Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Compito del 14 settembre 2003 Soluzioni (A/B/C/D)

A1 Si ha

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \boxed{0}$, perché $(\sin(n))$ è limitata e $1/n \to 0$;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sin(n) \boxed{\text{non esiste}}$ - detto più volte a lezione;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \boxed{1}$, per il limite notevole $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

A2 Si ha $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{k-1}\ln\left(\frac{n^k+2}{n^k+An+1}\right) = \boxed{-A}$ perché

$$n^{k-1}\ln\left(\frac{n^k+2}{n^k+An+1}\right) = n^{k-1}\ln\left(1+\frac{-An+1}{n^k+An+1}\right) = n^{k-1}\ln\left(1-\frac{A}{n^{k-1}}+o\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right)\right) =$$
$$n^{k-1}\left(-\frac{A}{n^{k-1}}+o\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right)\right) = -A+o(1)$$

A3 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n^k+2}{n^k+An^\alpha+1}\right)$ risulta convergente per $\boxed{\alpha < k-1}$. Infatti se $\alpha < k$

$$\ln\left(\frac{n^k+2}{n^k+An^\alpha+1}\right) = \ln\left(1+\frac{-An^\alpha+1}{n^k+An^\alpha+1}\right) = \ln\left(1-\frac{A}{n^{k-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{k-\alpha}}\right)\right) =$$
$$\left(-\frac{A}{n^{k-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{k-\alpha}}\right)\right)$$

Quindi la serie ha lo stesso carattere della serie $\sum 1/n^{k-\alpha}$ che è convergente per $k-\alpha > 1$, cioè $\alpha < k-1$. Se invece $\alpha \geq k$ allora il termine generale della serie non tende a zero e dunque la serie non può convergere.

B1 Consideriamo $f(x) := \dfrac{\arctan(x)}{x}$. Allora $\boxed{f \text{ è definita per } x \neq 0}$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{1} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{= 0^+} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{= 0^+}$$

(per il primo si può usare de l'Hospital, gli altri due sono facili). Possiamo allora porre $f(0) = 1$ e in questo modo f risulta continua in tutte le x reali. Si vede facilmente che $f(x) > 0$ per tutte le x (perché $\arctan(x)$ e x sono sempre concordi). Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

dove abbiamo posto $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \arctan(x)$. Per trovare il segno di f' conviene studiare il segno di g. È chiaro che $g(x)$ è definita per tutte le x reali, che $g(0) = 0$ e che

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Inoltre

$$g'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2} \leq 0 \qquad \forall x$$

Dunque $g(x) \geq 0$ se $x \leq 0$ e $g(x) \leq 0$ se $x \geq 0$ e lo stesso vale per f'. Ne segue che f cresce per $x \leq 0$ e decresce per $x \geq 0$. Il grafico è rappresentato nella prima figura.

B2 Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + A\sin(x^2))}{\cos(Bx) - 1} = \boxed{-\frac{2A}{B^2}}$$

Infatti

$$\frac{\ln(1 + A\sin(x^2))}{\cos(Bx) - 1} = \frac{\ln(1 + Ax^2 + o(x^2))}{-(B^2/2)x^2 + o(x^2)} = \frac{Ax^2 + o(x^2)}{-(B^2/2)x^2 + o(x^2)} = -\frac{2A}{B^2} + o(1)$$

C1 Si ha:

$$\int_0^{\pi/(4A)} \sqrt{1 + \tan^2(Ax)}\, dx = \underline{\hspace{5cm}}$$

Infatti poniamo $t = \tan(Ax)$ si ha $x = \dfrac{\arctan(t)}{A}$ e $dx = \dfrac{dt}{A(1+t^2)}$ per cui l'integrale diventa

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{A(1+t^2)}\, dt = \frac{1}{A}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \frac{1}{A}\left[\text{settsinh(t)}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\text{settsinh}(1)}{A}}$$

C2 Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2}{x}y - \frac{x^2}{A^2 + x^2} \quad , \quad y(1) = y_0 \qquad x > 0$$

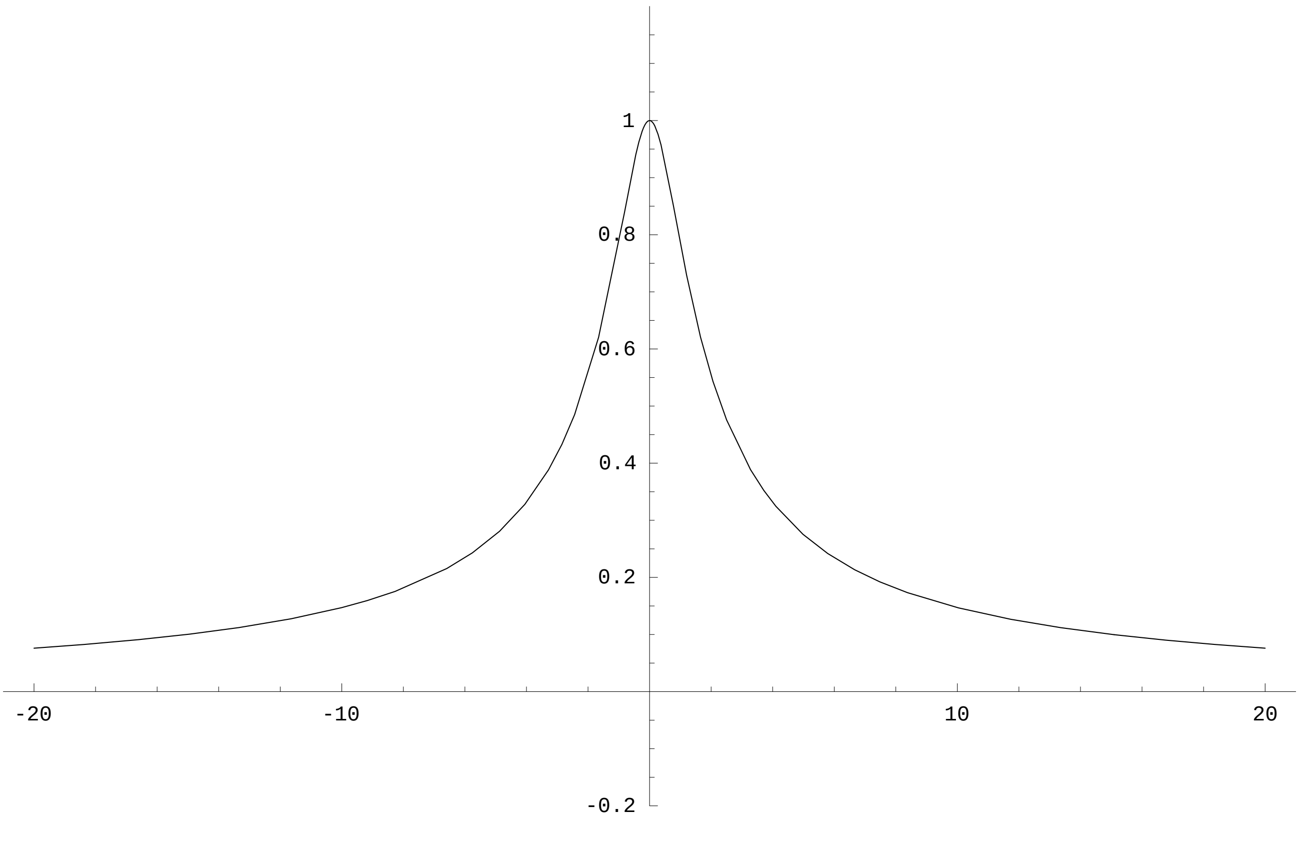
Applicando la formula risolutiva

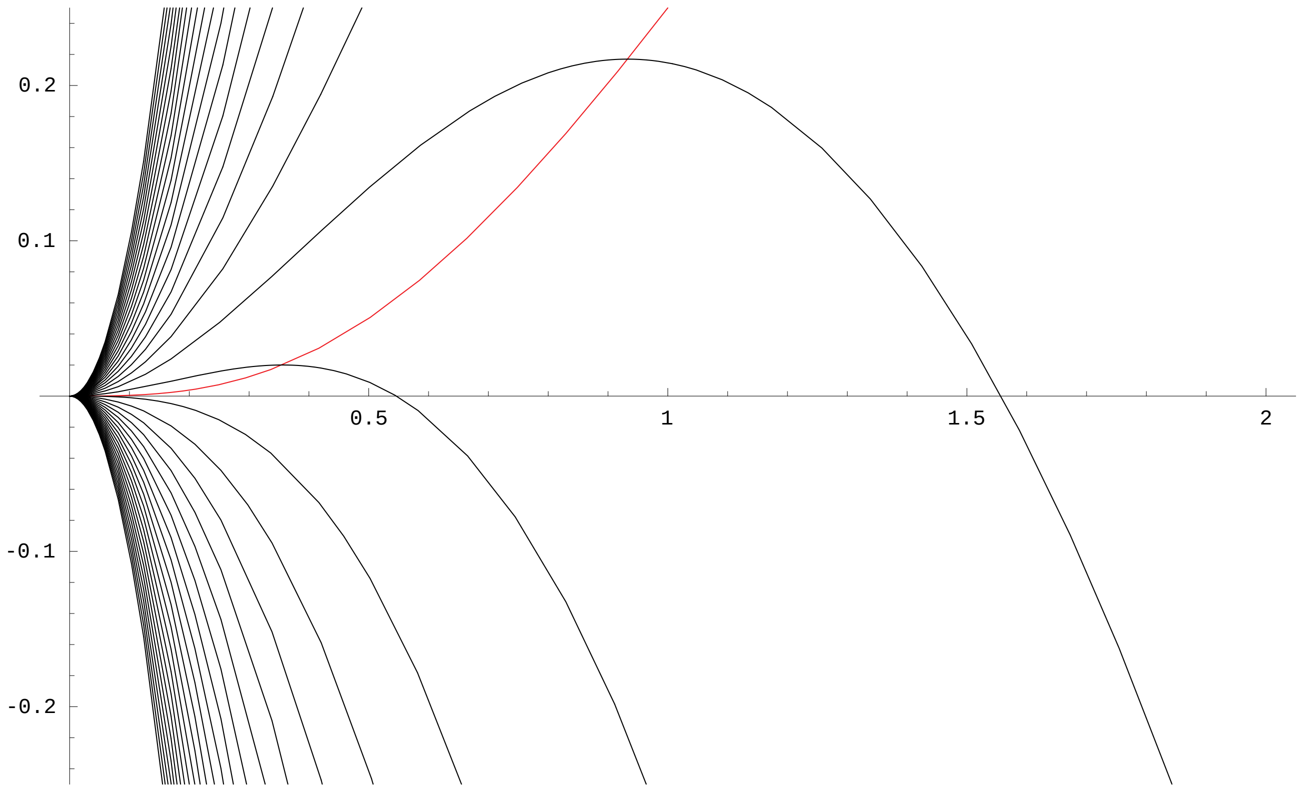
$$y(x) = x^2\left(y_0 - \int_1^x \frac{t^2}{A^2+t^2}\frac{1}{t^2}\, dt\right) = \boxed{x^2\left(c - \frac{1}{A}\arctan\left(\frac{x}{A}\right)\right)}$$

dove $c = y_0 + \dfrac{1}{A}\arctan\left(\dfrac{1}{A}\right)$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \boxed{\begin{cases} 0^+ & \text{se } c > 0 \\ 0^- & \text{se } c \leq 0 \end{cases}}, \quad \lim_{x\to 0^+} y(x) = \boxed{\begin{cases} +\infty & \text{se } c \geq \dfrac{\pi}{2A} \\ -\infty & \text{se } c < \dfrac{\pi}{2A} \end{cases}}$$

(il caso con $c = \dfrac{\pi}{2A}$ si può fare con de l'Hospital). Per studiare la monotonia di y (al variare di c conviene introdurre la funzione $F(x,y) := \dfrac{2}{x}y - \dfrac{x^2}{A^2+x^2}$, di modo che l'equazione assume la forma $y' = F(x,y)$ e studiare il segno di F. È facile vedere che, se $x > 0$, $F(x,y) > 0 \Leftrightarrow y > g(x)$ dove $g(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{A^2+x^2}$. Tracciando il grafico di g e usando il fatto che y cresce nelle x in cui $y(x) > g(x)$ e decresce se $y(x) < g(x)$ si trovano i grafici riportati nella seconda figura (in cui si è preso $A = 1$ - la curva che attraversa tutte le altre è la g).


1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-20
-10
10
20



0.2
0.1
-0.1
-0.2
0.5
1
1.5
2