 - n^2$  non si annulla per nessun  $m$ . Per i termini pari si può fare una considerazione analoga ricavando che tutti gli  $a_k$  con  $k$  pari sono nulli **fino al termine con**  $k = n$ . Infatti la proprietà ricorsiva:

$$\begin{cases} a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2 - n^2} \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

funziona fino a  $m = n/2 - 1$ . Al passo  $m = n/2$  la formula originaria (14) dice solo  $0 = a_{2m} \cdot 0 = a_{2m-2} = 0$ , che è vera qualunque sia  $a_{2m}$ . Se  $n$  è dispari invece che pari con una considerazione analoga si vede che  $a_k = 0$  per tutti i  $k$  pari e anche per tutti i  $k$  dispari minori di  $n$ .

Siamo quindi liberi di fissare ad arbitrio  $a_n = \alpha$  e ricavare gli  $a_k$  con  $k > n$  e con la stessa parità di  $n$  mediante la (14), che riscriviamo ponendo  $k = n + 2m$

$$\begin{cases} a_{n+2m} = -\frac{a_{n+2(m-1)}}{(n+2m)^2 - n^2} = -\frac{a_{n+2(m-1)}}{4m(n+m)} & \text{per } m \geq 1 \\ a_n = \alpha \end{cases}$$

Non è difficile verificare che:

$$a_{n+2m} = \frac{(-1)^m}{4^m [1 \cdot 2 \cdots m] [(n+1)(n+2) \cdots (n+m)]} \alpha = \frac{(-1)^m n!}{4^m m! (n+m)!} \alpha$$

(una volta intuita la formula la si dimostra per induzione!). Dunque:

$$y(x) = \alpha n! \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m m! (n+m)!} x^{n+2m} = \beta x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^m$$

dove  $\beta = \alpha n!$ . Applicando il criterio del rapporto è immediato verificare che tale serie converge per ogni  $x$  reale e quindi risolve l'equazione (13). Convenzionalmente si chiama *funzione di Bessel di prima specie* di ordine  $n$  la funzione sopra con  $\beta = 2^{-n}$  cioè:

$$J_n(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^m$$

Queste funzioni si annullano tutte in  $x = 0$  tranne quella di ordine  $n = 0$ , anzi dalla definizione si vede che  $J_n(x) \sim \frac{x^n}{2^n n!}$  per  $x \rightarrow 0$ . Inoltre  $J_n$  è una funzione pari se  $n$  è pari ed è dispari se  $n$  è dispari. Con un'analisi più approfondita (che non possiamo fare qui) si potrebbe dimostrare che per  $x \rightarrow +\infty$

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n-1}{4}\pi\right).$$

Dunque ognuna di queste funzioni ammette una successione di zeri ( $z_k^{(n)}$ ) (numerati con  $k = 0, 1, \dots$ ) che per  $k$  grande tendono a disporsi come  $z_k^{(n)} \sim \frac{2n+1}{4}\pi + k\pi$ . Riportiamo nella figura 8 i grafici delle prime  $J_n$ .

Notiamo che, nonostante l'equazione sia del secondo ordine, abbiamo trovato solo una famiglia a un parametro di soluzioni. Ciò è dovuto al fatto che abbiamo voluto cercare una serie di potenze centrata in zero, punto in cui l'equazione è singolare. In questo modo abbiamo selezionato le soluzioni che si prolungano con continuità in zero. In realtà possiamo trovare delle informazioni anche sulle soluzioni che sono singolari in zero. Per questo supponiamo che  $y_1$  e  $y_2$  risolvano l'equazione (13) per  $x > 0$ . Allora:

$$\begin{cases} x^2 y_1'' + x y_1' + (x^2 - n^2) y_1 = 0 \\ x^2 y_2'' + x y_2' + (x^2 - n^2) y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 y_1'' y_2 + x y_1' y_2 + (x^2 - n^2) y_1 y_2 = 0 \\ x^2 y_2'' y_1 + x y_2' y_1 + (x^2 - n^2) y_2 y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x(y_1'' y_2 - y_1 y_2'') + (y_1' y_2 - y_1 y_2') = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} (x(y_1' y_2 - y_1 y_2')) = 0 \Leftrightarrow x(y_1' y_2 - y_1 y_2') = K$$

dove  $K$  è una costante. Dividendo per  $x y_1^2$ :

$$\frac{K}{x y_1^2} = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_1^2} = \frac{d}{dx} \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2(x) = y_1(x) \left( \int_1^x \frac{K}{\xi y_1^2(\xi)} d\xi + K_1 \right)$$

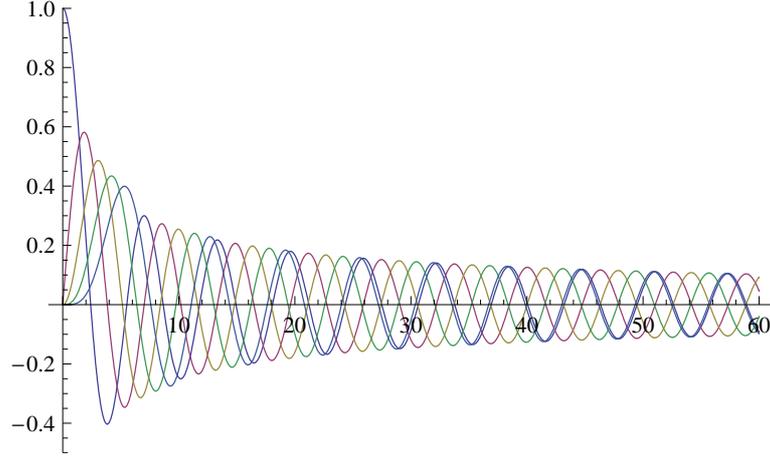


Figura 8: Funzioni di Bessel  $J_0, J_1, J_2, J_3, J_4$

dove  $K_1$  è un'altra costante. Non è difficile far vedere che vale il viceversa, cioè se  $y_1$  è soluzione di (13), allora  $y_2$  definita sopra è soluzione su  $\{x > 0\}$  per ogni coppia di costanti  $K$  e  $K_1$ . Se definiamo la funzione

$$Y_n(x) := -\frac{1}{\pi} J_n(x) \int_1^x \frac{d\xi}{\xi J_n^2(\xi)}$$

vediamo facilmente che per  $x \rightarrow 0$   $Y_n(x) \sim -\frac{2^n(n-1)!}{\pi} x^{-n}$  per  $n > 0$  mentre  $Y_0(x) \sim \ln(x)$ . Allora  $J_n$  e  $Y_n$  sono linearmente indipendenti, per cui  $\alpha J_n + \beta Y_n$  genera tutte le soluzioni di (13) su  $\{x > 0\}$ . In particolare  $\alpha J_n$  descrive esattamente le soluzioni che sono prolungabili in  $x = 0$ .

La funzione  $Y_n$  introdotta sopra si dice *funzione di Bessel di seconda specie* di ordine  $n$ .

Fissiamo ora un numero  $R > 0$ . Per  $n$  ed  $m$  interi poniamo  $y_{n,m}(\rho) := J_m\left(\frac{\rho}{R} z_m^{(n)}\right)$ . Allora la funzione  $y_{n,m}$  risolve:

$$\begin{cases} \rho^2 y_{n,m}''(\rho) + \rho y_{n,m}'(\rho) + (\mu_{n,m} \rho^2 - n^2) y_{n,m}(\rho) = 0 & \text{in } ]0, R[ \\ y_{n,m}(0) = y_{n,m}(R) = 0 \end{cases} \quad \text{dove } \mu_{n,m} = \left(\frac{z_m^{(n)}}{R}\right)^2,$$

che si può anche scrivere

$$\begin{cases} (\rho y_{n,m}'(\rho))' + \left(\mu_{n,m} \rho - \frac{n^2}{\rho}\right) y_{n,m}(\rho) = 0 & \text{in } ]0, R[ \\ y_{n,m}(0) = y_{n,m}(R) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

**6.1 Proposizione.** *Se  $j \neq k$  si ha:*

$$\int_0^R \rho y_{n,j}(\rho) y_{n,k}(\rho) d\rho = 0.$$

*Dimostrazione.* Moltiplichiamo l'equazione (15), con  $m = j$ , per  $y_{n,k}(\rho)$  e integriamo tra zero e  $R$ . Si ottiene (integrando per parti):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^R (\rho y_{n,j}'(\rho))' y_{n,k}(\rho) d\rho + \int_0^R \left(\mu_{n,j} \rho - \frac{n^2}{\rho}\right) y_{n,j}(\rho) y_{n,k}(\rho) d\rho = \\ &= \underbrace{[(\rho y_{n,j}'(\rho)) y_{n,k}(\rho)]_{\rho=0}^{\rho=R}}_{=0} - \int_0^R \rho y_{n,j}'(\rho) y_{n,k}'(\rho) d\rho + \int_0^R \left(\mu_{n,j} \rho - \frac{n^2}{\rho}\right) y_{n,j}(\rho) y_{n,k}(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

(il primo termine sparisce perché  $y_{n,k}$  si annulla in 0 e in  $R$ ); quindi

$$\int_0^R \rho y'_{n,j}(\rho) y'_{n,k}(\rho) d\rho = \int_0^R \left( \mu_{n,j} \rho - \frac{n^2}{\rho} \right) y_{n,j}(\rho) y_{n,k}(\rho) d\rho.$$

Scambiando  $j$  e  $k$  si ottiene:

$$\int_0^R \rho y'_{n,j}(\rho) y'_{n,k}(\rho) d\rho = \int_0^R \left( \mu_{n,k} \rho - \frac{n^2}{\rho} \right) y_{n,j}(\rho) y_{n,k}(\rho) d\rho.$$

e prendendo la differenza:

$$(\mu_{n,j} - \mu_{n,k}) \int_0^R \rho y_{n,j}(\rho) y_{n,k}(\rho) d\rho = 0.$$

Dato che  $\mu_{n,j} \neq \mu_{n,k}$  ne segue la tesi.  $\square$

## 7 Le serie di Fourier

Sia  $T > 0$  assegnato e per il resto di questo paragrafo poniamo  $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$  ( $T$  è un *periodo* assegnato e  $\omega_0$  è la corrispondente *frequenza angolare*).

In quanto segue, per motivi di semplicità formale, considereremo funzioni periodiche di periodo  $T$  a valori complessi. Quindi (almeno all'inizio) considereremo delle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , dove  $\mathbb{C}$  indica i numeri complessi, con la condizione di  $T$ -periodicità

$$f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

In tutto quanto segue useremo in maniera “disinvolta” la nozione di integrale, dando per buono che le operazioni che facciamo sono veramente lecite. Questo atteggiamento nasconde in realtà dei problemi, ma è l'unico possibile se non si vuole entrare in questioni sottili e complesse. Dato  $n$  intero relativo indicheremo con  $e_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  la funzione  $T$ -periodica definita da:

$$\mathbf{e}_n(t) := e^{in\omega_0 t}$$

**7.1 Proposizione.** *Si ha (se  $z \in \mathbb{C}$   $\bar{z}$  indica il coniugato di  $z$ )*

$$\int_0^T e_n(t) \overline{e_m(t)} dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m, \\ T & \text{se } n = m. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Se  $n \neq m$  si ha:

$$\int_0^T e_n(t) \overline{e_m(t)} dt = \int_0^T e^{in\omega_0 t} e^{-im\omega_0 t} dt = \int_0^T e^{i(n-m)\omega_0 t} dt = \left[ \frac{e^{i(n-m)\omega_0 t}}{i(n-m)\omega_0} \right]_0^T = 0$$

(perché  $t \mapsto e^{i(n-m)\omega_0 t}$  è periodica di periodo  $T$ ). Se  $n = m$ :

$$\int_0^T e_n(t) \overline{e_n(t)} dt = \int_0^T e^{i(n-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T dt = T.$$

$\square$

**7.2 Definizione.** Data una funzione  $f$   $T$ -periodica poniamo:

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k \mathbf{e}_k(t) \quad \text{dove } c_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Chiameremo  $f_n$  il *polinomio trigonometrico di Fourier* di  $f$  di ordine  $n$  e chiameremo *coefficienti di Fourier complessi* in numeri  $c_k$ .

Valgono i seguenti teoremi

**7.3 Teorema.** Se  $f$  è una funzione  $T$ -periodica, se  $t_0$  è un punto con le seguenti proprietà:

- $f$  è derivabile in un intorno sinistro  $]t_0 - \delta, t_0[$  e in un intorno destro  $]t_0, t_0 + \delta[$ ,
- $f'$  è continua e limitata sia in  $]t_0 - \delta, t_0[$  che in  $]t_0, t_0 + \delta[$ ,

allora esistono finiti i limiti destro e sinistro in  $t_0$

$$f(t_0^-) := \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t), \quad f(t_0^+) := \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$$

e i polinomi di Fourier in  $t_0$  tendono alla media tra  $f(t_0^-)$  e  $f(t_0^+)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$$

Quindi per avere la convergenza puntuale abbiamo dovuto chiedere  $f$  derivabile. In effetti non si può arrivare a chiedere la sola continuità: si potrebbe infatti vedere che esiste una funzione continua la cui serie di Fourier non converge in nessun punto !!!

**7.4 Teorema.** Supponiamo che  $f$  sia  $T$ -periodica e abbia derivata prima continua. Allora  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $[0, T]$ .

**7.5 Osservazione.** Dal primo dei teoremi precedenti segue in particolare che  $f$  univocamente determinata a partire dai suoi coefficienti di Fourier. Più precisamente Se  $f$  e  $g$  sono  $T$ -periodiche ed esistono un numero finito di punti  $t_1, \dots, t_k$  in  $[0, T]$  tali che  $f$  e  $g$  sono derivabili con derivata limitata in  $[0, T] \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$ , e se  $f$  e  $g$  hanno gli stessi coefficienti di Fourier, allora  $f(t) = g(t)$  per ogni  $t$  in  $[0, T] \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$ .

I teoremi scritti sopra danno delle condizioni per cui una funzione assegnata  $f$  si possa “sviluppare in serie di Fourier” In certi casi è utile avere dei risultati inversi: dati dei coefficienti  $c_k$  stabilire se la serie di Fourier ottenuta da tali coefficienti definisca una funzione. I seguenti teoremi rispondono (parzialmente) a questo problema.

**7.6 Proposizione.** Sia  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri complessi e indichiamo con  $f_n$  i polinomi trigonometrici associati ai  $c_k$ :  $f_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{-i\omega_0 kt}$ .

- Se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$  allora esiste una funzione continua e  $T$ -periodica  $f$  tale che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ . Inoltre i coefficienti di Fourier di  $f$  sono esattamente i numeri  $c_k$  di partenza.
- Se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n| < +\infty$ , allora  $f$  è derivabile,  $f$  ed  $f'$  sono continue e  $T$ -periodiche. Inoltre  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ ,  $f'_n$  converge uniformemente a  $f'$ . da cui

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n i\omega_0 n e^{-i\omega_0 nt}.$$

- In generale, dato un intero  $h$ , se  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$ , allora  $f$  ha derivate fino alla  $h$ -esima continue e  $T$  periodiche. Inoltre per ogni  $j = 0, 1, \dots, h$  si ha che  $f_n^{(j)}$  converge uniformemente a  $f^{(j)}$  da cui

$$f^{(j)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n i^j \omega_0^j n^j e^{-i\omega_0 nt}.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ . Allora, dato che le funzioni  $\mathbf{e}_n$  hanno modulo costantemente eguale a 1, si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n \mathbf{e}_n\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty.$$

(la norma uniforme essendo fatta su un qualunque intervallo  $[a, b]$ ) e quindi la tesi segue dal teorema (3.2). Dimostriamo ora che i coefficienti di Fourier di  $f$  sono proprio i  $c_k$ . Prendiamo un  $k$  in  $\mathbb{Z}$  e  $n$  in  $\mathbb{N}$  con  $n \geq |k|$ . Allora

$$\int_0^T f_n(t) e^{-i\omega_0 kt} dt = \sum_{j=-n}^n c_k \int_0^T \mathbf{e}_j(t) \overline{e_k(t)} dt = T c_k$$

(si è usata la Proposizione 7.1). Dato che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$

$$\int_0^T f(t) e^{-i\omega_0 t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T f_n(t) e^{-i\omega_0 t} dt = T c_k.$$

Supponiamo ora che  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |c_n| < +\infty$ ; notiamo che  $\mathbf{e}'_n = i\omega_0 n \mathbf{e}_n$  e allora:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n \mathbf{e}'_n\| = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |c_n| < +\infty.$$

e quindi la tesi segue dal corollario (3.3) (seconda affermazione). Il caso generale si fa in modo analogo.  $\square$

**7.7 Esempio.** Mostriamo che se  $f$  ha derivata seconda continua allora la serie di Fourier converge uniformemente, e quindi converge uniformemente a  $f$  per il Teorema (7.3) (questa è quindi una dimostrazione del Teorema 7.4, in ipotesi di regolarità più forti – dando comunque per buono il teorema sulla convergenza puntuale). Calcoliamo i coefficienti di Fourier di  $f$ . Integrando due volte per parti si ha

$$\begin{aligned} T c_k &= \int_0^T f(t) e^{-i\omega kt} dt = \underbrace{\left[ \frac{f(t) e^{-i\omega kt}}{-i\omega k} \right]_{t=0}^{t=T}}_{=0} + \int_0^T \frac{f'(t) e^{-i\omega kt}}{-i\omega k} dt = \\ &= \underbrace{\left[ \frac{f'(t) e^{-i\omega kt}}{\omega^2 k^2} \right]_{t=0}^{t=T}}_{=0} - \int_0^T \frac{f''(t) e^{-i\omega kt}}{\omega^2 k^2} dt = -\frac{1}{\omega^2 k^2} \int_0^T f''(t) e^{-i\omega kt} dt \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che  $f(t) e^{-i\omega kt}$  e  $f'(t) e^{-i\omega kt}$ , essendo  $T$ -periodiche, hanno gli stessi valori in 0 e  $T$ . Dato che

$$\left| \int_0^T f''(t) e^{-i\omega kt} dt \right| \leq T \max_{0 \leq t \leq T} |f''(t)|$$

e che  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$  si ha che  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_k| < +\infty$ , e dunque la tesi segue dal primo punto della Proposizione 7.6.

Vediamo ora la versione in  $\mathbb{R}$  dei risultati precedenti. Supponiamo che  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sia in  $T$ -periodica a valori reali. Siano  $c_k$  i coefficienti di Fourier di  $f$ . Allora

$$T c_{-k} = \int_0^T f(t) e^{ik\omega_0 t} dt = \int_0^T f(t) \overline{e^{-ik\omega_0 t}} dt = \overline{\int_0^T f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt} = T \overline{c_k}$$

cioè  $c_{-k} = \overline{c_k}$ . Si potrebbe dimostrare che vale anche il viceversa:  $c_{-k} = \overline{c_k} \Rightarrow f$  reale. Dunque

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n &= c_0 \mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \mathbf{e}_n + c_{-n} \mathbf{e}_{-n}) = c_0 \mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \mathbf{e}_n + \overline{c_n} \mathbf{e}_{-n}) = \\ c_0 \mathbf{e}_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re(c_n \mathbf{e}_n) &= c_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re(c_n) \cos(\omega_0 n t) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Im(c_n) \sin(\omega_0 n t) = \\ a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\omega_0 n t) \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \text{e per } k \geq 1: \\ a_k &= 2\Re(c_k) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_0 k t) dt \\ b_k &= -2\Im(c_k) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_0 k t) dt \end{aligned} \quad (16)$$

Si possono allora ritrovare gli stessi risultati di convergenza trovati nel caso complesso.

**7.8 Proposizione.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $T$ -periodica e siano  $(a_k)_{k \geq 0}$ ,  $(b_k)_{k \geq 1}$  definiti in (16). Poniamo*

$$f_n(t) := \sum_{k=0}^n a_k \cos(\omega_0 k t) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(\omega_0 k t). \quad (17)$$

Si ha che

- se  $f$  è derivabile in un intorno sinistro  $]t_0 - \delta, t_0[$  e in un intorno destro  $]t_0, t_0 + \delta[$  con  $f'$  è continua e limitata sia in  $]t_0 - \delta, t_0[$  che in  $]t_0, t_0 + \delta[$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2};$$

- se  $f$  ha derivata seconda continua, allora  $f_n$  converge a  $f$  uniformemente

Viceversa supponiamo che  $(a_k)_{k \geq 0}$  e  $(b_k)_{k \geq 1}$  siano due successioni di numeri reali tali che

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < +\infty.$$

Allora, definendo  $f_n$  come in (17), esiste una funzione continua e  $T$ -periodica  $f$  tale che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ . Inoltre sviluppando tale  $f$  in serie di Fourier si ha che i coefficienti dati da (16) coincidono con gli  $(a_k)_{k \geq 0}$  e  $(b_k)_{k \geq 1}$  di partenza.

**7.9 Osservazione.** Scriveremo di nuovo  $f = \sum_{L^2, k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$  per indicare che le due serie scritte a destra convergono in  $L^2$  e che  $f$  è la loro somma e ammetteremo anche la scrittura  $f = \sum_{unif., k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$  per indicare che la convergenza di entrambe le serie è uniforme su ogni intervallo  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$ .

**7.10 Osservazione.** Un altro modo di vedere le cose nel caso di  $f$  a valori reali, è il seguente. Sia  $k \neq 0$  e scriviamo  $c_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ . Per le (16) si ha  $a_k = 2\rho_k \cos(\theta_k)$  e  $b_k = -2\rho_k \sin(\theta_k)$  e dunque

$$a_k \cos(\omega_0 k t) + b_k \sin(\omega_0 k t) = 2\rho_k \cos(\omega_0 k t + \theta_k).$$

In sostanza il modulo del coefficiente  $c_k$  è legato all'ampiezza della componente (sinusoidale)  $a_k \cos(\omega_0 k t) + b_k \sin(\omega_0 k t)$  mentre l'argomento di  $c_k$  è legato alla fase di tale componente.

**7.11 Osservazione.** Dato che le funzioni che consideriamo sono  $T$ -periodiche è facile vedere che i coefficienti di Fourier di  $f$  si possono ottenere come

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-i\omega_0 n t} dt$$

qualunque sia  $t_0$  in  $\mathbb{R}$  (e lo stesso discorso vale per gli  $a_n/b_n$ ).

**7.12 Proposizione.** *Sia  $f$  in  $T$ -periodica. Allora*

1.  $f$  è reale se e solo se  $c_{-k} = \overline{c_k}$  per ogni  $k$ ;
2.  $f$  è pari se e solo se  $c_{-k} = c_k$  per ogni  $k$ ;
3.  $f$  è dispari se e solo se  $c_{-k} = -c_k$  per ogni  $k$ ;
4.  $f$  è reale pari se e solo se  $c_{-k} = c_k \in \mathbb{R}$  per ogni  $k$ ; questo è equivalente a dire che  $b_k = 0$  per ogni  $k$ ;
5.  $f$  è reale dispari se e solo se  $c_{-k} = -c_k \in i\mathbb{R}$  per ogni  $k$  (cioè i  $c_k$  sono immaginari puri); questo è equivalente a dire che  $a_k = 0$  per ogni  $k$ ;

*Dimostrazione.* La prima proprietà è già stata vista prima. Dimostriamo la seconda supponendo  $f$  pari. Usando il cambio di variabile  $s = -t$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_0 k t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(-t) e^{-i\omega_0 k t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(s) e^{i\omega_0 k s} ds$$

da cui  $c_k = c_{-k}$ . In modo analogo si ragiona se  $f$  è dispari. Le altre proprietà seguono combinando quelle trovate e utilizzando l'espressione degli  $a_k, b_k$ .  $\square$

**7.13 Definizione.** Se  $f$  è una funzione e  $t_0 \in \mathbb{R}$  indichiamo con  $f_{t_0}$  la funzione translata di  $t_0$   $f_{t_0}(t) := f(t - t_0)$ .

**7.14 Proposizione.** *Siano  $f$  in  $L^2_{per}(T)$  e  $t_0$  in  $[0, T]$ , e chiamiamo  $c_k^*$  i coefficienti di Fourier di  $f_{t_0}$ . Allora  $c_k^* = e^{-i\omega_0 t_0 k} c_k$ .*

*Dimostrazione.* Con un semplice cambio di variabile nell'integrale

$$c_k^* = \frac{1}{T} \int_0^T f(t - t_0) e^{-i\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} f(\tau) e^{-i\omega_0 k (\tau + t_0)} dt = \frac{e^{-i\omega_0 k t_0}}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-i\omega_0 k \tau} dt = e^{-i\omega_0 t_0 k} c_k.$$

$\square$

## 8 La serie di Fourier in $L^2$

In questo paragrafo cerchiamo di dare alcune idee su quella che sarebbe "l'ambientazione corretta" delle serie di Fourier. Come nel paragrafo precedente (e ancora di più) la nozione di integrale sarà utilizzata in maniera assai imprecisa, senza preoccuparci di dire se veramente (e in che senso!!) le funzioni che consideriamo siano effettivamente integrabili. In effetti per rendere rigorose le costruzioni che ora introdurremo sarebbe necessario considerare una nozione più generale di integrale (quella di integrale di Lebesgue).

**8.1 Definizione.** Data una funzione  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ , oppure una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  che sia  $T$ -periodica, chiamiamo *energia* di  $f$  l'espressione (eventualmente infinita)

$$\mathcal{E}(f) := \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

L'insieme delle funzioni  $f$  con energia finita si indica con  $L^2(0, T)$ , mentre indicheremo con  $L_T^2$  l'insieme delle funzioni  $T$ -periodiche con energia finita (non c'è una grossa differenza tra i due, ma sono oggetti formalmente diversi dato che le funzioni di  $L_T^2$  sono definite su tutto  $\mathbb{R}$ ). Se  $f \in L_T^2$  (cioè se è  $T$ -periodica con energia finita) possiamo definire la sua *norma*  $L^2$ :

$$\|f\|_2 := \sqrt{\mathcal{E}(f)} = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

Non è difficile vedere che  $L_T^2$  è uno “spazio lineare”, cioè che, se  $f, g \in L_T^2$  e se  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  allora  $\alpha f + \beta g \in L_T^2$ . La norma della differenza  $\|f - g\|_2$  è allora una valutazione della “distanza tra le due funzioni  $f$  e  $g$ ”, misurata in maniera integrale.

Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni di  $L_T^2$  definiamo il loro *prodotto scalare* ponendo

$$\langle f, g \rangle := \int_0^T f(t)\bar{g}(t) dt$$

Notiamo che  $\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2$ . Il prodotto scalare permette di considerare una nozione di *ortogonalità* tra le funzioni di  $L_T^2$ .

**8.2 Proposizione** (disuguaglianza di Schwartz). *Se  $f$  e  $g$  sono in  $L_T^2$  allora  $f\bar{g}$  è integrabile e vale la disuguaglianza*

$$\left| \int_0^T f(t)\bar{g}(t) dt \right|^2 \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \int_0^T |g(t)|^2 dt$$

che equivale a dire

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad \forall f, g \in L_T^2.$$

**8.3 Osservazione.** Le funzioni esponenziali  $\mathbf{e}_k$  introdotte nel paragrafo precedente hanno la proprietà  $\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_h \rangle = 0$  se  $h \neq k$  – sono cioè tra loro “ortogonali”. Inoltre esse hanno tutte la medesima norma  $\|\mathbf{e}_k\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \rangle} = \sqrt{T}$ . Questo è una rilettura della Proposizione 7.1 in termini dei prodotti scalari e delle norme.

Inoltre se  $f \in L_T^2$ , allora i coefficienti di Fourier  $c_k$  di  $f$  e i polinomi di Fourier  $f_n$ , introdotti nella Definizione 7.2 sono ben definiti e si ha  $c_k = \frac{\langle f, \mathbf{e}_k \rangle}{\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \rangle} = \frac{\langle f, \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|_2^2}$ .

**8.4 Definizione.** Per  $n$  in  $\mathbb{N}$  poniamo

$$E_n := \left\{ \sum_{k=-n}^n \lambda_k \mathbf{e}_k : \lambda_k \in \mathbb{C}, k = -n, \dots, n \right\};$$

quindi  $E_n$  è il “sottospazio di dimensione finita” (pari a  $2n+1$ ) generato da  $\mathbf{e}_{-n}, \dots, \mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n$ .

**8.5 Proposizione.** *Sia  $f$  una funzione di  $L_T^2$  e sia  $n$  un numero intero fissato. Allora il polinomio di Fourier  $f_n$  ha le seguenti proprietà:*

- $f_n \in E_n$ ;
- per ogni  $g$  in  $E_n$  si ha  $\langle f - f_n, g \rangle = 0$ ;
- per ogni  $g$  in  $E_n$  si ha:

$$\|f - g\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n - g\|_2^2 \quad (18)$$

e quindi  $f_n$  è l'elemento in  $E_n$  che ha minima distanza ( $L^2$ ) da  $f$ ;

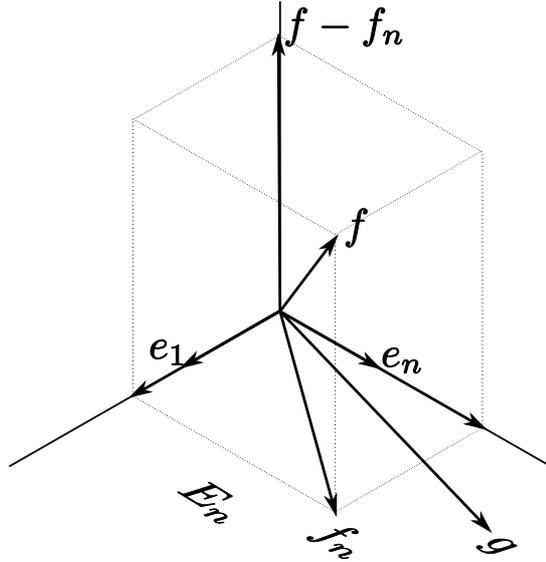


Figura 9: Le componenti di  $f$  in  $L^2$

- si ha inoltre

$$\|f\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f - f_n\|_2^2$$

*Dimostrazione.* Per seguire la dimostrazione conviene visualizzare gli oggetti in gioco sulla figura 9.

La prima affermazione è ovvia. Per dimostrare la seconda basta notare che per ogni  $j$  tra  $-n$  ed  $n$ :

$$\langle f_n, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{k=-n}^n \langle c_k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = c_j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle = T c_j = \langle f, \mathbf{e}_j \rangle.$$

Dunque  $\langle f - f_n, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ ; ne segue che se  $g = \sum_{j=-n}^n \lambda_j \mathbf{e}_j$  si ha  $\langle f - f_n, g \rangle = 0$ .

Dimostriamo (18); presa una  $g$  in  $E_n$ :

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \|(f - f_n) + (f_n - g)\|_2^2 = \langle (f - f_n) + (f_n - g), (f - f_n) + (f_n - g) \rangle = \\ &= \|f - f_n\|_2^2 + 2\Re \langle f - f_n, f_n - g \rangle + \|f_n - g\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n - g\|_2^2 \end{aligned}$$

perché  $(f_n - g) \in E_n$  e quindi è ortogonale a  $(f - f_n)$ . Ne segue che  $\|f - g\|_2^2 \geq \|f - f_n\|_2^2$  e l'eguaglianza vale esattamente quando  $g = f_n$ ; dunque  $f_n$  è il punto in  $E_n$  di minima distanza da  $f$ . Per dimostrare l'ultima relazione basta prendere  $g = 0$  in (18).  $\square$

**8.6 Teorema.** Se  $f \in L_T^2$ , cioè se  $f$  è  $T$ -periodica e con energia finita, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0. \quad (19)$$

Inoltre vale la eguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad (20)$$

Viceversa se  $(c_k)$  è una successione di numeri complessi tale che  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$  e se  $f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega_0 k t}$ , allora esiste una  $f$  in  $L_T^2$  tale che valgono (19) e (20)

In sostanza la relazione (19) dice che le  $f_n$  “tendono a  $f$  in energia”, nel senso che l’energia della differenza tende a zero. Si può esprimere questo fatto scrivendo:

$$f \underset{L_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathbf{e}_n$$

Dato che questo tipo di convergenza è di natura integrale essa, in generale, non ripetta la continuità e tantomeno la differenziabilità. Come abbiamo già detto è possibile dimostrare che ci sono funzioni continue, e quindi a energia finita, per cui la serie di Fourier non converge puntualmente in alcun punto (mentre deve convergere in energia, per quanto appena detto). Nonostante questo rimane vero che i coefficienti di Fourier “individuano univocamente” la funzione – almeno in senso integrale.

**8.7 Proposizione** (completezza dei polinomi trigonometrici). *Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni di  $L^2_T$  che hanno gli stessi coefficienti di Fourier, allora  $f(t) = g(t)$  “per quasi ogni  $t$ ”.*

La locuzione “per quasi ogni  $t$ ” significa che l’insieme delle  $t$  per cui l’eguaglianza non vale è *trascurabile*, cioè che ha misura nulla – per dare rigorosamente questa nozione sarebbe necessario introdurre compiutamente la teoria dell’integrale secondo Lebesgue. È per esempio vero che un insieme con un numero finito di punti è trascurabile, di modo che la proposizione ora enunciata generalizza l’osservazione 7.5 del paragrafo precedente,

*Idea della dimostrazione della Proposizione precedente.*

Supponiamo che  $f$  e  $g$  abbiano gli stessi coefficienti di Fourier. Allora, per linearità, la differenza  $h := f - g$  ha tutti coefficienti nulli. Per l’uguaglianza di Parseval risulta  $\int_0^T |h(t)|^2 dt = 0$ . Per le proprietà degli integrali (che non conosciamo ...) deve essere  $h(t) = 0$  per quasi ogni  $t$ .  $\square$

## 9 Alcuni esempi di sviluppi in serie di Fourier

**9.1 Esempio** (onda quadra). Sia

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

ed eventualmente estesa per periodicità (con periodo  $T$ ) a tutto  $\mathbb{R}$ . Calcoliamo lo sviluppo in serie di Fourier di  $f$ . Applicando le formule si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dt = 0;$$

e per  $k \neq 0$ :

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0 kt} dt - \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-i\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_0^{T/2} - \frac{1}{T} \left[ \frac{e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_{T/2}^T = \\ &= \frac{i}{2\pi k} (e^{-ik\pi} - 1) - \frac{i}{2\pi k} (1 - e^{-ik\pi}) = \frac{i}{\pi k} ((-1)^k - 1) \end{aligned}$$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_k = 0, \quad b_k = 2 \frac{1 - (-1)^k}{\pi k}$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\pi k} \sin(\omega_0 kt) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t)$$

Nelle figure 10, 11, 12 sono riportati i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini  $n$ . Si noti come l’approssimazione (che come abbiamo visto è in energia) diventi *cattiva* vicino ai punti di salto anche per  $n$  grande.

**9.2 Esempio** (dente di sega). Sia

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ t - T & \text{se } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

estesa per periodicit  (con periodo  $T$ ) a tutto  $\mathbb{R}$ . Per calcolare i coefficienti di Fourier possiamo usare l'intervallo  $[-T/2, T/2]$  invece di  $[0, T]$ , notando che  $f(t) = t$  in tale intervallo. Si ha allora:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \, dt = 0;$$

e per  $k \neq 0$  (integrando per parti):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t e^{-i\omega_0 k t} \, dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{t e^{-i\omega_0 k t}}{-i\omega_0 k} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} \frac{1}{i\omega_0 k} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0 k t} \, dt = \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{\frac{T}{2} e^{-i\omega_0 k \frac{T}{2}} + \frac{T}{2} e^{i\omega_0 k \frac{T}{2}}}{k} + 0 = \frac{iT}{4\pi k} (e^{-\pi k i} + e^{\pi k i}) = (-1)^k \frac{iT}{2\pi k} = (-1)^k \frac{i}{\omega_0 k}. \end{aligned}$$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_k = 0, \quad b_k = -(-1)^k \frac{T}{\pi k} = -(-1)^k \frac{2}{\omega_0 k}.$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} -\frac{T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\omega_0 t).$$

Nelle figure 13, 14, 15 sono riportato i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini  $n$ . Anche in questo caso l'approssimazione non   molto buona vicino al punto di salto.

**9.3 Esempio** (onda triangolare). Sia  $f(t) := |t| - \frac{T}{4}$  se  $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ , estesa per periodicit  (con periodo  $T$ ) a tutto  $\mathbb{R}$ . Si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left( t - \frac{T}{4} \right) \, dt = \frac{2}{T} \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{Tt}{4} \right]_0^{\frac{T}{2}} = 0;$$

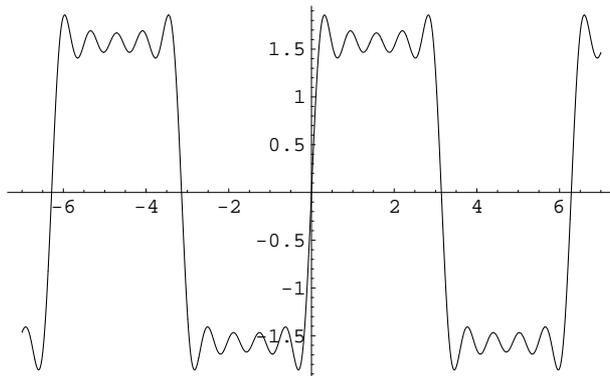


Figura 10: Onda quadra: polinomio di Fourier di ordine  $n = 10$

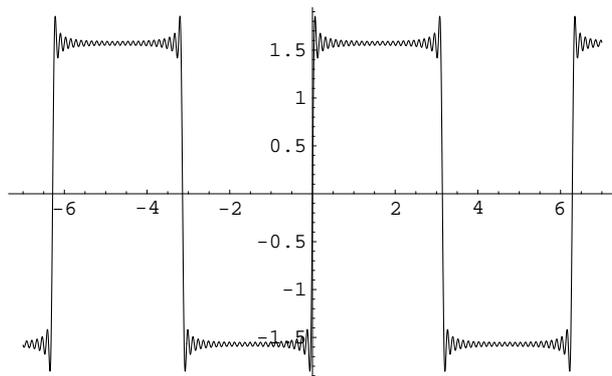


Figura 11: Onda quadra: polinomio di Fourier di ordine  $n = 50$

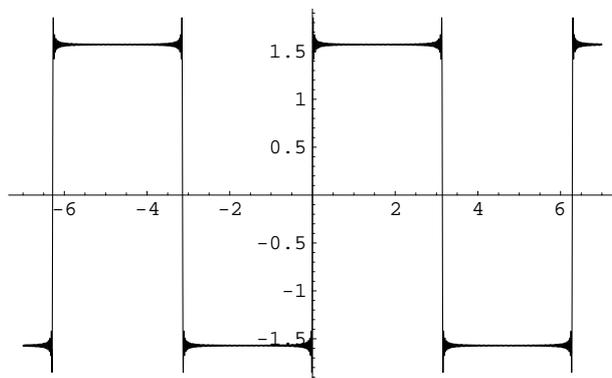


Figura 12: Onda quadra: polinomio di Fourier di ordine  $n = 200$

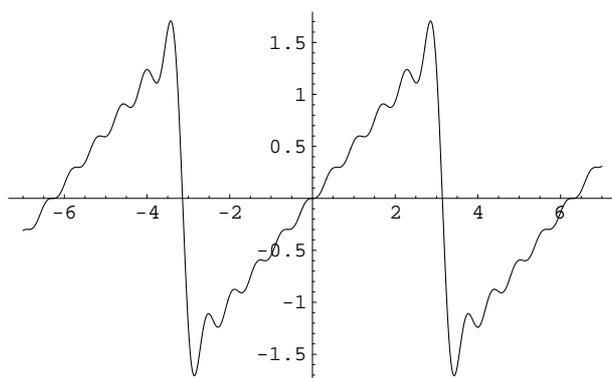


Figura 13: Dente di sega: polinomio di Fourier di ordine  $n = 10$

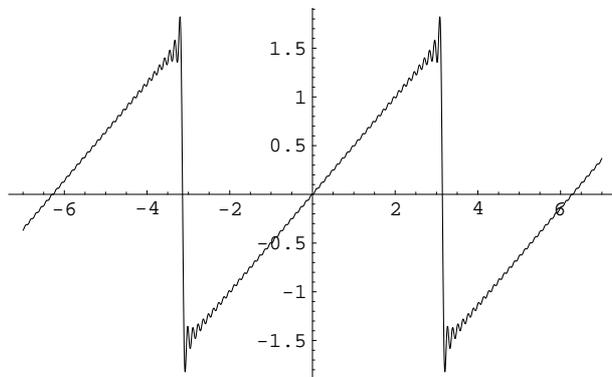


Figura 14: Dente di sega: polinomio di Fourier di ordine  $n = 50$

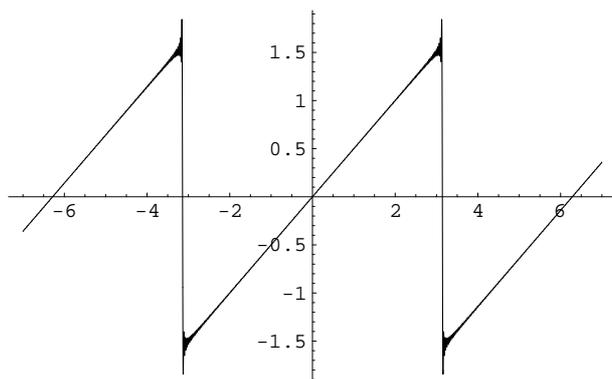


Figura 15: Dente di sega: polinomio di Fourier di ordine  $n = 200$

e per  $k \neq 0$  (si usa l'integrazione per parti):

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( |t| - \frac{T}{4} \right) e^{-i\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{(|t| - \frac{T}{4}) e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_{-T/2}^{T/2} + \\
&\quad - \frac{1}{T} \frac{1}{-i\omega_0 k} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) e^{-i\omega_0 kt} dt - \frac{1}{T} \frac{1}{-i\omega_0 k} \int_0^{\frac{T}{2}} (+1) e^{-i\omega_0 kt} dt = 0 + \\
&\quad \frac{i}{2\pi k} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^0 e^{-i\omega_0 kt} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0 kt} dt \right\} = \frac{i}{2\pi k} \left\{ \left[ \frac{e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_{-\frac{T}{2}}^0 - \left[ \frac{e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_0^{\frac{T}{2}} \right\} = \\
&\quad \frac{1}{2\pi\omega_0 k^2} (-1 + e^{ik\pi} + e^{-ik\pi} - 1) = \frac{1}{\pi\omega_0 k^2} ((-1)^k - 1) = \frac{T}{2\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1)
\end{aligned}$$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_k = 0, \quad \text{e per } k > 0 \quad a_k = \frac{T}{\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1), \quad b_k = 0$$

e quindi

$$f(t) \stackrel{L_2}{=} \frac{T}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(k\omega_0 t) = -\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0 t).$$

Dato però che la serie dei moduli dei coefficienti  $\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$  è convergente si può dire che

$$f(t) \stackrel{unif.}{=} -\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0 t)$$

e in particolare la serie sopra converge a  $f(t)$  in ogni  $t$ . Nelle figure 16, 17, 18 sono riportato i grafici dei polinomi di Fourier di diversi ordini  $n$ . Stavolta l'approssimazione è nettamente migliore (per ordini  $n$  anche più bassi dei precedenti). A cercare il pelo nell'uovo c'è qualche problema nell'approssimare gli spigoli, che sono sempre un po' tondi nelle approssimanti. Si può anche notare che la serie delle derivate è

$$-\frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} [-(2k+1)\omega_0 \sin((2k+1)\omega_0 t)] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t),$$

che è la serie di Fourier dell'onda quadra esaminata nel primo esempio. Dunque l'onda quadra è la derivata in senso di  $L^2$  dell'onda triangolare. Osserviamo che quest'ultima non è  $\mathcal{C}^1$  dato che non è derivabile in zero.

**9.4 Esempio.** Sia  $f(t) = t^2$  per  $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$  (estesa per periodicità su tutto  $\mathbb{R}$ ). Si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2 dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{T^2}{12};$$

e per  $k \neq 0$  (integrando due volte per parti):

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t^2 e^{-i\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{t^2 e^{-i\omega_0 kt}}{-i\omega_0 k} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} \frac{1}{i\omega_0 k} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2te^{-i\omega_0 kt} dt = \\
&\quad 0 + \frac{1}{T} \left[ \frac{2te^{-i\omega_0 kt}}{\omega_0^2 k^2} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2e^{-i\omega_0 kt}}{\omega_0^2 k^2} dt = \frac{1}{T\omega_0^2 k^2} \left( 2\frac{T}{2} e^{-ik\pi} + 2\frac{T}{2} e^{ik\pi} \right) + 0 = \\
&\quad \frac{2}{\omega_0^2 k^2} (-1)^k = \frac{T^2}{2\pi^2 k^2} (-1)^k.
\end{aligned}$$

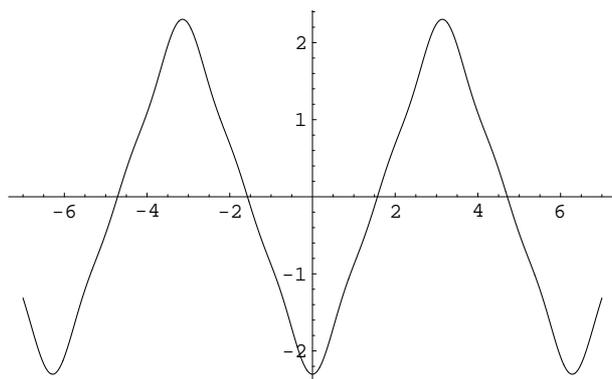


Figura 16: Onda triangolare: polinomio di Fourier di ordine  $n = 5$

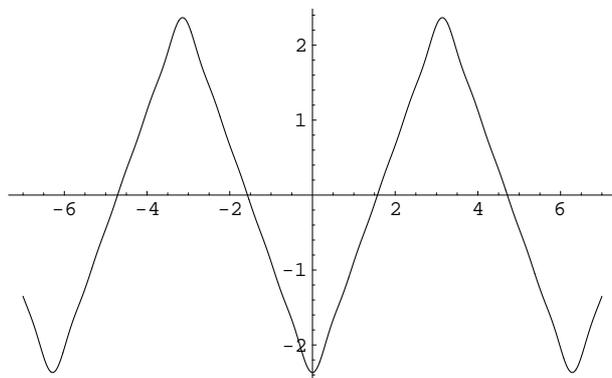


Figura 17: Onda triangolare: polinomio di Fourier di ordine  $n = 10$

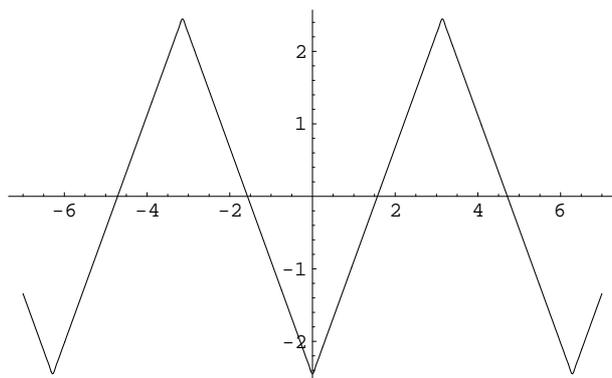


Figura 18: Onda triangolare: polinomio di Fourier di ordine  $n = 50$

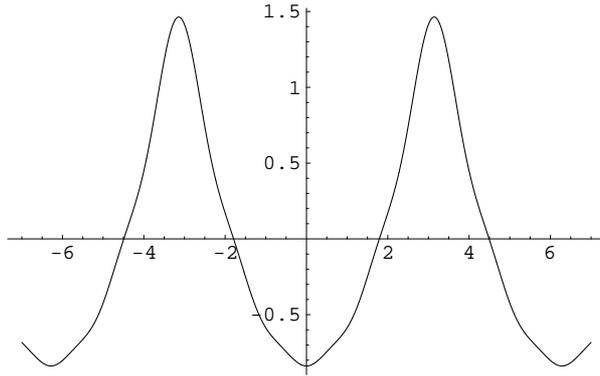


Figura 19:  $f(t) = t^2 - \pi^2/3$ : polinomio di Fourier di ordine  $n = 5$

Passando alla forma reale di ha:

$$a_0 = \frac{T^2}{12}, \quad \text{e per } k > 0 \quad a_k = \frac{T^2}{\pi^2} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad b_k = 0$$

e quindi

$$f(t) \underset{L_2}{=} \frac{T^2}{12} + \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\omega_0 t)$$

Dato che  $\sum \frac{1}{k^2} < +\infty$  si deduce

$$f(t) \underset{unif.}{=} \frac{T^2}{12} + \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\omega_0 t)$$

(e in particolare la serie converge puntualmente a  $f$ ). Se  $T = 2\pi$  si ha allora:

$$t^2 \underset{unif.}{=} \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kt) \quad \text{su } [-\pi, \pi]$$

Calcolando il tutto in  $t = 0$  e rispettivamente in  $t = \pi$  si ritrovano le formule:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Riportiamo anche per questo esempio (vedi figure 19, 20, 21) i grafici di alcuni polinomi di Fourier approssimanti - la situazione è simile a quella dell'onda triangolare. In effetti la funzione  $f$  che stiamo esaminando non è  $\mathcal{C}^1$  (anche se la formula  $f(t) = t^2$  potrebbe suggerire che lo sia). Per capirlo dobbiamo ricordare che la  $f$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$  e vale  $t^2$  solo in  $[-T/2, T/2]$ , mentre fuori da questo intervallo è estesa in modo da risultare periodica di periodo  $T$  (come è chiaro dai grafici delle approssimanti). Vista così è chiaro che  $f$  non è derivabile nei punti  $\pm T/2$ . In effetti se calcoliamo la serie delle derivate troviamo

$$\frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} [-k\omega_0 \sin(k\omega_0 t)] = -\frac{2T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\omega_0 t).$$

I coefficienti di quest'ultima serie sono solo a quadrato sommabile (mentre non sono sommabili) e quindi la derivata c'è solo nel senso di  $L^2$ .

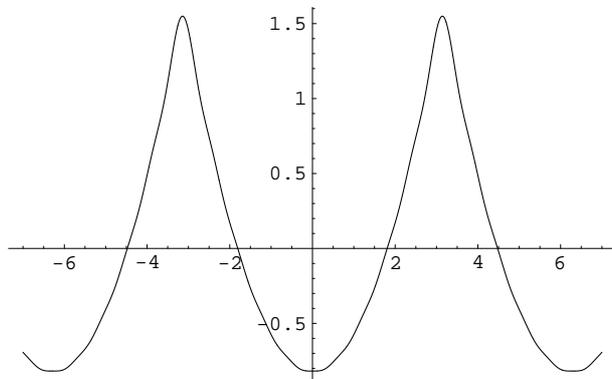


Figura 20:  $f(t) = t^2 - \pi^2/3$ : polinomio di Fourier di ordine  $n = 10$

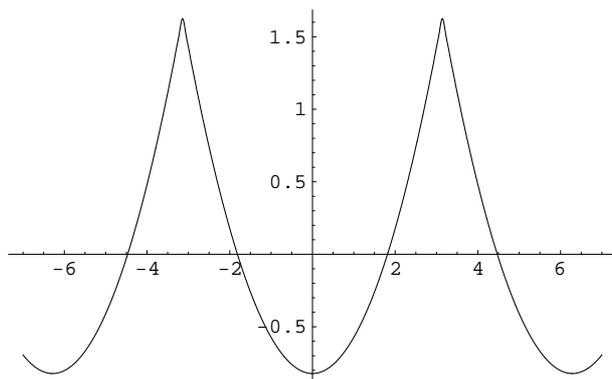


Figura 21:  $f(t) = t^2 - \pi^2/3$ : polinomio di Fourier di ordine  $n = 50$

## 10 Serie di Fourier con soli seni o soli coseni. Funzioni nulle agli estremi

In questo paragrafo fissiamo  $L > 0$  e poniamo  $\tilde{\omega} := \frac{\pi}{L}$  (cioè la metà della frequenza angolare considerata nel paragrafo precedente). Scriveremo  $L$  al posto di  $T$  e  $x$  al posto di  $t$  per segnalare un “cambio di punto di vista” – non pensiamo più alla variabile come un tempo, ma come una variabile spaziale.

Dato  $k$  intero positivo indicheremo anche con  $\mathbf{s}_k : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni  $\mathbf{s}_k(x) := \sin(\tilde{\omega}kx)$ ; notiamo che le funzioni  $\mathbf{s}_k$  sono nulle in 0 e in  $L$ , qualunque sia  $k$ .

Se  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione definiamo, per  $k$  intero,  $k \geq 1$

$$u_k := \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \mathbf{s}_k(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k\tilde{\omega}x) dx \quad (21)$$

che saranno detti coefficienti di Fourier di  $f$  rispetto ai seni, e chiamiamo polinomio di Fourier di  $f$  rispetto ai soli seni l'espressione

$$f_{s,n}(x) := \sum_{k=1}^n u_k \mathbf{s}_k(x) = \sum_{k=1}^n u_k \sin(k\tilde{\omega}x)$$

Analogamente possiamo prendere le funzioni  $\mathbf{c}_k(x) := \cos(\tilde{\omega}kx)$  (notiamo che le funzioni  $\mathbf{c}_k$  hanno derivata prima nulla in 0 e in  $L$ , qualunque sia  $k$ ) e definire, per  $k$  intero,  $k \geq 1$

$$v_k := \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \mathbf{c}_k(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(k\tilde{\omega}x) dx \quad (22)$$

mentre  $v_0$  sarà la media di  $f$  su  $[0, L]$

$$v_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos(0) dx$$

I  $v_k$  saranno detti coefficienti di Fourier di  $f$  rispetto ai coseni, e chiamiamo polinomio di Fourier di  $f$  rispetto ai soli coseni l'espressione

$$f_{c,n}(x) := \sum_{k=0}^n v_k \mathbf{c}_k(x) = \sum_{k=0}^n v_k \cos(k\tilde{\omega}x)$$

**10.1 Teorema.** *Se  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione, se  $x_0$  è un punto di  $]0, L[$  con le seguenti proprietà:*

- *$f$  è derivabile in un intorno sinistro  $]x_0 - \delta, x_0[$  e in un intorno destro  $]x_0, x_0 + \delta[$ ,*
- *$f'$  è continua e limitata sia in  $]x_0 - \delta, x_0[$  che in  $]x_0, x_0 + \delta[$ ,*

Allora

$$f_{s,n}(x) \rightarrow \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}, \quad f_{c,n}(x) \rightarrow \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

(ricordiamo che limiti destro e sinistro in  $x_0$  esistono finiti). Inoltre, se  $f'$  esiste, continua e limitata, in  $]0, \delta[$ , allora

$$f_{s,n}(0) \rightarrow 0, \quad f_{c,n}(0) \rightarrow f(0^+);$$

mentre, se  $f'$  esiste, continua e limitata, in  $]L - \delta, L[$ , allora

$$f_{s,n}(L) \rightarrow 0, \quad f_{c,n}(L) \rightarrow f(L^-)$$

*Dimostrazione.* Estendiamo  $f$  a  $[-L, L]$  in modo che sia dispari, ponendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, L] \\ -f(-x) & \text{se } x \in [-L, 0] \end{cases}$$

Per i risultati del paragrafo precedente

$$\tilde{f}_n(x_0) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(\tilde{\omega}kt) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(\tilde{\omega}kt) \rightarrow \frac{\tilde{f}(x_0^+) + \tilde{f}(x_0^-)}{2}.$$

Ma essendo  $\tilde{f}$  dispari tutti gli  $a_k$  sono eguali a zero, mentre

$$b_k = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L \tilde{f}(x) \sin(\tilde{\omega}kx) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{f}(x) \sin(\tilde{\omega}kx) dx = u_k$$

La tesi segue notando che

$$\frac{\tilde{f}(x_0^+) + \tilde{f}(x_0^-)}{2} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \text{ se } 0 < x_0 < L, \quad \frac{\tilde{f}(0^+) + \tilde{f}(0^-)}{2} = -\frac{\tilde{f}(L^+) + \tilde{f}(L^-)}{2} = 0.$$

Per quanto riguarda lo sviluppo rispetto ai coseni basta definire  $\tilde{f}$  in modo pari su  $[-L, L]$  e ripetere gli stessi ragionamenti.  $\square$

Similmente si può dimostrare il seguente risultato.

**10.2 Teorema.** *Supponiamo che  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$  abbia derivata prima continua e che  $f(0) = f(L) = 0$ . Allora  $f_{s,n} \rightarrow f$  uniformemente su  $[0, L]$ .*

*Supponiamo che  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$  abbia derivata prima continua, che  $f(0) = f(L)$  e che  $f'(0) = f'(L) = 0$ . Allora  $f_{c,n} \rightarrow f$  uniformemente su  $[0, L]$ .*

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente si hanno delle proprietà di regolarità della funzione  $f$  a seconda della sommabilità degli  $u_n$ .

**10.3 Proposizione.** *Sia  $(u_n)_{n \geq 1}$  una successione di numeri reali.*

*Definiamo  $f_{s,n}(x) := \sum_{k=1}^n u_k \sin(k\tilde{\omega}x)$ .*

- *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$ , allora  $f_{s,n}$  converge uniformemente a una funzione  $f$  continua e tale che  $f(0) = f(L) = 0$ . Tale  $f$  verifica inoltre  $\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k\tilde{\omega}x) dx = u_k$  per ogni  $k$ .*
- *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n| < +\infty$ , allora la  $f$  è derivabile, con derivata continua  $f'$ ,  $f(0) = f(L) = 0$ ,  $f'$  è limite uniforme della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}'_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega}u_n \mathbf{c}_n$ .*
- *In generale, dato un intero  $h$ , se  $\sum_{n=1}^{\infty} n^h |u_n| < +\infty$ , allora  $f$  è derivabile  $h$  volte e tutte le derivate fino alla  $h$ -esima sono continue. Di tali derivate quelle ordine pari (compresa la funzione) sono nulle agli estremi dell'intervallo. Infine per ogni  $j$  compreso tra 0 e  $h$   $f_n^{(j)}$  è limite uniforme di  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \mathbf{s}_n^{(j)}$  (che è una serie di seni o di coseni a seconda che  $j$  sia pari o dispari).*

Un analogo discorso vale per le serie di coseni.

**10.4 Proposizione.** *Sia  $(v_n)_{n \geq 0}$  una successione di numeri reali.*

*Definiamo  $f_{c,n}(x) := \sum_{k=0}^n u_k \cos(k\tilde{\omega}x)$ .*

- Se  $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n| < +\infty$ , allora  $f_{c,n}$  converge uniformemente a una funzione  $f$  continua. Tale  $f$  verifica inoltre  $\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(k\tilde{\omega}x) dx = v_k$  per ogni  $k \geq 1$  e  $\frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx = v_0$ .
- Se  $\sum_{n=0}^{\infty} n|v_n| < +\infty$ , allora la  $f$  è derivabile, con derivata continua  $f'$   $f'$  è limite uniforme della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}'_n = - \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{\omega}v_n \mathbf{s}_n$  e  $f'(0) = f'(L) = 0$ .
- In generale, dato un intero  $h$ , se  $\sum_{n=0}^{\infty} n^h |u_n| < +\infty$ , allora  $f$  è derivabile  $h$  volte e tutte le derivate fino alla  $h$ -esima sono continue. Di tali derivate quelle ordine dispari sono nulle agli estremi dell'intervallo. Infine per ogni  $j$  compreso tra 0 e  $h$   $f_n^{(j)}$  è limite uniforme di  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathbf{c}_n^{(j)}$  (che è una serie di seni o di coseni a seconda che  $j$  sia dispari o pari).

Anche nel caso delle serie di soli seni o soli coseni l'ambiente in cui si ottengono i risultati più simmetrici è quello delle funzioni a energia finita  $L^2([0, L])$

**10.5 Teorema (\*).** Sia  $f$  in  $L^2([0, L])$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_{s,n}\|_2 = 0. \quad (23)$$

Inoltre vale la eguaglianza di Parseval

$$\int_0^L |f(t)|^2 dt = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2 \quad (24)$$

Viceversa se  $(u_k)$  è una successione di numeri complessi tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty$  e se  $f_{s,n}(t) = \sum_{k=1}^n u_k \sin(k\tilde{\omega}t)$ , allora esiste una  $f$  in  $L^2([0, L])$  tale che valgano (23) e (24)

Inoltre per tale  $f$  vale  $\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k\tilde{\omega}x) dx = u_k$  per ogni  $k$ .

Analogamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_{c,n}\|_2 = 0. \quad (25)$$

Anche in questo caso vale la eguaglianza di Parseval

$$\int_0^L |f(t)|^2 dt = Lv_0^2 + \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |v_n|^2 \quad (26)$$

Viceversa se  $(v_k)$  è una successione di numeri complessi tale che  $\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2 < +\infty$  e se  $f_{c,n}(t) = \sum_{k=0}^n v_k \sin(k\tilde{\omega}t)$ , allora esiste una  $f$  in  $L^2([0, L])$  tale che valgano (25) e (26).

Infine per tale  $f$  vale  $\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(k\tilde{\omega}x) dx = v_k$  per ogni  $k \geq 1$  e  $\frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx = v_0$

## 11 Un'applicazione a problemi di equazioni differenziali ordinarie con condizioni agli estremi

Sia  $L > 0$ . Vogliamo trovare soluzioni del problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{in } [0, L], \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad (P_f)$$

al variare del parametro reale  $\lambda$  e del termine noto  $f(x)$ . Per risolvere il problema facciamo prima un discorso euristico che poi proveremo a rendere rigoroso. Facciamo l'ipotesi che  $f$  sia esprimibile mediante una serie di Fourier di soli seni, cioè che in qualche senso:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(n\tilde{\omega}x)$$

( $\tilde{\omega} = \frac{\pi}{L}$ ) e cerchiamo la soluzione  $y$  anch'essa come serie:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin(n\tilde{\omega}x)$$

Quindi è data la successione  $(f_n)$  e l'incognita è la successione  $(y_n)$  – notiamo che le funzioni  $s_n(x)$  mediante le quali cerchiamo di esprimere  $y$  sono tutte nulle in 0 e in  $L$ , quindi è ragionevole aspettarsi che se si riesce a trovare  $y$  essa sarà nulla in 0 e  $L$ . Ammettendo che la soluzione  $y$  esista, sia scrivibile come sopra e che si possa derivare per serie si ottiene:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n s'_n(x), \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y'_n s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \tilde{\omega}^2 n^2 \sin(n\tilde{\omega}x).$$

Eguagliando i due membri dell'equazione differenziale e sfruttando l'unicità dei coefficienti di Fourier si ottiene

$$(\tilde{\omega}^2 k^2 + \lambda)y_k = f_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

A questo punto si presentano due possibilità:

- (a) si ha che  $\tilde{\omega}^2 k^2 + \lambda \neq 0$  per ogni intero  $k$  (per esempio se  $\lambda > 0$ );
- (b) c'è un intero  $k_0$  tale che  $\tilde{\omega}^2 k_0^2 + \lambda = 0$  – questa seconda possibilità vuole semplicemente dire che  $\lambda$  è il quadrato di un numero intero (che indichiamo con  $k_0$ ).

Esaminiamo distintamente i due casi. Nel caso (a) la relazione (27) individua univocamente tutti gli  $y_k$  mediante

$$y_k = \frac{f_k}{\tilde{\omega}^2 k^2 + \lambda} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

A questo punto il problema si riduce a chiedersi se la serie di seni scritta mediante gli  $y_k$  trovati sopra sia ben definita e se sia effettivamente possibile fare i passaggi indicati sopra e trovare che  $y$  risolve il problema. Per questo dobbiamo precisare le ipotesi su  $f$ .

Supponiamo di sapere che  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < +\infty$ . Dalla definizione degli  $y_k$  è facile dedurre che

$$k^2 |y_k| = \frac{k^2}{\tilde{\omega}^2 k^2 + \lambda} |f_k| \leq \text{costante} |f_k|$$

e quindi  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |y_n| < +\infty$ . Per i risultati del paragrafo precedente la funzione  $y$  definita dalla serie  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n s_n$  è continua, **zero agli estremi dell'intervallo**, derivabile due volte e le sue derivate prima e seconda sono limite uniforme delle corrispondenti serie delle derivate. Quindi siamo autorizzati a derivare sotto il segno di serie e fare effettivamente i passaggi detti prima, ottenendo infine che  $y$  è soluzione di  $(P_f)$ .

Consideriamo il caso (b). Scrivendo la (27) per  $k = k_0$  otteniamo  $f_{k_0} = 0$ . Questa è una **condizione di compatibilità** necessaria affinché il problema  $(P_f)$  abbia soluzione (se  $f_{k_0} \neq 0$   $(P_f)$  non ha nessuna soluzione). Se tale condizione è verificata allora da (27) deduciamo la (28) per tutti i  $k \neq k_0$ , mentre per  $k = k_0$  (27) è automaticamente verificata, qualunque sia il numero  $y_{k_0}$ . Ne segue che definita

$$y(x) = \sum_{k \neq k_0, k \geq 1} \frac{f_k}{\tilde{\omega}^2 k^2 + \lambda} \sin(k\tilde{\omega}x) + \bar{y} \sin(k_0\tilde{\omega}x)$$

tale  $y$  è soluzione di  $(P_f)$  per qualunque  $\bar{y}$  reale (per vedere che effettivamente risolve il problema si fanno a ritroso gli stessi ragionamenti del caso (a)). Riassumendo:

$$\begin{aligned} \lambda \neq k^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1 & \Leftrightarrow \text{esiste un'unica soluzione } y \text{ qualunque sia il dato } f \\ \lambda = k_0^2 \text{ per } k_0 \in \mathbb{N}, k_0 \geq 1 & \Leftrightarrow \text{esiste soluzione se e solo se } f_{k_0} = 0 \text{ ma } y \text{ non è unica} \end{aligned}$$

e per la soluzione  $y$  (quando esiste) vale la rappresentazione come serie di seni scritta sopra. Tutto questo, ricordiamolo, nell'ipotesi che i coefficienti di Fourier di  $f$  siano (assolutamente) sommabili.

Notiamo peraltro che la formula (28) definisce una funzione  $y$  anche nell'ipotesi più generale che  $f$  abbia solo energia finita ( $f \in L^2([0, L])$ ). In questo caso i coefficienti hanno la proprietà  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 < +\infty$ . Non è difficile verificare che allora (ricordando che  $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ )

$$k|y_k| = \frac{k}{\tilde{\omega}^2 k^2 + \lambda} |f_k| \leq \frac{k^2}{2(\tilde{\omega}^2 k^2 + \lambda)^2} + \frac{|f_k|^2}{2} \leq \frac{\text{costante}}{k^2} + \frac{|f_k|^2}{2}$$

da cui si ricava che  $\sum_{k=1}^{\infty} k|y_k| < +\infty$  e quindi  $y$  è continua con derivata continua e si annulla agli estremi. Non si può dire che  $y$  è derivabile due volte, ciò nonostante è ragionevole considerare  $y$  soluzione di  $(P_f)$  nel senso dell'energia.

In maniera analoga si può trattare il problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{in } [0, L], \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \quad (P'_f)$$

In questo caso si utilizzeranno gli sviluppi in serie di soli coseni.

*11.1 Osservazione.* La situazione che abbiamo considerato, per esempio trattando il problema  $(P_f)$ , è formalmente identica a quella che si presenta nella risoluzione dei sistemi di equazioni lineari. Supponiamo in effetti che  $A$  sia una matrice  $N \times N$ , che  $B$  sia un vettore  $N$ -dimensionale e che  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Allora se si considera il sistema  $AY - \lambda Y = B$  ( $Y$  in  $\mathbb{R}^N$  è l'incognita), allora è ben noto che la soluzione  $Y$  esiste unica per qualunque  $B$  se e solo se il determinante di  $A - \lambda I$  ( $I$  denota la matrice identica) è diverso da zero. Se invece tale determinante fa zero, allora la soluzione esiste (ma non è unica) solo per un sottospazio particolare di termini noti.

In effetti se guardiamo i ragionamenti fatti notiamo che abbiamo sostanzialmente risolto un "sistema lineare di infinite equazioni" Tale sistema "infinito" è per giunta in forma diagonale —che corrisponde a dire che la "base" ( $\mathbf{s}_k$ ) delle funzioni mediante le cui combinazioni lineari esprimiamo le funzioni che ci interessano, è fatta da *autovettori* dell'operatore  $A$ , in questo caso la derivata seconda. Dobbiamo quindi immaginare che l'operatore "derivata seconda" sia una matrice di dimensione infinita, che rappresentata rispetto agli  $\mathbf{s}_k$  che sono i suoi autovettori, assume forma diagonale (in cui gli elementi della diagonale sono gli *autovalori*, che sono i numeri  $k^2$  per  $k$  in  $\mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ ).

## 12 Un teorema di campionamento

**12.1 Lemma.** *Sia  $n$  un intero. Poniamo*

$$\mathbf{sinc}_n(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*La funzione  $\mathbf{sinc}_n$  ha le seguenti proprietà.*

1.  $\mathbf{sinc}_n(x + \pi) = \mathbf{sinc}_n(x)$  per ogni  $x$  in  $\mathbb{R}$ ;

2.  $\int_0^{2\pi} \mathbf{sinc}_n(x) dx = \int_0^{2\pi} \mathbf{sinc}_n(t-x) dx = 1$  per ogni  $t$  in  $\mathbb{R}$ ;

3. Vale la formula:

$$\mathbf{sinc}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{per } x \neq 0, \\ \frac{2n+1}{2\pi} & \text{per } x = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

4. Si ha

$$\mathbf{sinc}_n\left(k \frac{2\pi}{2n+1}\right) = 0 \quad \text{per ogni intero relativo } k, \text{ con } k \neq 0.$$

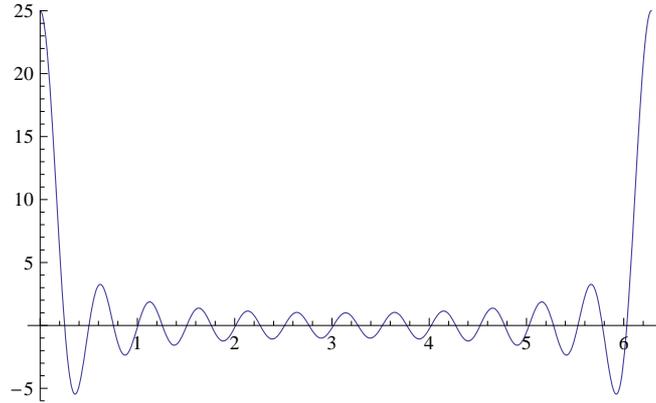


Figura 22: La funzione  $\mathbf{sinc}_{12}(x)$

*Dimostrazione.* È immediato constatare che  $\mathbf{sinc}_n$  è  $2\pi$ -periodica. Per vedere che  $\int_0^{2\pi} \mathbf{sinc}_n(x) dx = 1$  basta notare che  $\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = 0$  se  $k \neq 0$  mentre  $\int_0^{2\pi} e^0 dx = 2\pi$ . Essendo  $\mathbf{sinc}_n$   $2\pi$ -periodica la seconda proprietà è immediata. Ricaviamo l'espressione di  $\mathbf{sinc}_n(x)$  per  $x \neq 0$ . Ricordando l'espressione delle ridotte della serie geometrica si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^n (e^{ix})^k = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} (e^{ix})^k = e^{-inx} \frac{(e^{ix})^{2n+1} - 1}{e^{ix} - 1} = \\ &= \frac{e^{\frac{ix}{2}} \left( e^{\frac{i(n+1/2)x}{2}} - e^{-\frac{i(n+1/2)x}{2}} \right)}{e^{\frac{ix}{2}} \left( e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right)} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Ne segue la tesi. Per  $x = 2k\pi$  si vede invece, guardando direttamente la definizione:

$$\mathbf{sinc}_n(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^0 = \frac{2n+1}{2\pi}.$$

L'ultima eguaglianza infine deriva immediatamente dalla formula trovata al punto 3).  $\square$

Supponiamo ora che  $T > 0$  e che  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione (pensiamo che  $f$  rappresenti un brano musicale della durata di  $T$  secondi). Sia  $\omega := \frac{2\pi}{T}$  e supponiamo che esista  $n_0$  intero per cui

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n_0} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad (29)$$

per dei coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  in  $\mathbb{R}$  ( $f$  è somma di un numero finito di armoniche – possiamo pensare che  $\omega$  sia  $2\pi$  volte la massima frequenza percepibile dall'orecchio umano, che è di  $20kHz$ , per cui, anche se il segnale non fosse della forma (29), sviluppandolo secondo Fourier fino all'ordine  $n_0$  otterremmo una funzione della forma (29) indistinguibile dal segnale originario).

Supponiamo ora di conoscere il valore di  $f$  su un certo insieme di punti  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$ . Possiamo chiederci se sia possibile da questi valori ricostruire completamente  $f(t)$  per ogni  $t$ , e in caso affermativo quale sia il minimo numero dei punti  $t_k$  perché ciò sia possibile. Possiamo anche chiederci come effettuare in modo semplice tale ricostruzione a partire dai valori  $f(t_k)$ .

Per comodità matematica mettiamo la somma in forma complessa:

$$f(t) = \sum_{k=-n_0}^{n_0} c_k e^{ik\omega t}, \quad \text{dove } c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \text{ per } k \neq 0. \quad (30)$$

Imponendo le condizioni

$$\sum_{k=-n_0}^{n_0} c_k e^{ik\omega t_k} = f(t_k) \quad k = 1, \dots, n$$

otteniamo un sistema lineare con  $2n_0 + 1$  incognite ed  $n$  equazioni. Se vogliamo risolvere tale sistema per ogni  $n$ -upla di termini noti, sarà necessario che  $n \geq 2n_0 + 1$ . Peraltro questa condizione è anche sufficiente: in effetti, se  $n = 2n_0 + 1$ , la matrice

$$\begin{pmatrix} e^{-in_0\omega t_1} & e^{-in_0\omega t_2} & \dots & e^{-in_0\omega t_n} \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ e^{in_0\omega t_1} & e^{in_0\omega t_2} & \dots & e^{in_0\omega t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^{-n_0} & w_2^{-n_0} & \dots & w_n^{-n_0} \\ \vdots & & & \\ w_1^0 & w_2^0 & \dots & w_n^0 \\ \vdots & & & \\ w_1^{n_0} & w_2^{n_0} & \dots & w_n^{n_0} \end{pmatrix}$$

dove  $w_1 = e^{i\omega t_1}$ ,  $w_2 = e^{i\omega t_2}$ , ...,  $w_n = e^{i\omega t_n}$ , è una “matrice di Vandermonde” della quale si può calcolare il determinante, che è pari a

$$w_1^{-n_0} \cdot w_2^{-n_0} \dots w_n^{-n_0} \prod_{1 \leq j < h \leq n} (w_j - w_h) \neq 0$$

in quanto tutti i  $w_j$  sono distinti (essendo  $0 \leq \omega t_j < \omega T = 2\pi$ ). Quindi se  $n = 2n_0 + 1$  il sistema è risolubile e i  $c_k$  (dunque gli  $a_k$  e i  $b_k$ ) sono univocamente determinati).

Supponiamo ora che:

$$t_k = k \frac{T}{2n_0 + 1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n_0.$$

(campioniamo la  $f$  nei multipli di  $\frac{T}{2n_0+1}$ ). Poniamo:

$$g(t) := \sum_{k=0}^{2n_0} \frac{f(t_k)}{2n_0 + 1} \mathbf{sinc}_{n_0}(\omega(t - t_k)).$$

Tale  $g$  si può scrivere come

$$g(t) = \sum_{k=-n_0}^{n_0} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

per opportune costanti  $\gamma_{-n_0}, \dots, \gamma_{n_0}$ , dato che ognuna delle funzioni  $\mathbf{sinc}_{n_0}(\omega(t - t_k))$  che contribuiscono a formare  $g$  si può scrivere:

$$\mathbf{sinc}_{n_0}(\omega(t - t_k)) = \sum_{h=-n_0}^{n_0} e^{ik\omega(t-t_k)} = \sum_{h=-n_0}^{n_0} e^{-ik\omega t_k} e^{ik\omega t}.$$

Inoltre, se  $h \neq k$  sono due interi, allora

$$\mathbf{sinc}_{n_0}(\omega(t_h - t_k)) = \mathbf{sinc}_{n_0}\left(\frac{2\pi}{T}(h - k)\frac{T}{2n_0 + 1}\right) = \mathbf{sinc}_{n_0}\left((h - k)\frac{2\pi}{2n_0 + 1}\right) = 0,$$

e quindi per ogni  $h = 0, \dots, 2n_0$  si ha:

$$g(t_h) = \frac{f(t_h)}{2n_0 + 1} \mathbf{sinc}_{n_0}(0) = f(t_h).$$

Per quanto visto sopra deve allora essere  $\gamma_j = c_j$  per ogni  $j$  e quindi  $g$  deve coincidere con  $f$ . Abbiamo dunque dimostrato il seguente teorema.

**12.2 Teorema** (di campionamento). *Sia  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  un segnale la cui serie di Fourier ha tutti coefficienti nulli da  $n_0 + 1$  in poi. Allora  $f(t)$  è univocamente individuato da  $2n_0 + 1$  campioni distinti  $f(t_j)$ , per  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{2n_0+1} < T$ . Se il campionamento è effettuato a frequenza costante, prendendo  $t_j = j\frac{T}{2n_0 + 1}$ ,  $j = 0, \dots, 2n_0$  allora:*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n_0} \frac{f(t_k)}{2n_0 + 1} \mathbf{sinc}_{n_0}(\omega(t - t_k)) \quad \forall t \in [0, T].$$

Dunque la frequenza di campionamento minima per ricostruire esattamente il segnale di partenza deve essere  $\omega_c = (2n_0 + 1)\frac{2\pi}{T} = 2\frac{n_0 2\pi}{T} + \frac{2\pi}{T} = 2\omega_M + \frac{2\pi}{T}$ , dove  $\omega_m := \frac{n_0 2\pi}{T}$  è la frequenza della massima armonica di  $f$ . Se  $T$  è molto grande si può dire che  $\omega_c$  deve essere (maggiore de) il doppio di  $\omega_m$ .

## 13 L'equazione del calore unidimensionale

Sia  $L > 0$  fissata,  $c > 0$  e sia anche assegnata una  $f(t, x)$ . Consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = c \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + f(t, x), \quad t > 0, x \in [0, L]. \quad (31)$$

L'incognita  $u$  rappresenta la distribuzione della temperatura all'istante  $t$  nel punto  $x$  di una sbarra (omogenea) di lunghezza  $L$ ; la funzione  $f$  introduce una eventuale sorgente esterna di calore (variabile nel tempo e nello spazio). Come è ragionevole per motivi fisici, e come si verificherà matematicamente, per risolvere l'equazione sarà necessario:

- indicare la distribuzione  $u_0$  della temperatura ad un istante iniziale  $t_0$ ;
- descrivere gli scambi di calore che avvengono all'estremità della sbarra, indicando delle opportune *condizioni al bordo*.

Nel seguito normalizzeremo ad uno il coefficiente  $c$  (legato alle proprietà del materiale di cui la fatta la sbarra) e prenderemo  $t_0 = 0$ . Come vedremo si riuscirà a risolvere l'equazione solo per tempi positivi.

Presentiamo qui di seguito un metodo risolutivo nel caso della temperatura nulla agli estremi (immaginando che la sbarra sia "immersa nel ghiaccio" alle estremità, cosicchè attraverso i punti 0 e  $L$  c'è un passaggio di calore atto a tenere a zero la temperatura in tali punti).

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ per ogni } x \text{ in } [0, L], \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \text{ per ogni } t \geq 0. \end{cases} \quad (32)$$

La condizione  $u(t, 0) = u(t, L) = 0$  ("u nulla agli estremi") di chiama solitamente *condizione di Dirichlet*. Viceversa la condizione all'istante  $t = 0$  è una condizione *di Cauchy*, legata al

fatto che l'equazione è del primo ordine nel tempo.

Volendo si potrebbe anche considerare anche il caso in cui non avvengano scambi di calore tra la sbarra e l'esterno: tale caso si formalizza con la condizione  $\frac{\partial}{\partial t}u(t, 0) = \frac{\partial}{\partial t}u(t, L) = 0$ , (“derivata nulla agli estremi”) detta comunemente *condizione di Neumann*.

Cerchiamo la soluzione come sviluppo  $t$  per  $t$  dalla sua serie di Fourier in  $x$  rispetto a i soli seni. Questo approccio permetterà di “trovare automaticamente” la condizione agli estremi, dato che i seni con cui stiamo cercando di descrivere la soluzione sono nulli in 0 e  $L$  (anche se dovremo comunque affrontare delle questioni di convergenza).

Poniamo allora  $\omega := \frac{2\pi}{L}$  e cerchiamo  $u$  della forma:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(n\omega x).$$

Supponiamo anche che i dati iniziali  $u_0$  e  $f(t, \cdot)$  (per ogni  $t$ ) abbiano energia finita, per cui:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x), \quad f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\omega x),$$

(nel senso dell'energia) dove:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\xi) \sin(n\omega \xi) d\xi, \quad f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(t, \xi) \sin(n\omega \xi) d\xi.$$

Supponendo di poter derivare per serie si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \sin(n\omega x), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2\omega^2)u_n(t) \sin(n\omega x).$$

e quindi scrivendo l'equazione componente per componente si trova

$$u'_n(t) = -n^2\omega^2 u_n(t) + f_n(t)$$

$$u_n(t) = e^{-\omega_0^2 n^2 t} \left( u_n(0) + \int_0^t f_n(\tau) e^{n^2\omega^2 \tau} d\tau \right) = A_n e^{-\omega_0^2 n^2 t} + \int_0^t f_n(\tau) e^{-n^2\omega^2(t-\tau)} d\tau.$$

Questi calcoli individuano univocamente i coefficienti di Fourier di  $u(t, \cdot)$  e quindi, per l'unicità dello sviluppo di Fourier quella che abbiamo trovato, se ha senso, è l'unica possibile soluzione. Rimane però da vedere se la serie di Fourier che abbiamo costruito sia effettivamente convergente e se i passaggi effettuati siano leciti. Facendo queste verifiche troveremo anche molte interessanti proprietà (di regolarità) della soluzione. Da ora in avanti consideriamo solo il caso di assenza di sorgenti, cioè metteremo  $f_n = 0$  per ogni  $n$ . Con un po' di pazienza e facendo delle opportune ipotesi su  $f(x, t)$  tutti i discorsi che seguono si possono ripetere nel caso generale.

Valgani i fatti seguenti.

1. Per ogni  $t \geq 0$  la formula

$$u(t, x) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\omega^2 t} \sin(n\omega x) \tag{33}$$

definisce una funzione in  $L^2(0, L)$ . Infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n e^{-n^2\omega^2 t}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 = \frac{1}{L} \|u_0\|_2^2 < +\infty$$

(usando il teorema 10.5).

2. Fissiamo un  $t_0 > 0$ . Allora la funzione  $u$  è infinitamente derivabile nelle due variabili in ogni punto  $x$  di  $[0, L]$  e ogni  $t > t_0$  e vale zero se  $x = 0$  o  $x = L$ . Inoltre si può derivare per serie e quindi, rifacendo all'indietro i calcoli di prima, si ottiene che la  $u$  verifica l'equazione in ogni  $t > t_0$  e in ogni  $x$ . Dato che  $t_0$  è arbitrario ciò equivale a dire che tutto quanto appena detto vale per ogni  $x$  di  $[0, L]$  e per ogni  $t > 0$ . Cominciamo col mostrare la derivabilità rispetto a  $x$ : per questo fissiamo un intero  $j$  qualunque e notiamo che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^j |A_n e^{-n^2 \omega^2 t}| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2j} e^{-2n^2 \omega^2 t} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2j} e^{-2n^2 \omega^2 t_0} < +\infty$$

(abbiamo usato la nota disuguaglianza numerica  $2|ab| \leq a^2 + b^2$  e il fatto che l'esponenziale negativo "vince" sul polinomio  $n^{2j}$ ). Applicando la proposizione 10.3 si ottiene che  $u$  ha derivata  $j$ -esima in  $x$  continua e tale derivata si esprime come la serie delle derivate  $j$ -esime.

Consideriamo la derivabilità in  $t$  – consideriamo solo la derivata prima (le altre si fanno in modo analogo). Vogliamo far vedere che la serie delle derivate in  $t$  è totalmente convergente sulla semiretta  $\{t \geq t_0\}$ . Infatti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \geq t_0, 0 \leq x \leq L} \left| \frac{\partial}{\partial t} A_n e^{-n^2 \omega^2 t} \sin(n\omega x) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \geq t_0, 0 \leq x \leq L} \left| A_n n^2 \omega^2 e^{-n^2 \omega^2 t} \sin(n\omega x) \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \omega^4 e^{-2n^2 \omega^2 t_0} < +\infty.$$

Dunque per il teorema 2.12  $u$  è derivabile in  $t$  per ogni  $t > t_0$  e la derivata è eguale alla serie delle derivate. Abbiamo dunque dimostrato la regolarità di  $u$ , il fatto che  $u$  verifichi l'equazione e la condizione agli estremi.

Quindi, anche se il dato iniziale è solo  $L^2$ , la soluzione diventa immediatamente regolarissima a qualunque tempo positivo.

3. Poniamo  $u_t := u(t, \cdot)$ , cioè  $u_t(x) = u(t, x)$ . Allora, per  $t$  tendente a zero, si ha  $u_t \xrightarrow{L^2} u_0$ , cioè  $\|u_t - u_0\|_2 \rightarrow 0$ . Quindi  $u(x, t)$  tende al suo valore iniziale solo nel senso dell'energia. Questo è comprensibile poiché il dato iniziale  $u_0$  è solo  $L^2$ . Non dimostriamo questo fatto che avrebbe bisogno di teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale più raffinati di quelli che conosciamo.

4. Se il dato iniziale  $u_0$  è tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$  (da cui segue che  $u_0$  è continua), allora  $u_t$  converge uniformemente a  $u_0$  su  $[0, L]$ . In particolare

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0)} u(t, x) = u(0, x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

e dunque il dato iniziale viene assunto in senso tradizionale. Anche di questo punto tralasciamo la dimostrazione.

5. Per  $t$  tendente all'infinito  $u_t$  converge uniformemente a zero. Questo si intuisce facilmente dato che tutti i coefficienti della serie contengono un fattore esponenziale  $e^{-n^2 \omega^2 t}$  che fa andare tutto a zero per  $t \rightarrow \infty$  – anche di questo però non diamo i dettagli.

Oltre alle proprietà elencate sopra le soluzioni dell'equazione del calore hanno ne anche altre, la cui dimostrazione è un po' più riposta. Si può per esempio vedere che, se il dato iniziale  $u_0$  è non negativo ( $u_0(x) \geq 0$ ) allora la soluzione è positiva su  $]0, L[$  per ogni istante positivo

$t : u(t, x) > 0$  se  $t > 0$   $0 < x < L$ . Dunque l'equazione del calore ammette una *velocità di propagazione infinita* (ciò che succede, per esempio, vicino a zero influisce sul comportamento in ogni  $x$  dell'intervallo, dopo un qualunque istante positivo). Vediamo per esempio nella figura 23 l'andamento delle soluzioni con dato iniziale concentrato in un intervallino piccolo nel centro di  $[0, L]$  ( $L = \pi$  nella figura).

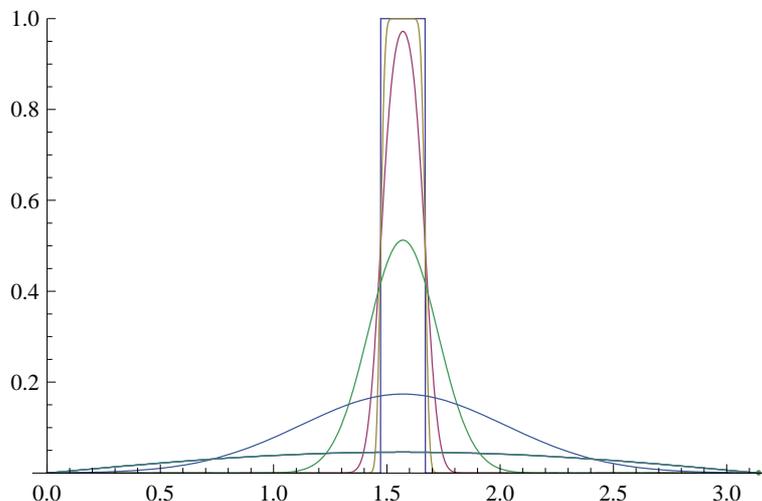


Figura 23: Equazione del calore: soluzioni a partire da un dato discontinuo

Un'altra considerazione che si può fare è che in generale non si può “tornare indietro nel tempo”. Infatti, per i risultati di regolarità provati sopra, per potere risolvere l'equazione per le  $t < 0$  è necessario partire da un dato iniziale “ultra regolare”, più precisamente un dato la cui serie di Fourier di soli seni abbia una tale sommabilità nei suoi coefficienti da “sopportare” la moltiplicazione per dei fattori  $e^{n^2 \omega^2 t}$  (e questo è assai difficile). Un caso semplice in cui ciò si può fare è quello in cui solo un numero finito di coefficienti della serie di Fourier siano diversi da zero, cioè se  $u_0$  è un polinomio trigonometrico nei seni (per esempio se  $u_0(x) = \sin(k\omega x)$ ).

Nella figura 24 mostriamo l'evoluzione della temperatura a partire da  $u_0(x) = 1$  per ogni  $x$  (cioè per una sbarra inizialmente a temperatura costante e diversa da zero). Si noti che tale dato iniziale è comunque “cattivo” in quanto contrasta con la condizione di Dirichlet agli estremi. In effetti la figura mostra come la temperatura diventi istantaneamente nulla agli estremi per ogni  $t > 0$ .

## 14 L'equazione delle corde vibranti

Consideriamo ora il problema del moto di una corda elastica di lunghezza  $L$  fissata agli estremi. Se indichiamo con  $u(t, x)$  lo spostamento della corda rispetto alla sua posizione di equilibrio all'istante  $t$  e alla posizione  $x$  si può vedere che  $u$  risolve il problema alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + f(t, x) & \text{per ogni } (t, x) \text{ con } 0 \leq x \leq L, t \in \mathbb{R} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per ogni } x \in [0, L] \\ \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = v_0(x) & \text{per ogni } x \in [0, L] \end{cases} \quad (34)$$

(questo modello in realtà vale per piccoli spostamenti rispetto alla posizione di equilibrio); qui la costante  $c^2$  è legata alle varie caratteristiche fisiche della corda, cioè alla densità della stessa e alla tensione a cui la corda è sottoposta. La condizione contenuta nella seconda riga è di tipo Dirichlet ed esprime il fatto che la corda è ancorata agli estremi, mentre le altre due

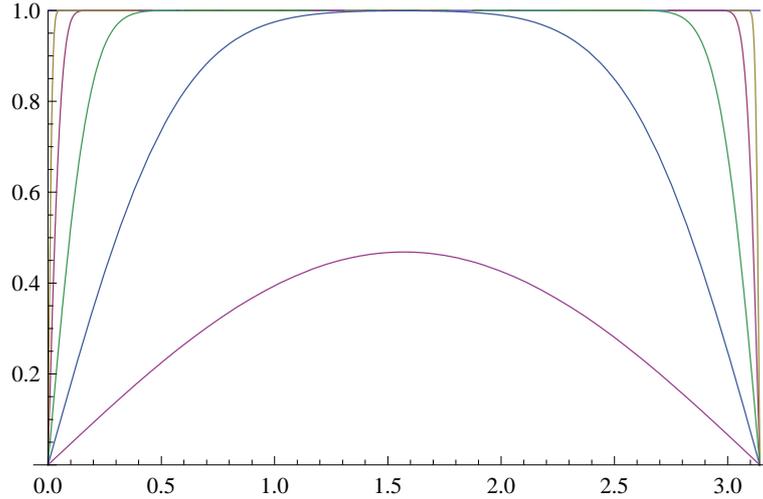


Figura 24: Equazione del calore: soluzione a partire da temperatura costante

condizioni sono di *tipo Cauchy* e indicano la posizione e la velocità iniziali (rispetto al tempo) del punto della corda individuato dalla variabile  $x$  – è abbastanza ragionevole che le condizioni di Cauchy siano due dato che l'equazione è del secondo ordine rispetto al tempo.

Come già fatto per l'equazione del calore cerchiamo la soluzione  $u$  come una serie di Fourier di seni rispetto alla variabile spaziale, cioè

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(n\omega x), \quad \text{dove } \omega = \frac{\pi}{L},$$

supponendo che i termini noti del problema siano dati nello stesso modo:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x), \quad v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega x), \quad f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\omega x).$$

Notiamo che se valgono (in qualche senso) le eguaglianze scritte sopra, allora  $u_0$  e  $v_0$  ed  $f$  si prolungano a delle funzioni di  $x$  definite per ogni  $x$  reale, che in  $x$  sono dispari e periodiche di periodo  $2L$ . Ragionando formalmente

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \sin(n\omega x), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u''_n(t) \sin(n\omega x),$$

mentre

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) n\omega \cos(n\omega x), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) n^2 \omega^2 \sin(n\omega x).$$

da cui si ricavano le condizioni, per  $n = 1, 2, \dots$

$$u''_n(t) = -n^2 c^2 u_n(t) + f_n(t), \quad u_n(0) = A_n, \quad u'_n(0) = B_n.$$

Quest'ultima è un'equazione ordinaria del secondo ordine con condizioni di Cauchy e quindi, come ben noto ha soluzione unica. Consideriamo il caso  $f = 0$ . Allora tutti gli  $f_n$  sono nulli e l'equazione (omogenea) ha come soluzione generale

$$u_n(t) = \alpha \cos(ncwt) + \beta \sin(ncwt) \Rightarrow u'_n(t) = -ncw\alpha \sin(ncwt) + ncw\beta \cos(ncwt), \quad (35)$$

da cui si ricava  $\alpha = A_n$ ,  $\beta = \frac{B_n}{nc\omega}$ . Quindi:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos(nc\omega t) + \frac{B_n}{nc\omega} \sin(nc\omega t) \right) \sin(n\omega x) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} (\sin(n\omega(x+ct)) + \sin(n\omega(x-ct))) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{2n\omega} (\cos(n\omega(x+ct)) - \cos(n\omega(x-ct))) =$$

$$\frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{V_0(x+ct) - V_0(x-ct)}{2c}$$

dove  $V_0$  è la funzione data da  $V_0(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n\omega} \cos(n\omega s)$  che dunque verifica

$$V_0'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n n\omega}{n\omega} \sin(n\omega s) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega s) = v_0(s)$$

ed ha integrale nullo su  $[0, L]$ , infatti:

$$\int_0^L V_0(s) ds = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n\omega} \int_0^L \cos(n\omega s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n^2\omega^2} [\sin(n\omega s)]_0^L = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0;$$

possiamo notare che queste proprietà individuano univocamente  $V_0$ . I ragionamenti fatti fino a qui fanno vedere come deve essere fatta la soluzione (se verifica proprietà ragionevoli). A questo punto possiamo chiederci sotto quali ipotesi la formula trovata sopra dia effettivamente una soluzione in senso “classico”. Per fare questa analisi possiamo anche abbandonare le serie di Fourier, dato che la soluzione si esprime in termine dei due dati  $u_0$  e  $v_0$  – è in effetti chiaro che ciò che serve per derivare due volte (in  $t$  e in  $x$ ) la  $u(t, x)$  e per verificare la condizione di “zero al bordo” (in  $x$ ) servirà sapere che la  $u_0$  è derivabile due volte, che la  $v_0$  è derivabile una volta e che entrambe sono nulle in 0 e in  $L$ . Sotto queste ipotesi il fatto che  $u$  sia soluzione è una semplice verifica.

**14.1 Teorema.** *Sia  $u_0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile due volte con derivate continue, sia  $v_0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile con derivata continua e supponiamo che  $u_0(0) = u_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0$ . Allora esiste una e una sola soluzione  $u$  dell’equazione (34) con  $f = 0$  e tale  $u$  è data dalla formula:*

$$u(t, x) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{V_0(x+ct) - V_0(x-ct)}{2c}$$

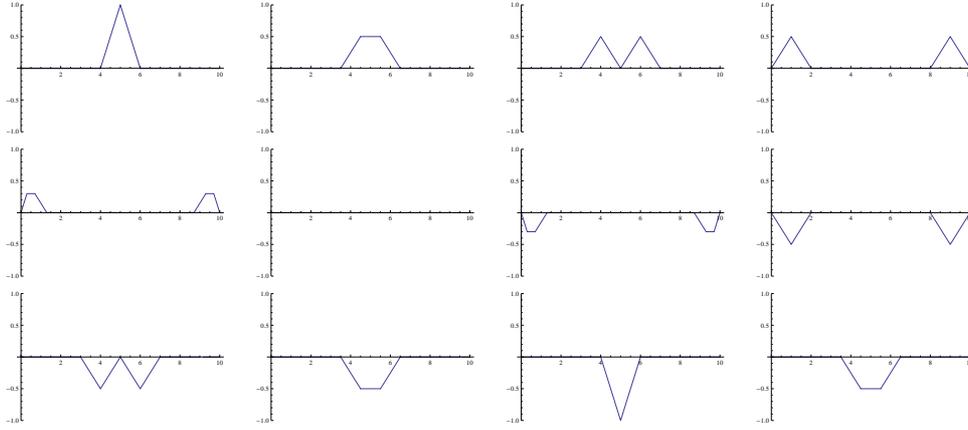
dove  $u_0$  e  $v_0$  si estendono prima su  $[-L, L]$  in modo dispari e poi su tutto  $\mathbb{R}$  in modo da risultare  $2L$ -periodiche, e dove la funzione  $V_0$  è l’unica primitiva di  $v_0$  con integrale nullo su  $[0, L]$ .

*14.2 Osservazione.* Il teorema precedente è l’unico sensato se si chiede che la soluzione  $u$  sia derivabile due volte in  $t$  e in  $x$  e che valga l’equazione. Però la formula scritta sopra ha senso anche se  $u_0$  non è derivabile due volte o se  $v_0$  non è derivabile una volta. Viene allora spontaneo ritenere che la formula sopra definisca comunque una soluzione *in senso generalizzato* dell’equazione delle corde con quei dati iniziali. In effetti tale definizione si potrebbe dare (mediante un limite, in energia, di “quasi soluzioni” dell’equazione), permettendo così di risolvere il problema anche se i dati iniziali non hanno la regolarità richiesta dal teorema.

Questa considerazione è abbastanza importante, anche perché, a differenza di quanto accade per l’equazione del calore, in questo caso “non si guadagna regolarità” – la soluzione al tempo  $t$  non è migliore di quanto non sia al tempo zero. Questo si vede subito dalla formula risolutiva e, volendo, anche dalla serie di Fourier che abbiamo usato per arrivarci: la sommabilità dei coefficienti è la stessa per ogni istante  $t$ . Questa mancanza di regolarizzazione è peraltro compensata dal fatto che stavolta *possiamo risolvere l’equazione per tutti i tempi*, sia positivi che negativi, come mostrano i calcoli fatti.

Un altro fenomeno che si vede subito dalla forma della soluzione è che, se  $u_0(x) = v_0(x) = 0$  per tutte le  $x$  di un intervallo  $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ , allora la soluzione rimane nulla nel punto  $x_0$ , almeno fino al tempo  $\frac{\delta}{c}$ . Questo fatto si esprime dicendo che c'è *velocità di propagazione finita* (pari a  $c$ ).

Le figure mostrano l'evoluzione di un dato triangolare al centro della corda con velocità iniziale nulla.



## 15 L'equazione delle onde in due dimensioni – la membrana rettangolare

Se in luogo della corda consideriamo una “membrana elastica” giungiamo all'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x, y) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x, y) + c^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, x, y) & \text{per } (x, y) \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}; \\ u(t, x, y) = 0 & \text{se } (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \in \mathbb{R}; \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega; \\ \frac{\partial}{\partial t} u(0, x, y) = v_0(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega; \end{cases}$$

dove in questo caso il problema si ambienta per  $(x, y)$  che variano in un dominio  $\Omega$  del piano, che rappresenta la “forma” della membrana e  $u(t, x, y)$  rappresenta lo scostamento verticale della membrana rispetto alla posizione di equilibrio. Il fatto che la membrana sia ancorata al piano  $xy$  al bordo di  $\Omega$ , qui indicato con  $\partial\Omega$  è espresso dalla seconda condizione ( $u$  zero al bordo o *di Dirichlet*) scritta sopra. Le altre due condizioni (di tipo *di Cauchy*) esprimono invece la posizione e la velocità iniziale della membrana.

Questo problema è assai più complicato di quello della corda in quanto fa intervenire la forma della membrana, aggiungendo una notevole gamma di comportamenti possibili. Quello che faremo qui è di studiare tale problema nel caso di forme particolarmente semplici, cominciando dal caso della membrana rettangolare, quello cioè in cui  $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$  per due assegnate lunghezze  $L_1$  e  $L_2$ . In questo caso  $\partial\Omega = \{(0, y) : 0 \leq y \leq L_2\} \cup \{(L_1, y) : 0 \leq y \leq L_2\} \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq L_1\} \cup \{(x, L_2) : 0 \leq x \leq L_1\}$  (cioè l'unione dei quattro lati del rettangolo). Il problema diventa allora

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x, y) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x, y) + c^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, x, y) + f(t, x, y) & \text{per } 0 < x < L_1, \quad 0 < y < L_2, \quad t \in \mathbb{R}; \\ u(t, x, y) = 0 & \text{se } x = 0 \text{ o } x = L_1 \text{ o } y = 0 \text{ o } y = L_2, \quad t \in \mathbb{R}; \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) & \text{se } 0 < x < L_1, \quad 0 < y < L_2; \\ \frac{\partial}{\partial t} u(0, x, y) = v_0(x, y) & \text{se } 0 < x < L_1, \quad 0 < y < L_2. \end{cases} \quad (36)$$

Seguendo le stesse idee dei casi precedenti cerchiamo  $u$  della forma:

$$u(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t, x) \sin(m\omega_2 y) \quad \text{dove } \omega_2 = \frac{2\pi}{L_2}$$

e analogamente possiamo pensare che il coefficiente  $m$ -esimo  $u_m(t, x)$  si possa scrivere:

$$u_m(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m}(t) \sin(n\omega_1 x) \quad \text{dove } \omega_1 = \frac{2\pi}{L_1}.$$

In definitiva cerchiamo  $u$  come una serie di Fourier (di soli seni) doppia:

$$u(t, x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) \sin(n\omega_1 x) \sin(\omega_2 y)$$

Ripetendo i ragionamenti fatti nel caso unidimensionale si trova che, per ogni  $n$  ed  $m$  deve valere la seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\begin{cases} u''_{n,m}(t) = -c^2(n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2)u_{n,m}(t) + f_{n,m}(t) \\ u_{nm}(0) = A_{n,m}, u'_{nm}(0) = B_{n,m} \end{cases}$$

dove stiamo supponendo che:

$$u_o(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin(n\omega_1 x) \sin(\omega_2 y), \quad v_o(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m} \sin(n\omega_1 x) \sin(\omega_2 y),$$

e

$$f(t, x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_{n,m}(t) \sin(n\omega_1 x) \sin(\omega_2 y).$$

Come al solito consideriamo solo il caso  $f = 0$ ; in questo caso si ricava:

$$u_{n,m}(t) = A_{n,m} \cos(\omega_{n,m} ct) + \frac{B_{n,m}}{c\omega_{n,m}} \sin(\omega_{n,m} ct), \quad \text{dove } \omega_{n,m} = \sqrt{n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2},$$

e dunque

$$u(t, x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left( A_{n,m} \cos(\omega_{n,m} ct) + \frac{B_{n,m}}{c\omega_{n,m}} \sin(\omega_{n,m} ct) \right) \sin(n\omega_1 x) \sin(\omega_2 y). \quad (37)$$

A differenza del caso della corda non è possibile esprimere meglio la  $u$  che dobbiamo tenerci in forma di serie. Questo ci costringe a giustificare la convergenza della serie scritta sopra, individuando in quale ipotesi sui dati iniziali ciò si possa fare. Non faremo questi calcoli, limitandoci a scriverne il risultato.

**15.1 Teorema.** *Supponiamo che:*

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} (n^2 + m^2) |A_{n,m}| < +\infty, \quad \sum_{n,m=1}^{\infty} (n + m) |B_{n,m}| < +\infty.$$

Allora la serie scritta in (37) converge per ogni  $t, x, y$  e definisce una funzione derivabile due volte rispetto a ognuna delle variabili, che verifica l'equazione delle onde e le condizioni iniziali come in (36).

In realtà la formula (37) definisce una funzione anche con ipotesi più deboli sui dati iniziali: per esempio se

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |A_{n,m}| < +\infty, \quad \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n+m} |B_{n,m}| < +\infty.$$

la formula definisce una funzione continua  $u$  che rispetta la condizione al bordo e la prima delle due condizioni di Cauchy. Possiamo pensare allora che tale  $u$  sia una soluzione generalizzata dell'equazione delle onde, ed è l'unica possibile.

Anche nel caso bidimensionale l'equazione delle onde non presenta fenomeni di regolarizzazione: la funzione  $u_t(x, y) := u(t, x, y)$  ha in ogni istante  $t$  la stessa regolarità che ha nell'istante iniziale. Di converso essa esiste per tutti i tempi, sia positivi che negativi. Inoltre vale ancora il fenomeno della "velocità finita di propagazione": se i dati iniziali  $u_0$  e  $v_0$  vengono modificati nell'intorno di un punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e se si prende un altro punto  $P_1 = (x_1, y_1)$  la soluzione con il dato modificato rimane eguale a quella di partenza per tutti i tempi fino a  $\frac{1}{c}|P_1 - P_0|$ .

## 16 Il metodo della separazione delle variabili

Vogliamo ora reinterpretare quanto fatto finora nel trattamento delle equazioni del calore e delle onde. In effetti, se riguardiamo i nostri calcoli vediamo che abbiamo espresso le soluzioni dei vari problemi come delle serie di "soluzioni speciali", che nel caso delle corde sono:

$$U_n(t, x) = [\alpha_n \cos(n\omega ct) + \beta_n \sin(n\omega ct)] \sin(n\omega x) = \rho_n \cos(n\omega ct - \phi_n) \sin(n\omega x)$$

e nel caso della membrana rettangolare sono:

$$U_{n,m}(t, x, y) = [\alpha_{n,m} \cos(\omega_{n,m} ct) + \beta_{n,m} \sin(\omega_{n,m} ct)] \sin(n\omega_1 x) \sin(\omega_2 y) = \rho_{n,m} \cos(\omega_{n,m} ct - \phi_{n,m}) \sin(n\omega_1 x) \sin(\omega_2 y).$$

Tali soluzioni speciali, detti *modi fondamentali*, hanno la caratteristica di essere dei prodotti tra due funzioni una della sola variabile spaziale e una della sola variabile temporale (questo è vero anche nel caso dell'equazione del calore). Notiamo per inciso che la parte temporale di queste soluzioni è periodica nel tempo con una frequenza che nel caso delle corde è un multiplo fisso di quella spaziale, data dalla lunghezza della corda (e da altre sue caratteristiche fisiche), mentre nel caso della membrana dipende in maniera più complicata da entrambe le dimensioni della stessa (questo spiega perchè un tamburo abbia un suono nettamente diverso da quello di una corda di chitarra).

Possiamo allora rifare l'analisi della membrana rettangolare da quest'altro punto di vista: cerchiamo tutte le possibili soluzioni del tipo:

$$u(t, x, y) = \Phi(t)\Psi(x, y)$$

(con l'idea che dovremo poi dimostrare che una qualunque soluzione si esprime mediante una serie di loro combinazioni). Questa tecnica si chiama *separazione delle variabili*. Vediamo come si procede. Se  $u$  ha la forma scritta sopra, allora l'equazione delle onde (nel caso omogeneo) diventa:

$$\Phi''(t)\Psi(x, y) = \Phi(t) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi(x, y) \right) = \Phi(t)\Delta\Psi(x, y)$$

per  $t \in \mathbb{R}$  e  $(x, y) \in R := ]0, L_1[ \times ]0, L_2[$  (dove l'operatore di Laplace  $\Delta\Psi$  è definito da  $\Delta\Psi := \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi$ ). Dividendo per il prodotto  $\Phi(t)\Psi(x, y)$  si ottiene:

$$\frac{\Phi''(t)}{\Phi(t)} = \frac{\Delta\Psi(x, y)}{\Psi(x, y)}.$$

Dato che nella relazione sopra sono eguagliate una funzione della sola  $t$  (a destra) e una delle sole  $x, y$  (a sinistra), tale relazione equivale a dire che entrambi i termini sono eguali ad una costante  $\lambda$  (da trovare), cioè:

$$\frac{\Phi''(t)}{\Phi(t)} = \lambda, \quad \frac{\Delta\Psi(x, y)}{\Psi(x, y)} = \lambda.$$

Notiamo che oltre alla validità dell'equazione dobbiamo imporre che sia verificata la condizione di Dirichlet, cosa che equivale a dire che la  $\Psi$  deve essere zero al bordo di  $R$ .

Affrontiamo prima l'equazione per  $\Psi$ . Innanzitutto vale un risultato sul segno di  $\lambda$ .

**16.1 Lemma.** Siano  $\Omega$  un dominio di  $\mathbb{R}^2$  e  $\lambda$  un numero reale. Supponiamo che esista una soluzione non nulla del problema:

$$\begin{cases} \Delta \Phi = \lambda \Psi & \text{su } \Omega, \\ \Psi(x, y) = 0 & \text{per } (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Allora  $\lambda > 0$ .

*Idea di dimostrazione.* Supponiamo che tale soluzione esista. Allora moltiplicando l'equazione per  $\Psi$  e integrando su  $\Omega$  si ottiene:

$$\int_{\Omega} \Delta \Psi(x, y) \Psi(x, y) dx dy = \lambda \int_{\Omega} \Psi^2(x, y) dx dy.$$

Sfruttando il teorema di Gauss-Green (cioè il teorema della divergenza applicato al campo vettoriale  $F := \Psi \nabla \Psi$ ) si ottiene:

$$\int_{\Omega} \Delta \Psi(x, y) \Psi(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} \Psi(x, y) \nabla \Psi(x, y) \cdot \nu d\sigma - \int_{\Omega} |\nabla \Psi(x, y)|^2 dx dy$$

( $\nu$  indica la normale alla superficie  $\partial\Omega$ ). Dato che  $\Psi$  è nullo su  $\partial\Omega$  l'integrale di superficie fa zero e dunque

$$- \int_{\Omega} |\nabla \Psi(x, y)|^2 dx dy = \lambda \int_{\Omega} \Psi^2(x, y) dx dy$$

per cui deve essere  $\lambda < 0$  (si noti che stiamo supponendo che  $\Psi$  non sia nulla).  $\square$

Dato che  $\lambda$  deve essere negativo possiamo porre  $\lambda = -\omega^2$ , con  $\omega > 0$ . Per risolvere l'equazione in  $\Psi$  separiamo ulteriormente le variabili  $x$  e  $y$  ponendo  $\Psi(x, y) = \Psi_1(x)\Psi_2(y)$ . L'equazione diventa allora:

$$\Psi_1''(x)\Psi_2(y) + \Psi_1(x)\Psi_2''(y) = -\omega^2\Psi_1(x)\Psi_2(y), \quad 0 < x < L_1, \quad 0 < y < L_2,$$

con condizioni  $\Psi_1(0) = \Psi_1(L_1) = 0$  e  $\Psi_2(0) = \Psi_2(L_2) = 0$ . Dividendo per  $\Psi_1(x)\Psi_2(y)$ :

$$\frac{\Psi_1''(x)}{\Psi_1(x)} + \frac{\Psi_2''(y)}{\Psi_2(y)} = -\omega^2,$$

da cui, ragionando come prima, i singoli addendi devono essere costanti. Se ne ricava:

$$\Psi_1''(x) = \lambda_1 \Psi_1(x), \quad \Psi_2''(y) = \lambda_2 \Psi_2(y), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\omega^2.$$

Ragionando come nel lemma precedente si trova che  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  (al posto di Gauss-Green si usa l'integrazione per parti). Risolviamo la prima equazione: deve essere

$$\Psi_1(x) = \alpha \cos(\sqrt{|\lambda_1|x}) + \beta \sin(|\lambda_1|x);$$

dato che  $\Psi_1(0) = 0$  si deduce  $\alpha = 0$ ; dato che  $\Psi_1(L_1) = 0$  deve essere  $\sqrt{|\lambda_1|}L_1 = n\frac{\pi}{L_1} = n\omega_1$  con  $n$  intero (mentre  $\beta$  può essere un qualunque numero reale), cioè  $\lambda_1 = -n^2\omega_1^2$  e le possibili  $\Psi_1$  sono  $\Psi_n^{(1)}(x) = \beta \sin(n\omega_1 x)$  al variare di  $n$  intero e  $\beta$  reale. Nello stesso modo si trova che le possibili  $\Psi_2$  sono  $\Psi_m^{(2)}(x) = \beta \sin(m\omega_2 y)$  al variare di  $m$  intero e  $\beta$  reale. Quindi le possibili  $\Psi$  saranno

$$\Psi_{n,m}(x, y) = \beta \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y) \quad n, m \geq 1 \text{ interi, } \beta \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza  $\omega = \omega_{n,m} = \sqrt{n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2}$  e

$$\Phi(t) = \Phi_{n,m}(t) = \rho \cos(\omega_{n,m}t - \phi) \quad n, m \geq 1 \text{ interi, } \rho \in \mathbb{R}, \phi \in [0, 2\pi].$$

Dunque si ritrovano le stesse funzioni (=modi fondamentali) ottenute mediante le serie di Fourier:

$$u_{n,m}(t, x, y) = \rho \cos(\omega_{n,m}t - \phi) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y) \quad n, m \geq 1 \text{ interi, } \rho \in \mathbb{R}, \phi \in [0, 2\pi].$$

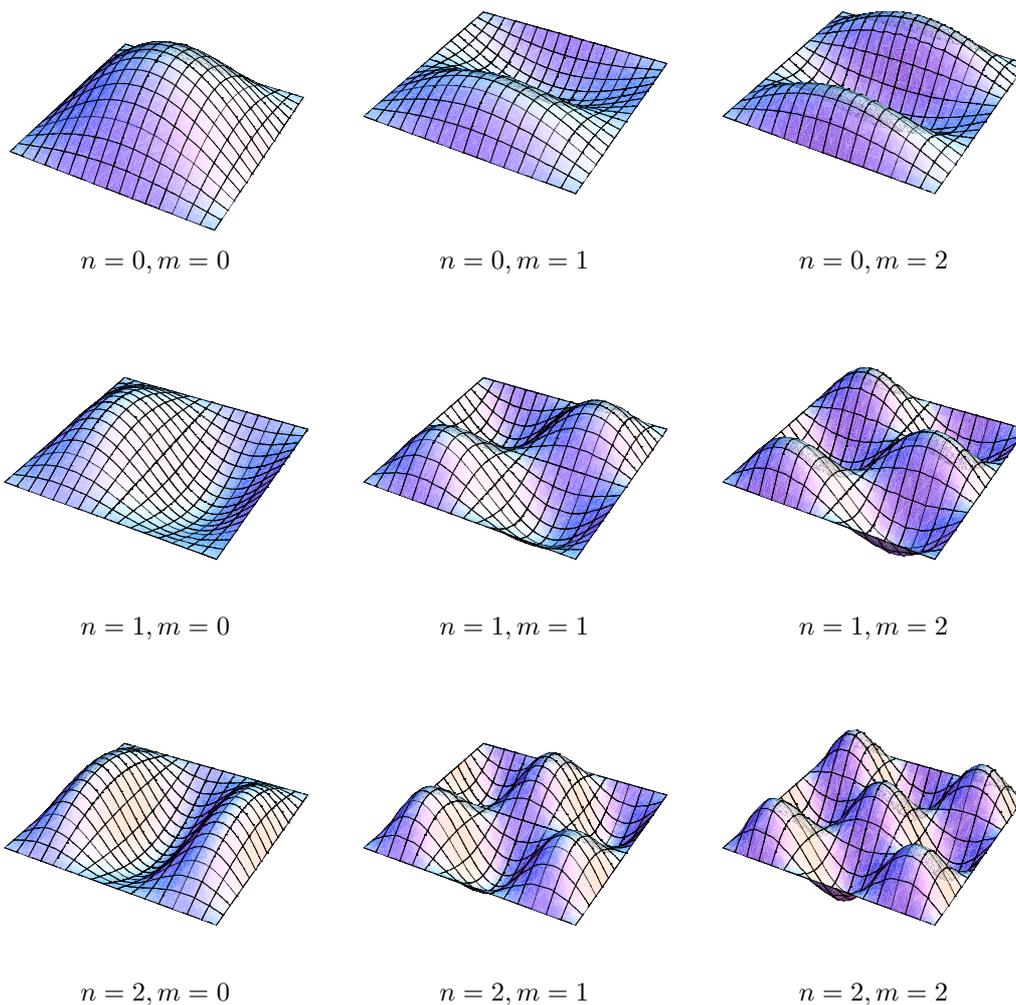


Figura 25: Profili del tamburo rettangolare,  $n = 0, 1, 2$ ,  $m = 0, 1, 2$

## 17 L'equazione delle onde in due dimensioni - il caso della membrana circolare

Consideriamo di nuovo l'equazione

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, t) & \text{per } (x, y) \in B_R, \quad t \in \mathbb{R}; \\ u(x, y, t) = 0 & \text{se } (x, y) \in S_R, \quad t \in \mathbb{R}; \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) & \text{se } (x, y) \in B_R; \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, 0) = v_0(x, y) & \text{se } (x, y) \in B_R; \end{cases}$$

dove  $B_R = \{x^2 + y^2 < R\}$  è il cerchio aperto di raggio  $R$  in  $\mathbb{R}^2$ ,  $S_R = \{x^2 + y^2 = R\}$  è la circonferenza e dove  $u_0, v_0$  sono due funzioni di  $(x, y)$  assegnate. Cerchiamo di nuovo le soluzioni  $u$  della forma:

$$u(x, y, t) = \Phi(t)\Psi(x, y)$$

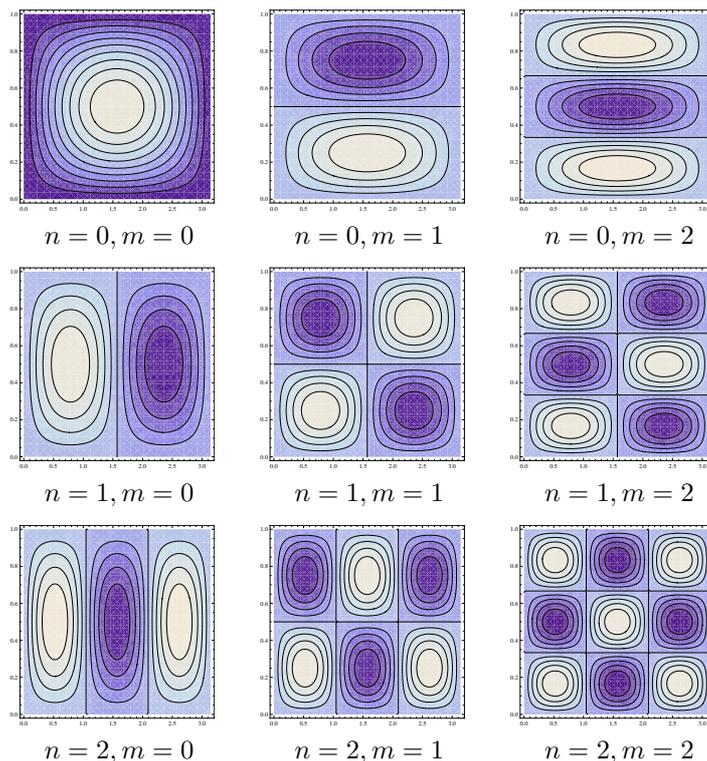


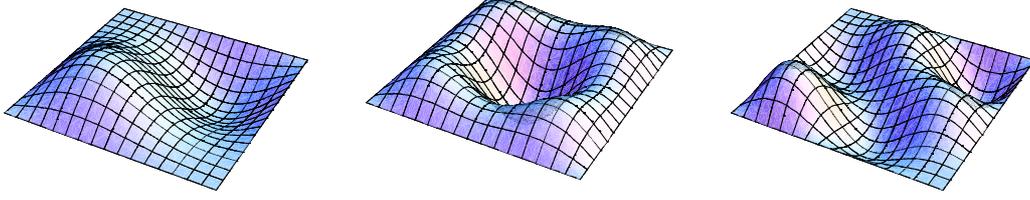
Figura 26: Linee di livello del tamburo rettangolare,  $n = 0, 1, 2$ ,  $m = 0, 1, 2$

(dimenticandoci dei dati iniziali rispetto a  $t$ , cioè di  $u_0$  e  $v_0$ ). Ragionando esattamente come ne caso del dominio rettangolare si trova che deve esistere un numero  $\omega > 0$  tale che

$$\Phi''(t) = -\omega^2 \Phi(t), \quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi(x, y) = -\omega^2 \Psi(x, y) & \text{per } (x, y) \in B_R \\ \Psi(x, y) = 0 & \text{se } (x, y) \in S_R. \end{cases}$$

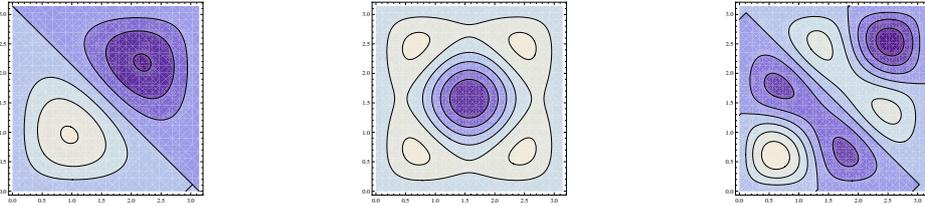
La prima equazione dà evidentemente  $\Phi(t) = A \cos(\omega t - \phi)$  per  $A \geq 0$  e  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Per trovare soluzioni della seconda è naturale passare a coordinate polari. Definiamo quindi

$$\Psi_1(\rho, \theta) = \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)), \quad \rho \in [0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$



$$n = 0, m = 1 + n = 1, m = 0 \quad n = 0, m = 2 + n = 2, m = 0 \quad n = 1, m = 2 + n = 2, m = 1$$

Figura 27: Profili “degeneri” del tamburo quadrato



$$n = 0, m = 1 + n = 1, m = 0 \quad n = 0, m = 2 + n = 2, m = 0 \quad n = 1, m = 2 + n = 2, m = 1$$

Figura 28: Alcuni modi “degeneri” del tamburo quadrato

Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi_1(\rho, \theta) &= \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \cos(\theta) + \frac{\partial}{\partial y} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \sin(\theta); \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Psi_1(\rho, \theta) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \cos^2(\theta) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \cos(\theta) \sin(\theta) + \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \sin(\theta) + \\ &\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \sin^2(\theta) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \cos(\theta); \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_1(\rho, \theta) &= - \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho \sin(\theta) + \frac{\partial}{\partial y} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho \cos(\theta); \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Psi_1(\rho, \theta) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho^2 \sin^2(\theta) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho \cos(\theta) + \\ &\quad - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho^2 \cos^2(\theta) + \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho \sin(\theta). \end{aligned}$$

Allora, se  $\Psi$  risolve l'equazione sopra, si ha:

$$\begin{aligned} & \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Phi_1(\rho, \theta) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_1(\rho, \theta) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Phi_1(\rho, \theta) = \\ & \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = -\omega^2 \rho^2 \Psi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = -\omega^2 \rho^2 \Psi_1(\rho, \theta) \end{aligned}$$

e quindi in coordinate polari l'equazione studiata diventa:

$$\begin{cases} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Psi_1(\rho, \theta) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi_1(\rho, \theta) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Psi_1(\rho, \theta) = -\omega^2 \rho^2 \Psi_1(\rho, \theta) & \text{per } 0 \leq \rho \leq R, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ \Psi_1 \text{ è } 2\pi\text{-periodica in } \theta, \ \Psi_1(R, \theta) = 0. \end{cases} \quad (38)$$

A questo punto cerchiamo di separare le variabili  $\rho$  e  $\theta$  scrivendo:

$$\Psi_1(\rho, \theta) = V(\rho)W(\theta)$$

che inserita in (38) dà:

$$\rho^2 V''(\rho)W(\theta) + \rho V'(\rho)W(\theta) + V(\rho)W''(\theta) = -\omega^2 \rho^2 V(\rho)W(\theta).$$

Dividendo per  $V(\rho)W(\theta)$  l'equazione sopra si ottiene:

$$\rho^2 \frac{V''(\rho)}{V(\rho)} + \rho \frac{V'(\rho)}{V(\rho)} + \frac{W''(\theta)}{W(\theta)} + \omega^2 \rho^2 = 0$$

che di nuovo, essendo il termine di sinistra somma di una funzione della sola  $\rho$  e di una della sola  $\theta$  equivale a

$$\rho^2 \frac{V''(\rho)}{V(\rho)} + \rho \frac{V'(\rho)}{V(\rho)} + \omega^2 = c = -\frac{W''(\theta)}{W(\theta)}$$

con  $c$  costante. Risolvendo l'equazione in  $\theta$ , e imponendo che abbia soluzioni  $2\pi$ -periodiche, si ottiene  $W(\theta) = A' \cos(n\theta - \phi')$ , per  $A' \geq 0$  e  $\phi' \in [0, 2\pi]$ , e soprattutto  $c = n^2$  con  $n$  intero non negativo. L'equazione in  $\rho$  diventa dunque:

$$\rho^2 V''(\rho) + \rho V'(\rho) + (\omega^2 \rho^2 - n^2)V(\rho) = 0 \quad \text{su } ]0, R[$$

con condizione  $V(R) = 0$ . Se poniamo ancora  $V_1(r) = V\left(\frac{r}{\omega}\right)$ , otteniamo  $V(\rho) = V_1(\omega\rho)$ ,  $V'(\rho) = \omega V_1'(\omega\rho)$  e  $V''(\rho) = \omega^2 V_1''(\omega\rho)$  per cui  $V_1$  verifica (ponendo  $r = \omega\rho$ ):

$$r^2 V_1''(r) + r V_1'(r) + (r^2 - n^2)V_1(r) = 0 \quad \text{su } ]0, \omega R[, \quad V_1(\omega R) = 0.$$

L'equazione scritta sopra è l'equazione di Bessel di ordine  $n$ . Dato che la soluzione deve essere prolungabile in zero (per come è nata) bisogna che la soluzione sia un multiplo della  $n$ -esima funzione di Bessel di prima specie e che tale funzione si annulli in  $\omega R$ , quindi:

$$V_1(r) = \alpha J_n(r), \quad \omega R = z_m^{(n)}$$

dove stiamo indicando con  $z_m^{(n)}$  l' $m$ -esimo zero della funzione  $J_n$ . In definitiva:

$$V(\rho) = \alpha V_{n,m}(\rho) \quad \text{dove } V_{n,m}(\rho) := J_n(\omega_{n,m}\rho), \quad \omega = \omega_{n,m} := \frac{z_m^{(n)}}{R}$$

e rimettendo tutto insieme:

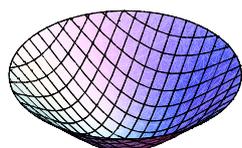
$$u(x, y, t) = A \cos(\omega_{n,m}t - \phi) \cos(n\theta - \phi') J_n(\omega_{n,m}\rho)$$

con  $\rho = \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \theta(x, y) = \text{Arg}(x, y)$  e dove  $A \in \mathbb{R}$ ,  $\phi, \phi' \in [0, 2\pi[$ .

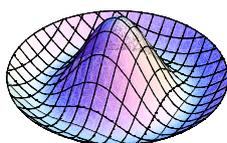
Le funzioni  $U_{n,m}$  trovate sopra sono i modi principali di vibrazione della membrana circolare. Quello che andrebbe fatto ora è di vedere se tali funzioni siano sufficienti a generare tutte le possibili soluzioni mediante una serie di loro combinazioni, cioè se una qualunque soluzione  $u(t, x, y)$  si possa scrivere come:

$$u(t, x, y) = \sum_{n,m} A_{n,m} \cos(\omega_{n,m}t - \phi_{n,m}) \cos(n\theta - \phi'_{n,m}) J_n(\omega_{n,m}\rho)$$

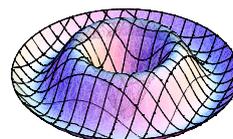
Questo fatto è vero ma rinunciamo a dimostrarlo.



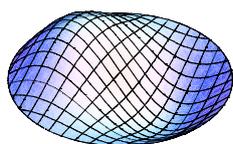
$n = 0, m = 0$



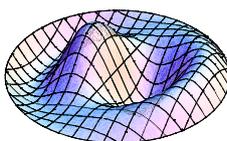
$n = 0, m = 1$



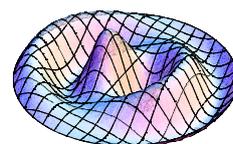
$n = 0, m = 2$



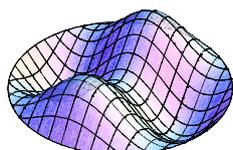
$n = 1, m = 0$



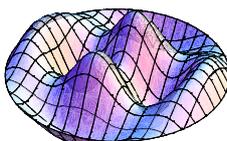
$n = 1, m = 1$



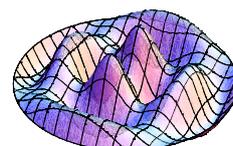
$n = 1, m = 2$



$n = 2, m = 0$



$n = 2, m = 1$



$n = 2, m = 2$

Figura 29: Profili del tamburo circolare,  $n = 0, 1, 2$ ,  $m = 0, 1, 2$

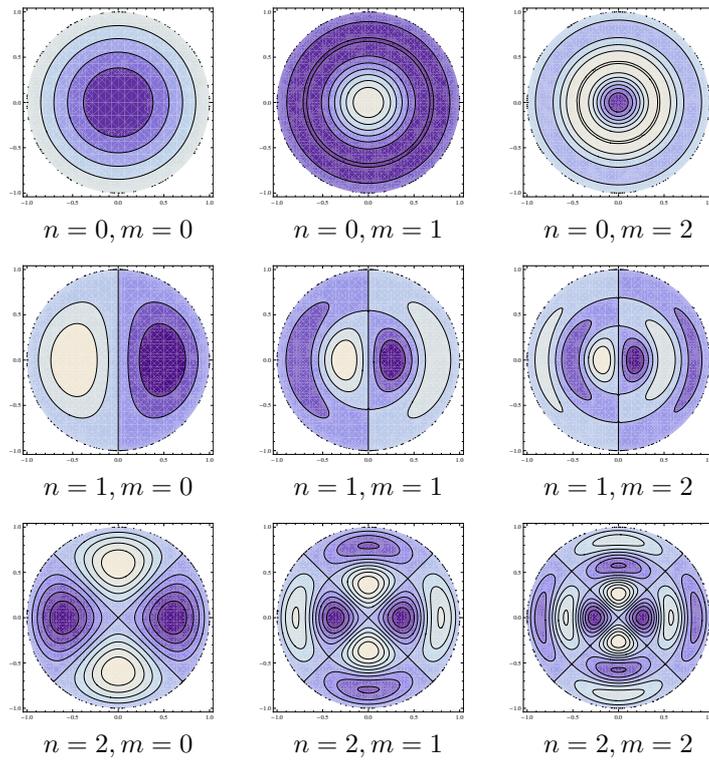


Figura 30: Linee di livello del tamburo circolare,  $n = 0, 1, 2$ ,  $m = 0, 1, 2$