Corso Statistica A, Informatica, anno 2021-22

Esercizi conclusivi

Esercizio 1

Consideriamo la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} c\,x^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Calcolare la costante c che rende la funzione sopra scritta una densità di probabilità, e scrivere la funzione di ripartizione di una variabile che abbia quella densità;

b) preso $0 < \beta < 1$, dare una formula per il β-quantile e calcolare il momento n-simo $\mathbf{E}[X^n]$;

c) posto $Y_n = (2 + X^n)$ esaminare se la successione $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge in probabilità ed eventualmente a quale limite.

Esercizio 2

Un ragazzo deve riempire un album di 10 figurine. Egli acquista le figurine in busta chiusa; ciascuna busta contiene una sola figurina, e si suppone che le figurine contenute nelle buste siano del tutto casuali ed indipendenti l'una dall'altra. Ovviamente la prima busta che acquista contiene una figurina che egli metterà sicuramente nell'album.

Sia X il numero di buste che deve acquistare, dopo la prima, per trovare la prima figurina diversa da quella già inserita nell'album; sia poi Y il numero di buste che deve acquistare successivamente per trovare la prima figurina diversa dalle prime due già inserite.

a) Calcolare la densità discreta (o funzione di massa) della variabile aleatoria X. È una distribuzione nota?

b) Calcolare la densità discreta della variabile aleatoria Y.

c) Quanto vale $\mathbf{P}\big\{X + Y = 3\big\}$?

Esercizio 3

Uno stilista commissiona delle scarpe ad una ditta artigianale e chiede che la varianza delle lunghezze delle scarpe di un dato numero, misurata in centimetri, non superi 0.1 . Vengono misurate accuratamente 40 scarpe prodotte e si ottiene una *varianza campionaria* eguale a 0.135 .

Supponendo che le lunghezze delle scarpe possano essere rappresentate con variabili aleatorie gaussiane, si può accettare al livello 0.05 l'ipotesi

$$H\big)_0 \ \sigma^2 \leq 0.1 \qquad \text{contro} \qquad H\big)_1 \ \sigma^2 > 0.1 \ ?$$

Rispondere alla stessa domanda supponendo però che il numero 0.135 sia stato ottenuto come varianza campionaria delle misurazioni di un campione di 60 scarpe.

Esercizio 4

Consideriamo la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} c\, x\, \mathbf{e}^{-\frac{x^2}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a) Calcolare la costante c che rende la funzione sopra scritta una densità di probabilità, e preso $0 < \beta < 1$, dare una formula per il β-quantile di una v.a. X che abbia quella densità;

b) calcolare la funzione generatrice dei momenti della v.a. X^2 .

Esercizio 5

Il punto di fusione dello stagno allo stato puro è di 231.06 gradi Celsius. Sono stati prelevati 81 campioni di stagno proveniente da una miniera (e quindi contenente delle impurità) ed è stata fatta una accurata misurazione delle loro temperature di fusione ottenendo una temperatura media di 235.44 gradi e una deviazione standard campionaria 3.6 .

a) Il tecnico che ha condotto queste misurazioni ha calcolato che la precisione delle misurazioni è 0.82 : con quale livello di fiducia ha (approssimativamente) calcolato questa precisione?

b) Commentando i risultati, il tecnico afferma che in realtà la varianza di queste misurazioni non supera 10: indicare quale test si deve predisporre per verificare questa affermazione ed esaminare se l'ipotesi può essere accettata ai livelli 0.05 e 0.025. Che cosa si può dire sul *p-value* di questo test?

Esercizio 6

Consideriamo la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathbf{e}^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Sia X una v.a. avente quella densità (che è poi la densità Gamma(2,1)) e sia $Y = X^{-1}$.

a) Calcolare (se esiste) la covarianza $Cov(X, Y)$;

b) esaminare quali momenti possiede la v.a. Y ;

c) esaminare quale relazione esiste tra i quantili delle variabili X e Y .