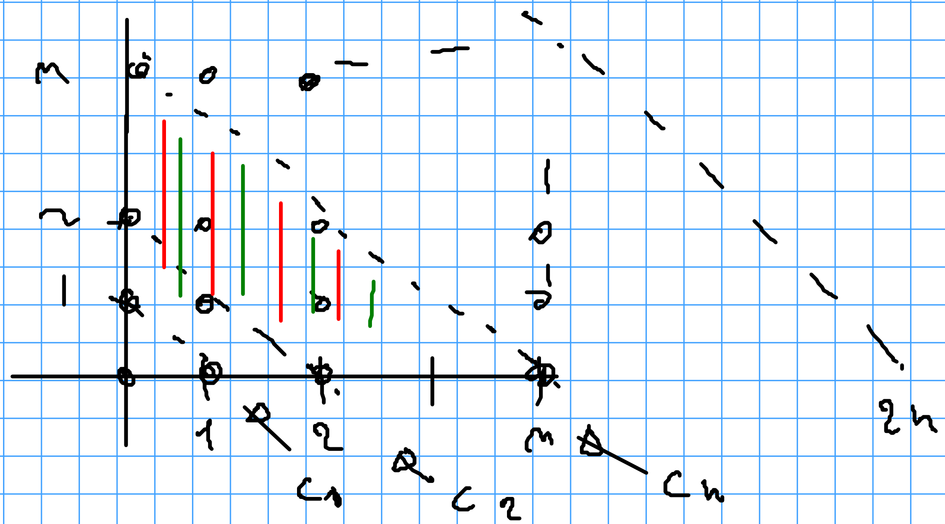
<u>Dim.</u> (prodotto di serie) <u>caso</u> $a_n \geq 0$ $b_n \geq 0$

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad \text{(somme parziali)}$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$



$A_n \cdot B_n$ = somma di tutti i prodotti in $Q_n = \{(i,j)\ i \leq n, j \leq n\}$

$$= \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j = \sum_{(i,j)\in Q_n} a_i b_j$$

$$C_n = \sum_{i,j \in T_n} a_i b_j \qquad T_n = \{(i,j) : i+j \leq n\}$$

$$T_n \subset Q_n \subset T_{2n}$$

Dato che $a_n \geq 0$ $b_n \geq 0$

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{(i,j)\in T_n} a_i b_j & \leq & \sum_{(i,j)\in Q_n} a_i b_i & \leq & \sum_{(i,j)\in T_{2n}} a_i b_j \\ \| & & \| & & \| \\ C_n & & A_n \cdot B_n & & C_{2n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \sum_{m=0}^{\infty} c_m & \leq & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} b_n & \leq & \sum_{n=0}^{\infty} c_n \end{array}$$

$\Longrightarrow$ TESI !!

TRALASCIAMO IL CASO DELLA CONV. ASSOLUTA

<u>Esempio</u>: Ricordo che $e^x = \boxed{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}}$

potrei DEFINIRE e^x mediante questa serie. (Ho dimostrato che conv. ass. $\forall x$ - criterio del rapporto) chiamo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

<u>DEVO DIMOSTRARE</u> che $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

<u>cioè</u>

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}}_{} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

|| (prodotto di Cauchy)

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \quad \text{dove} \quad c_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{m-k}}{(m-k)!} =$$

$$\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\frac{m!}{(m-k)!\,k!}}_{\binom{m}{k}} x^k y^{m-k} = \frac{1}{m!} (x+y)^m$$

<u>OK</u>

<u>DIM</u>

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \bar{R} = \frac{1}{\ell}$$

voglio sapere se converge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (*)

(1) passo alla serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x|^n$ (**) (conv. assoluta)

(2) applico il criterio della radice a (**)

$$\sqrt[n]{|a_n| |x|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| \longrightarrow \ell \cdot |x|$$

- se $\ell |x| < 1$ (**) converge.
- se $\ell |x| > 1$ (**) diverge, anzi $|a_n x^n| \to +\infty$

($a_n x^n \not\to 0$)

NE RICAVO CHE

se $|x| < \frac{1}{\ell} (= \bar{R})$ (*) conv. assolutamente

se $|x| > \frac{1}{\ell} (= \bar{R})$ (*) non può convergere

Per esempio

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

qui $a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n$ $\qquad \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1 \ (= \ell)$

$\overline{R} = 1$

CONV. ASS. SU $]-1, 1[$

NON CONV. FUORI DA $[-1, 1]$

IN $x = 1$ TROVO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

IN $x = -1$ TROVO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ CONV. (Leibniz), NON CON. ASS.

(si è visto che la somma vale $\ln(1-x)$?!)

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$ $\qquad a_n = \frac{1}{n^2} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1 \qquad \overline{R} = 1$

- CONV. ASS. per $x \in]-1, 1[$
- NON CONV. per x fuori da $[-1, 1]$
- $x = \pm 1$?!

$x = \pm 1$ $\quad \left|\frac{x}{n^2}\right| = \left|\frac{(\pm 1)}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ $\quad$ So che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

$\Rightarrow$ serie conv. ass.

Alla fine la serie conv. assolutamente se $x \in [-1, 1]$
non converge se $|x| > 1$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

qui $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ pari} \end{cases}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

IN QUESTO CASO $\nexists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (INFATTI

$\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \sqrt[2k]{1} \longrightarrow 1$; $\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = 0 \longrightarrow 0$

N.B. IN REALTÀ IL TEOREMA VALE CON IL "MASSIMO LIMITE"
DI $\sqrt[n]{|a_n|}$ $\Longrightarrow$ IL RAGGIO VIENE 1

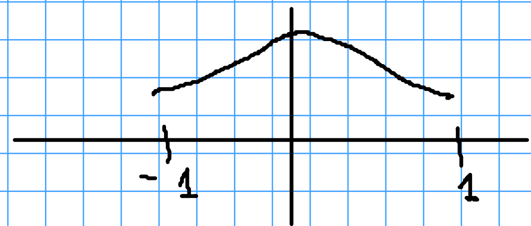
IN REALTÀ LA SERIE IN ESAME SI PUÒ SCRIVERE

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n$$ serie geometrica di ragione $-x^2$

VISTA COSÌ È CHIARO CHE CONVERGE $\iff \left|-x^2\right| < 1$

$\iff \left|x^2\right| < 1 \iff |x| < 1 \iff -1 < x < 1$

E QUINDI $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$$

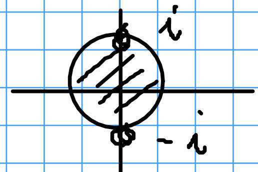


COSA C'È DI MALE IN ± 1 ??

BISOGNEREBBE STUDIARE $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$ con $z \in \mathbb{C}$

SI TROVEREBBE CHE TALE SERIE CONVERGE IN UN <u>DISCO</u>

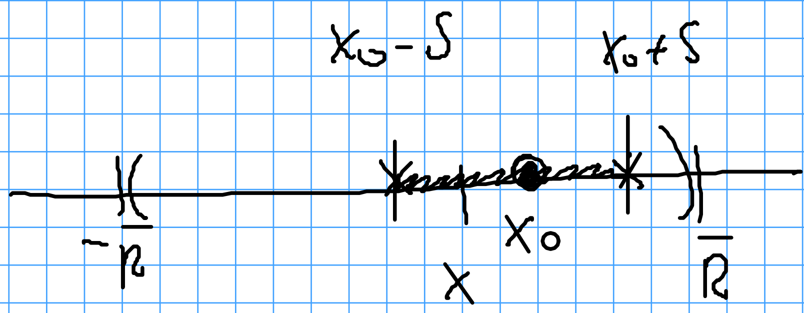
$D(0,\overline{R}) = D(0,1)$



la somma $\frac{1}{1+z^2}$ è singolare in $\pm i$

DIM.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$



È CONTINUA IN $]-\bar{R}, \bar{R}[$

dove $\bar{R} = \dfrac{1}{\ell}$, $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

FISSIAMO x_0 IN $]-\bar{R}, \bar{R}[$, dimostriamo la continuità in x_0.

(1) FISSO $\bar{\delta} > 0$ tale che $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset]-\bar{R}, \bar{R}[$

per es. $\max(|x_0-\delta|, |x_0+\delta|) = R < \bar{R}$

Prendo $\varepsilon > 0$

(2) Noto che $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| R^n$ e CONVERGE

$x_0-\bar{\delta} \leq x \leq x_0+\bar{\delta}$

$\exists\ \bar{n} :$ se $k \geq \bar{n}$ è grande $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| R^n < \frac{\varepsilon}{3}$

(3) $x \in]x_0-\bar{\delta}, x_0+\bar{\delta}[$

$$|f(x)-f(x_0)| = \left|\sum_{m=0}^{\infty} a_n x^m - \sum_{m=0}^{\infty} a_n x_0^m\right| =$$

$$\left|\sum_{m=0}^{\bar{m}} a_m (x^m - x_0^m) + \sum_{m=\bar{n}+1}^{\infty} a_n x^m - \sum_{m=\bar{m}+1}^{\infty} a_n x_0^m\right| \leq$$

$$\left|\sum_{m=0}^{\bar{m}} a_m (x^m - x_0^m)\right| + \sum_{m=\bar{m}+1}^{\infty} |a_n||x|^n + \sum_{m=\bar{n}+1}^{\infty} |a_n| |x_0|^m \leq$$

$$\underbrace{\left|\sum_{m=0}^{\bar{m}} a_m (x^m - x_0^m)\right|}_{a} + \underbrace{\sum_{m=\bar{m}+1}^{\infty} |a_n| R^n + \sum_{m=\bar{n}+1}^{\infty} |a_n| R^n}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}}$$

(4) Posso rimpicciolire δ: nuovo $0 < \delta \leq \bar{\delta}$ tale che

$$|a| < \frac{\varepsilon}{3}$$

IN DEFINITIVA $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ f è continua in x_0

NON DIMOSTRIAMO LA DERIVABILITÀ; NOTIAMO PERÒ CHE LA SERIE DELLE DERIVATE HA LO STESSO RAGGIO DI CONV.

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ fattori}} x^{n-k} =$$

$m = n-k$

$n = m+k$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} \underbrace{(m+k)\cdots\cdots(m+1)}_{k \text{ fattori}} x^{m}$$

Se faccio $\sqrt[m]{|a_{m+k}(m+k)\cdots(m+1)|} = \sqrt[m]{|a_{m+k}|}\sqrt[m]{m+k}\cdots\sqrt[m]{m+1}$

$\sqrt[m]{m+k} \to 1 \qquad \sqrt[m]{m+1} \to 1$

$$\left(|a_{m+k}|\right)^{\frac{1}{m}} = \underbrace{\left(|a_{m+k}|^{\frac{1}{m+k}}\right)^{\frac{m+k}{m}}}_{\text{si comporta come } \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \frac{m+k}{m} \to 1$$

DUNQUE IL RAGGIO DI CONVERGENZA È LO STESSO

ESEMPIO

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = f(x)$$

(1) DOVE CONVERGE?

$a_n = n \qquad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{R} = 1$

CONVERGE per $x \in]-1, 1[$

(2) Per trovare $f(x)$ partiamo dall'altra serie

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

per l'ultimo teorema $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ (il termine con $n=0$ è nullo)

* moltiplico per x trovo

$$x\, g'(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x\, n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = f(x)$$

$$\Rightarrow \ f(x) = x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

per esempio $\quad x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$