Esercizio 1 5 figli con $P(M)=P(F)=\frac{1}{2}$ ed eventi indipendenti per il sesso dei 5 figli.

Probabilità di avere più di un figlio maschio?

$X : \Omega \to \{0,1,2,3,4,5\}$ $X = \#$ maschi

$$X = B(5, \tfrac{1}{2})$$

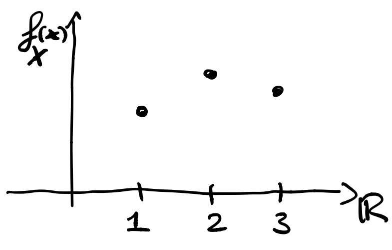
$$P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \big(P(X=0) + P(X=1)\big)$$

$$= 1 - \left(\binom{5}{0}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \right) = 1 - \left(\tfrac{1}{32} + \tfrac{5}{32} \right)$$

$$= \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$$

Esercizio 2 $X : \Omega \to \{1,2,3\}$ $p(1)=p_1$, $p(2)=p_2$, $p(3)=p_3$

(i) Sotto quali condizioni si ha $E[X]=2$?



Intuitivamente $p_1 = p_3$.

$$\begin{cases} E[X] = 1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + 3\cdot p_3 = 2 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p_2 + 2p_3 = 1 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$p_3 = \alpha \in [0,1] \qquad \iff \begin{cases} p_2 = 1 - 2\alpha \\ p_1 = 1 - p_2 - \alpha = \alpha \end{cases}$$

$$\boxed{p_1 = p_3 = \alpha, \quad p_2 = 1 - 2\alpha \qquad \alpha \in [0, \tfrac{1}{2}]}$$

(ii) Dato che $E[X]=2$, quando è massima $Var(X)$?

$$\max_{\alpha\in[0,\frac12]} Var(X) = \max_{\alpha\in[0,\frac12]} E\left[(X-E[X])^2\right] =$$

$$= \max_{\alpha\in[0,\frac12]} \left(E[X^2]-E[X]^2\right) = \max_{\alpha\in[0,\frac12]} \left(1^2\cdot p_1+2^2\cdot p_2+3^2 p_3 - 4\right)$$

$$= \max_{\alpha\in[0,\frac12]} \left(\alpha+4(1-2\alpha)+9\alpha-4\right) = \max_{\alpha\in[0,\frac12]} 2\alpha = 1$$

$$\downarrow$$

$$\alpha = \tfrac12$$

$$\boxed{p_1 = p_3 = \tfrac12, \quad p_2 = 0}$$

<u>Esercizio 3</u> Ad Informatica ci sono ragazze nella percentuale del 22%.

Y_F : {ragazze} $\to \mathbb{R}$ ha legge $N(165, 25)$

Y_M : {ragazzi} $\to \mathbb{R}$ " " $N(178, 36)$

Studiare X : {ragazze} $\cup$ {ragazzi} $\to \mathbb{R}$.

$$\boxed{X \sim \alpha Y_F + \beta Y_M \quad \text{NON C'ENTRA}}$$

(i) $P\{X \le x\}$ $\qquad B_1 =$ {ragazze}, $B_2 =$ {ragazzi}

$$P_X((-\infty,x]) = P((-\infty,x]\mid B_1)P(B_1) + P((-\infty,x]\mid B_2)P(B_2)$$

$$= P(Y_F\in(-\infty,x])P(B_1) + P(Y_M\in(-\infty,x])P(B_2)$$

$$= \frac{22}{100}\cdot\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,5}e^{-\frac{(t-165)^2}{50}}dt + \frac{78}{100}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,6}e^{-\frac{(t-178)^2}{72}}dt$$

(ii) $Z = \mathcal{N}(0,1)$ $\quad Y_F = 5Z + 165$, $Y_M = 6Z + 178$

$$P(Y_F \le x) = P\left(Z \le \frac{x-165}{5}\right) = \Phi\left(\frac{x-165}{5}\right)$$

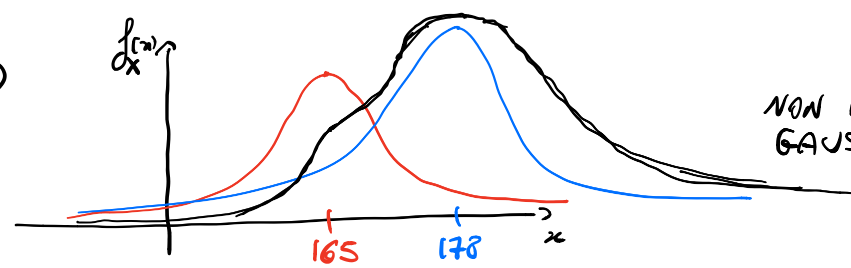
$$P(Y_M \le x) = P\left(Z \le \frac{x-178}{6}\right) = \Phi\left(\frac{x-178}{6}\right)$$

$$F_X(x) = \frac{22}{100}\,\Phi\left(\frac{x-165}{5}\right) + \frac{78}{100}\,\Phi\left(\frac{x-178}{6}\right)$$

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{22}{100}\,\frac{d}{dx}\left(\Phi\left(\frac{x-165}{5}\right)\right) + \frac{78}{100}\,\frac{d}{dx}\left(\Phi\left(\frac{x-178}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{22}{100}\,\underbrace{\varphi\left(\frac{x-165}{5}\right)} \cdot \frac{1}{5} + \frac{78}{100}\,\underbrace{\varphi\left(\frac{x-178}{6}\right)} \cdot \frac{1}{6}$$

(iii)



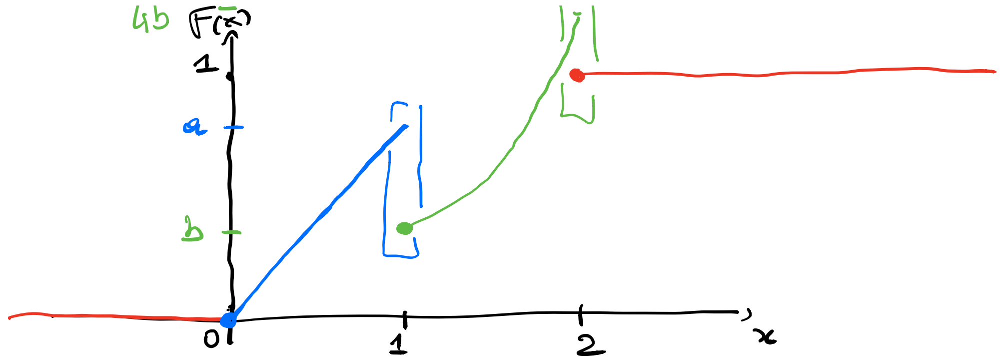
NON È GAUSSIANA

Esercizio 4

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ax, & 0 \le x < 1 \\ bx^2, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

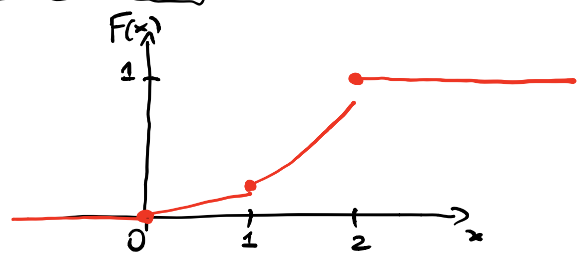
(i) Sotto quali condizioni per a e b, F è una funzione di ripartizione?

- Debolmente crescente ($x < y \Rightarrow F(x) \le F(y)$)
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- F sia continua a destra $\left(\lim_{y \to x^+} F(y) = F(x)\right)$



- $a \ge 0$
- $b \ge a$
- $1 \ge 4b$

$\Rightarrow \boxed{0 \le a \le b \le \frac{1}{4}}$

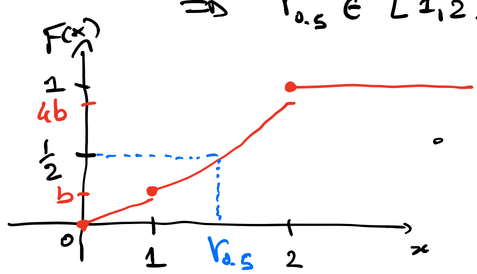


Es $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$

(ii) Calcolare la mediana di F.

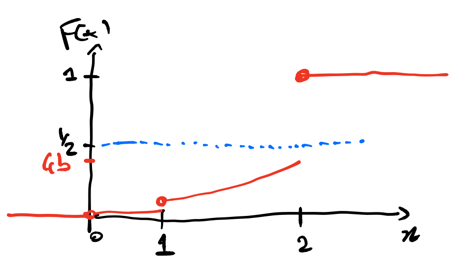
Sappiamo che $F(1) = b \le \frac{1}{4}$, $F(2) = 1 > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow r_{0.5} \in [1, 2]$.



- $1 \ge 4b \ge \frac{1}{2} \Rightarrow b\, r_{0.5}^2 = \frac{1}{2}$

$$r_{0.5} = \frac{1}{\sqrt{2b}}$$



- $4b < \frac{1}{2} \Rightarrow r_{0.5} = 2$

(iii) Sotto quali condizioni su a e b, F è funz. di ripartizione di una v.a. con densità?

Aggiungiamo a (i), che F è continua.

Devo avere $0 \leq a \leq b \leq \frac{1}{4}$ e in più

$$\left.\begin{array}{l} a = \lim_{x \to 1^-} F(x) = F(1) = b \\ 4b = \lim_{x \to 2^-} F(x) = F(2) = 1 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{a = b = \frac{1}{4}}$$

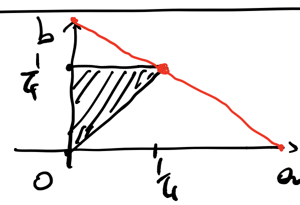
ATTENZIONE NON CONVENIVA SEGUIRE QUESTA STRADA

$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ a, & 0 < x < 1 \\ 2bx, & 1 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$ è la densità.

Allora $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 a\,dx + \int_1^2 2bx\,dx = 1$

$a + 3b = 1$

(i) + ($a+3b=1$)



$\Rightarrow a = b = \frac{1}{4}$