Analisi di Fourier e alcune equazioni della fisica matematica [1]

PRIMA LEZIONE

Introduzione

Equazioni differenziali con condizioni iniziali

Equazioni differenziali con dati al contorno

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Programma del corso

- Nozioni di convergenza per successioni di funzioni e serie di funzioni.
- Serie di potenze.
- Serie trigonometriche (di Fourier).
- Risoluzione “per serie” di alcune equazioni differenziali (ordinarie e alle derivate parziali)

Nota che è disponibile una dispensa sul materiale che verrà svolto l’anno scorso, all’indirizzo:
http://www2.ing.unipi.it/ d6081/DIDA/PE.pdf
(verrà leggermente modificata e corretta).

Idea guida (molto comune in matematica)

Dato un problema differenziale

$$\mathscr{P}(y) = 0$$

(l'incognita y è una funzione), si *approssima* il problema con una successione di problemi

$$\mathscr{P}_n(y) = 0$$

per i quali si è in grado di trovare una soluzione y_n.
Ci si chiede se – e *in che senso* – le y_n approssimano la soluzione y cercata.

In questo discorso si dà per buona l'esistenza di y. Può anche succedere che questo metodo sia utilizzato per **provare** tale esistenza: in questo caso il problema è di sapere se le y_n trovate *convergono in qualche senso* a una y limite.

È chiaro che in tutti questi discorsi è necessario avere una **nozione di convergenza** di y_n a y dove y_n e y sono funzioni.

Equazioni differenziali

- Un'**equazione differenziale** è un problema in cui l'incognita è una funzione y che deve verificare delle condizioni in cui sono coinvolte le derivate di y.
  Per esempio scrivendo
  $$y'' + y^2 = x$$
  intendiamo cercare una funzione $y(x)$ che sia derivabile due volte e tale che $y''(x) + y^2(x) = x$ per ogni x. Notiamo che oltre all'espressione di $y(x)$ è incognito anche l'intervallo di esistenza.
- Il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione si chiama **ordine dell'equazione**. Per esempio l'equazione sopra è di ordine due.

- L'equazione più semplice corrisponde a:

$$y' = f$$

dove f è una funzione assegnata su un certo intervallo I (problema della primitiva di f). In questo caso e' ben noto che, (se f è continua)

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

dove $x_0 \in I$. L'equazione dunque non ha un'unica soluzione, visto che rimane completamente libero il valore $y(x_0)$.
Possiamo invece dire che il problema:

$$y' = f, \qquad y(x_0) = y_0$$

ha una e una sola soluzione per ogni assegnato (x_0, y_0).

- In generale, se l'equazione è di ordine n "ci si aspetta" di poter imporre n condizioni aggiuntive alla soluzione.

Equazioni lineari del secondo ordine

Prenderemo il considerazione essenzialmente equazioni del tipo:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \qquad (Eq_f)$$

dove a, b, c, f sono funzioni continue su un certo intervallo I.
Tale equazione è ovviamente del secondo ordine. L'equazione è anche **lineare**, cioè la dipendenza da y è lineare.
A rigore si dovrebbe dire affine, data la presenza del **termine noto** f – se il termine noto è nullo l'equazione si dice **omogenea**.
Se $a(x) \equiv 1$ l'equazione si dice in **forma normale**; è chiaro che ci si può sempre ricondurre a questo caso se $a(x) \neq 0$ in I.

È chiaro che tali definizioni si possono dare anche per equazioni di ordine qualunque.

Teorema (di esistenza di Cauchy)

Supponiamo che $a(x)$ sia diverso da zero in I.
Sia x_0 un punto prefissato di I e siano y_0 e y_1 due numeri reali. Allora esiste unica una funzione y definita su tutto I, derivabile due volte e tale che:

$$\begin{cases} a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \qquad (P_f)$$

Il problema scritto sopra, consistente nell'equazione più le condizioni nel punto x_0, si chiama **problema di Cauchy** o **problema ai dati iniziali**.
La seconda locuzione sottintende un carattere *dinamico* dell'equazione che si immagina descrivere l'evoluzione nel tempo della quantità $y(x)$. Si deve pensare quindi a x come un tempo e a x_0 come a un istante prefissato in cui vengono assegnate "posizione" $y(x_0)$ e "velocità" $y'(x_0)$.

Struttura delle soluzioni dell'equazione lineare

Teorema

- *Se* y_1 *e* y_2 *sono soluzioni dell'equazione omogenea* (Eq_0) *e se* c_1 *e* c_2 *sono due numeri, allora* $c_1 y_1 + c_2 y_2$ *è soluzione di*(Eq_0).
- *Supponiamo di conoscere una soluzione* $\bar{y}$ *dell'equazione generale* (Eq_f). *Allora* y *risolve* (Eq_f) *se e solo se* $y - \bar{y}$ *risolve* (Eq_0)

Da quanto sopra si ricava che l'insieme delle soluzioni dell'omogenea è uno *spazio lineare*, che per il teorema di Cauchy risulta essere di dimensione due. L'insieme delle soluzioni di (Eq_f) è invece lo *spazio affine* ottenuto aggiungendo $\bar{y}$ alle soluzioni dell'omogenea.

Allora per risolvere l'equazione (Eq_f) bisogna:

- trovare due soluzioni *linearmente indipendenti* y_1 e y_1 di (Eq_0)
- trovare una soluzione $\bar{y}$ di (Eq_f);
- prendere $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \bar{y}$ al variare delle costanti c_1, c_2.

Caso a coefficienti costanti

Se supponiamo a, b, c costanti possiamo trovare facilmente le soluzioni dell'equazione omogenea.
Conviene considerare il caso complesso quindi $a, b, c \in \mathbb{C}$ e (e quindi la soluzione sarà una funzione a valori complessi).

Definizione

Il polinomio

$$P(z) = az^2 + bz + c$$

si chiama polinomio caratteristico dell'equazione.

Sappiamo che $P(z)$ ha due radici z_1 e z_2 eventualmente coincidenti (cioè $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$. Si vede che:

- $z_1 \neq z_2$ le funzioni $y_1(x) = e^{z_1 t}$ e $y_2(x) = e^{z_2 t}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti per l'equazione omogenea.
- $z_1 = z_2$ le funzioni $y_1(x) = e^{z_1 t}$ e $y_2(x) = te^{z_1 t}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti per l'equazione omogenea.

Nel **caso reale** $a, b, c \in \mathbb{R}$ si possono presentare tre casi significativi.

- due radici reali distinte – le indichiamo con x_1 e x_2 per enfatizzare il fatto che sono reali; allora la soluzione generale di (Eq_0) è:

$$y(x) = c_1 e^{x_1 t} + c_2 e^{x_2 t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

- una sola radice x_1 (due coincidenti) - tale radice è necessariamente reale; allora la soluzione generale di (Eq_0) è:

$$y(x) = c_1 e^{x_1 t} + c_2 t e^{x_1 t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

- due radici complesse distinte – allora tali radici devono formare una coppia di numeri coniugati $x_1 \pm i x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$;allora si vede (con qualche calcolo) che la soluzione generale di (Eq_0) è:

$$y(x) = e^{x_1 t} \left(c_1 \cos(x_2 t) + c_2 \sin(x_2 t) \right) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

Per quanto riguarda il caso non omogeneo ci sono delle regole per trovare una soluzione particolare, ma non ne parliamo (agiremo caso per caso).

L'equazione (Eq_f) modellizza (per esempio) il problema di una massa puntiforme legata ad una molla, in presenza di attrito.

Se la massa è pari a M, la costante elastica della molla è K e il coefficiente di attrito (proporzionale alla velocita) è A allora la posizione della massa puntiforme obbedisce all'equazione

$$My''(t) = -Ky(t) - Ay'(t) + F(t)$$

dove F è una forza esterna, che può dipendere dal tempo - abbiamo messo l'origine nel punto in cui è fissata la molla (e stiamo usando t invece di x come nome della variabile indipendente per sottolineare il fatto che si tratta di un tempo).

L'equazione è dunque

$$My'' + Ay' + Ky = F(t)$$

Vediamo per esempio il caso in cui $F(t)$ è costante F. Allora una soluzione particolare si trova immediatamente ed è $y(t) = \dfrac{F}{K}$. Le radici del ponomio caratteristico sono

$$x_{1,2} - \frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{A^2 - 4KM}}{2}$$

Se $A^2 > 4KM$ (attrito alto) le soluzioni sono reali e negative. Allora

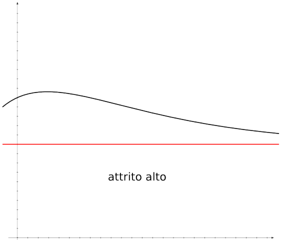
$$y(t) = c_1 e^{x_1 t} + c_2 e^{x_2 t} + \frac{F}{K};$$

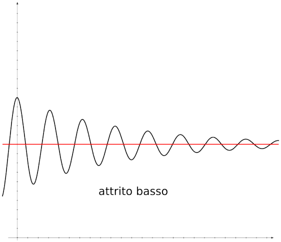
se $A^2 = 4KM$ (valore “critico”)

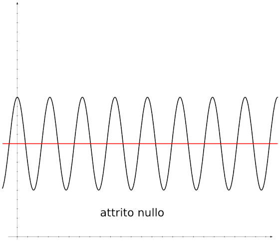
$$y(t) = e^{-\frac{A}{2}t}(c_1 + c_2 t);$$

se invece $A^2 < 4KM$ (attrito basso), $x_{1,2} = -\dfrac{A}{2} \pm \omega$ dove $\omega = \sqrt{KM - A^2}$, e

$$y(t) = e^{-\frac{A}{2}t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$$







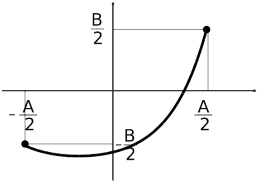
Se c’è attrito la soluzione tende alla posizione stazionaria.

Problemi al contorno

I problemi ai dati iniziali non esauriscono le problematiche delle equazioni differenziali.
Rimanendo nell'ambito delle equazioni del secondo ordine, ci sono molti problemi importanti in cui è spontaneo assegnare, ad esempio, il valore della soluzione y **agli estremi dell'intervallo** in cui si vuole sia definita y (senza prescrivere nulla sulle derivate). In altri casi invece può essere utile prescrivere la derivata prima, sempre agli estremi dell'intervallo.
Questo tipo di problemi, in cui si considerano **condizioni al contorno**, sono tipicamente *problemi statici* in cui la variabile indipendente x ha solitamente il significato di una posizione spaziale.
Vediamo un esempio piuttosto interessante.

La catenaria[2]

Come esempio di problema al contorno cerchiamo la posizione di una fune fissata agli estremi e sottoposta alla forza di gravità.



In questo caso la funzione incognita y rappresenta la forma della fune ed è chiaro che la condizione di fissaggio agli estremi corrisponde a una condizione al contorno

$$y\left(-\frac{A}{2}\right) = -\frac{B}{2}, \quad y\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{B}{2}$$

(possiamo sempre mettere gli assi di riferimento come nella figura).

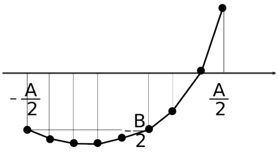
[2] Leibniz, Huygens, Johan Bernuoulli - 1691

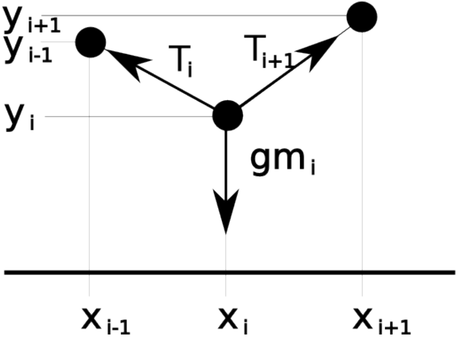
Un dato del problema è la lunghezza L della fune (inestensibile), che per evidenti motivi geometrici verifica

$$L \geq \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Un altro dato è la densità lineare della fune, espressa da un numero $\sigma > 0$.
È invece un'incognita da trovare, insieme alla posizione di equilibrio, anche la tensione T a cui la fune sottoposta.

Cerchiamo di ricavare un'equazione differenziale per la posizione.
Faremo un ragionamento di approssimazione, immaginando prima la fune costituita da n "palline" collegata con dei fili rigidi e facendo tendere n all'infinito. Nel disegno stiamo prendendo le ascisse equispaziate, ma questo non sarebbe necessario.





Poniamo

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i := y_i - x_{i-1}, \quad \Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

È inoltre ragionevole che

$$m_i = \sigma \Delta l_i$$

(si potrebbe anche prendere Δl_{i+1} o la media tra i due).

Scriviamo il bilanciamento delle forze agenti sulla pallina i-esima:

$$\frac{T_i}{\Delta l_i}\begin{pmatrix}-\Delta x_i\\-\Delta y_i\end{pmatrix}+g\sigma\Delta l_i\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\frac{T_{i+1}}{\Delta l_{i+1}}\begin{pmatrix}\Delta x_{i+1}\\\Delta y_{i+1}\end{pmatrix}=0 \tag{BIL}$$

Dalla prima componente dell'equazione vettoriale:

$$T_i\frac{\Delta x_i}{\Delta l_i}=T_{i+1}\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta l_{i+1}} \tag{BIL.x}$$

per cui la quantità $T_i\dfrac{\Delta x_i}{\Delta l_i}$ è costante rispetto a $i=1,\ldots,n$. Indichiamo con t_n tale costante. Se scriviamo il bilanciamento per $i=0$ (cioè nell'estremo sinistro) la forza di sinistra T_0 è la forza esercitata dal perno di sinistra – analogamente se $i=n$ T_{n+1} è forza esercitata dal perno di destra. Allora:

$$t_n \xrightarrow{n\to\infty} t := \text{componente orizzontale di } T_L = \text{componente orizzontale di } T_R$$

Passiamo alla componente verticale dell'equazione (BIL)

$$-T_i \frac{\Delta y_i}{\Delta l_i} + T_{i+1} \frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta l_{i+1}} = g\sigma \Delta l_i$$

che diventa, utilizzando la (BIL.x):

$$t_n \left(-\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} + \frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x_{i+1}} \right) = g\sigma \Delta l_i$$

o anche, dividendo per t_n e per $\Delta x_i = \dfrac{A}{n}$

$$\frac{1}{\Delta x_i} \left(\frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x_{i+1}} - \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right) = \frac{g\sigma}{t_n} \frac{\Delta l_i}{\Delta x_i} = \frac{g\sigma}{t_n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2}$$

Passando al limite per $n \to \infty$

$$y'' = \frac{g\sigma}{t} \sqrt{1 + (y')^2} = k\sqrt{1 + (y')^2} \qquad \text{(EQ.C)}$$

dove abbiamo posto $k = \dfrac{g\sigma}{t}$.

Oltre al bilanciamento delle forze abbiamo la condizione che la fune abbia lunghezza L:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \xrightarrow{n\to\infty} L$$

Dato che

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-/2}^{A/2} \sqrt{1+(y'(x))^2} dx$$

otteniamo la condizione:

$$\int_{-A/2}^{A/2} \sqrt{1+(y'(x))^2} dx = L \tag{L}$$

Per risolvere (EQ.C) poniamo $v = y'$ da cui:

$$\frac{v'}{\sqrt{1+v^2}} = k$$

che è un'equazione a variabili separabili; integrando si ha:

$$kx = \int_0^x \frac{v'(t)}{\sqrt{1+v(t)^2}}dt = \int_{v(0)}^{v(x)} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}d\xi = \operatorname{arcsinh}(v(x)) - \operatorname{arcsinh}(v(0))$$

e cioè (posto $\alpha = \operatorname{arcsinh}(v(0))$)

$$v(x) = \sinh(kx+\alpha)$$

da cui, per un'altra costante β,

$$y(x) = \frac{1}{k}\cosh(kx+\alpha) + \beta. \qquad \text{(SOL)}$$

Dobbiamo ora trovare α, β e k (anch'essa incognita dato che dipende da t).

Imponendo le condizioni agli estremi:

$$-\frac{Bk}{2} = \cosh\left(-\frac{Ak}{2}+\alpha\right)+\beta k = \cosh\left(\frac{Ak}{2}\right)\cosh(\alpha)-\sinh\left(\frac{Ak}{2}\right)\sinh(\alpha)+\beta k$$

$$\frac{Bk}{2} = \cosh\left(\frac{Ak}{2}+\alpha\right)+\beta k = \cosh\left(\frac{Ak}{2}\right)\cosh(\alpha)+\sinh\left(\frac{Ak}{2}\right)\sinh(\alpha)+\beta k$$

da cui (sommando e sottraendo)

$$\cosh\left(\frac{Ak}{2}\right)\cosh(\alpha) = -\beta k$$
$$\sinh\left(\frac{Ak}{2}\right)\sinh(\alpha) = \frac{Bk}{2}$$

Imponendo la condizione sulla lunghezza:

$$L = \int_{-A/2}^{A/2} \sqrt{1+(y'(x))^2}dx = \int_{-A/2}^{A/2} \sqrt{1+\sinh^2(kx+\alpha)}dx =$$

$$\int_{-A/2}^{A/2} \cosh(kx+\alpha)dx = \frac{1}{k}\sinh\left(\frac{Ak}{2}+\alpha\right) - \frac{1}{k}\sinh\left(-\frac{Ak}{2}+\alpha\right) =$$

$$\frac{2}{k}\sinh\left(\frac{Ak}{2}\right)\cosh(\alpha)$$

In definitiva abbiamo le tre condizioni

$$\begin{cases} \cosh\left(\frac{Ak}{2}\right)\cosh(\alpha) = -\beta k & (cond.1) \\ \sinh\left(\frac{Ak}{2}\right)\sinh(\alpha) = \frac{Bk}{2} & (cond.2) \\ \sinh\left(\frac{Ak}{2}\right)\cosh(\alpha) = \frac{Lk}{2} & (cond.3) \end{cases}$$

Dividendo $(cond.2)$ per $(cond.3)$:

$$\tanh(\alpha) = \frac{B}{L} \Leftrightarrow \alpha = \text{arctanh}\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{L}}\right)$$

(notiamo che $\frac{B}{L} < 1$ per cui arctanh(B/L) esiste). Allora

$$\sinh(\alpha) = \frac{\tanh(\alpha)}{\sqrt{1-\tanh^2(\alpha)}} = \frac{B}{\sqrt{L^2-B^2}}$$

$$\cosh(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(\alpha)}} = \frac{L}{\sqrt{L^2-B^2}}$$

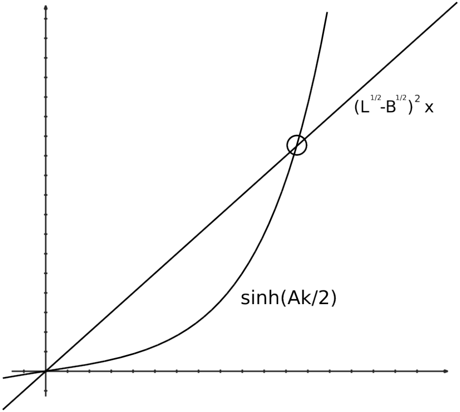
Da $(cond.2)$ ricaviamo allora

$$\sinh\left(\frac{Ak}{2}\right) = \frac{k\sqrt{L^2-B^2}}{2}$$

Dato che

$$A < \sqrt{L^2 - B^2} \Leftrightarrow L^2 > A^2 + B^2$$

il coefficiente angolare della retta $y = \frac{\sqrt{L^2-B^2}}{2}x$ è maggiore della derivata in zero della funzione $y = \sinh\left(\frac{A}{2}x\right)$ che fa $\frac{A}{2}$. Ne segue che esiste un unico k che verifica l'ultima equazione



Possiamo infine ricavare β

$$\beta = -\frac{1}{k}\cosh\left(\frac{Ak}{2}\right)\cosh(\alpha) = -\frac{1}{k}\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{Ak}{2}\right)}\cosh(\alpha) =$$

$$-\frac{1}{k}\sqrt{1+k^2\frac{L^2-B^2}{4}}\frac{L}{\sqrt{L^2-B^2}} = -\frac{L}{2}\sqrt{\frac{4}{k^2(L^2-B^2)}+1}$$

Possiamo poi trovare il vertice (x_V, y_V); si vede facilmente che

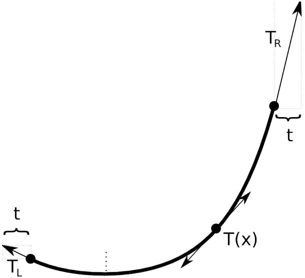
$$x_V = -\frac{\alpha}{k}, \qquad y_V = \beta + \frac{1}{k}$$

Possiamo anche ricavare la tensione $T(x)$ della fune in ogni suo punto; ricordiamo che la componente orizzontale è costante ed è pari a $t = \dfrac{g\sigma}{k}$

Possiamo anche ricavare la tensione $T(x)$ della fune in ogni suo punto; ricordiamo che la componente orizzontale $T_o(x)$ è costante ed è pari a $t = \dfrac{g\sigma}{k}$
D'altra parte la direzione della tensione deve essere tangente alla fune, per cui il modulo deve essere:

$$T(x) = t\sqrt{1 + (y'(x))^2} = t\cosh(kx + \alpha) = tk(y(x) - \beta) = g\sigma(y(x) - \beta)$$

Si potrebbe verificare che la componente verticale $T_v(x)$ è pari al peso della porzione di fune compreso tra x e il vertice inferiore.



In effetti si può anche trovare l'equazione della catenaria imponendo che la tensione $T(x)$ nel punto x abbia una componente $T_O(x) = t$ costante e una componente $T_V(x)$ tale che la direzione di $T(x)$ sia tangente alla curva, per cui

$$T_V(x) = ty'(x),$$

e imponendo che $T_V(x)$ equilibri il peso della fune tra il vertice e il punto x:

$$T_V(x) = g\sigma \int_{x_V}^{x} \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds$$

(stiamo prendendo x a destra di x_V). Eguagliando:

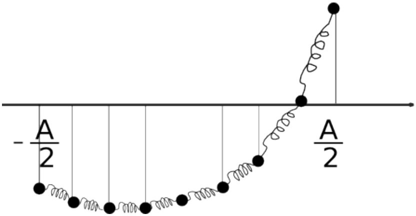
$$y'(x) = \frac{g\sigma}{t} \int_{x_V}^{x} \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds.$$

Facendo una derivata si ritrova l'equazione:

$$y''(x) = \frac{g\sigma}{t} \sqrt{1 + (y'(x))^2}.$$

La fune elastica

Consideriamo un altro esempio simile – supporremo ora che invece di una fune inestensibile ci sia un "elastico", che esercita una tensione proporzionale al suo allungamento.
Come nel caso precedente approssimiamo l'elastico con un numero finito di "palline" (tutte della medesima massa) che ora saranno collegato tra loro da delle molle di eguale costante elastica K.



Considereremo la situazione **irrealistica** in cui la lunghezza di riposo L_0 è pari a zero (cioè se nessuno lo tira l'elastico si "accartoccia in un punto") - si potrebbe vedere che nel caso di $L_0 > 0$ (in cui la forza elastica è proporzionale a $L - L_0$) le equazioni trovate forniscono un buon modello **quando l'elastico è vicino alla posizione orizzontale**.

Con le notazioni di prima:

$$K\begin{pmatrix}-\Delta x_i\\-\Delta y_i\end{pmatrix}+g\sigma\Delta x_i\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}-K\begin{pmatrix}\Delta x_{i+1}\\\Delta y_{i+1}\end{pmatrix}=0$$

da cui $\Delta x_i = \Delta x_{i+1} = \frac{A}{n}$ e

$$K\left(\frac{\frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x_{i+1}}-\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}}{\Delta x_i}\right)=g\sigma$$

e passando al limite

$$y'' = \frac{g\sigma}{K}$$

Quindi, se per esempio l'elastico è fissato alla medesima quota agli estremi ($B = 0$) la soluzione è un arco di parabola:

$$y(x) = \frac{g\sigma}{2K}\left(x^2 - \frac{A^2}{4}\right)$$

Si potrebbe vedere che se invece di una (densità di) forza costante c'è un termine $f(x)$ dipendente da x (per esempio una densità di massa non costante) allora l'equazione diventa:

$$\begin{cases} Ky'' = f(x) \\ y\left(-\frac{A}{2}\right) = y\left(\frac{A}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Equazione di d'Alembert

Con un procedimento analogo (di cui riparleremo) si può trovare un' equazione che descrive la legge del moto della corda (invece dell'equilibrio). In questo caso l'incognita $y = y(t,x)$ sarà una funzione di due variabili:

- una variabile spaziale x,
- una variabile temporale t.

Quindi $y(t,x)$ rappresenterà la posizione verticale della corda, nella posizione di riferimento orizzontale x all'istante t. Inserendo le equazioni della dinamica nel problema delle n palline collegate da molle (sempre con l'approsimazione della lunghezza a riposo nulla), se $n \to \infty$ si giunge all'equazione

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t,x) = c \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) + f(t,x)}$$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ sono "derivate parziali" (di ordine due) e l'equazione sopra si dice per l'appunto equazione alle derivate parziali; c è un'opportuna costante. Il termine f rappresenta ancora una forza esterna (che può anche dipendere dal tempo). Uno degli scopi che ci prefiggiamo nel corso è di studiare l'equazione sopra (**equazione di d'Alembert o della corda vibrante**).