ES 1 Indichiamo con X la variabile aleatoria definita come:

$X = 0$ se un passeggero non si presenta

$X = 1$ se un passeggero si presenta.

Quindi $X \sim B(1, p)$, ossia è una v.a di Bernoulli di parametro $p = \frac{2}{3}$.

Siano poi definite le seguenti variabili aleatorie:

$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, che determina quanti passeggeri si presentano per il volo con 3 posti,

$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$, che determina quanti passeggeri si presentano per il volo con 5 posti,

dove le X_i sono indipendenti ed equidistribuite con la X di sopra.

Ne segue che $Y \sim B(4, p)$ e $Z \sim B(7, p)$.

Infine, la probabilità che un passeggero che ha prenotato non trovi posto è:

$P\{Y \geq 4\}$ per il volo con 3 posti,

$P\{Z \geq 6\}$ per il volo con 5 posti.

Si trova

$$P\{Y \geq 4\} = P\{Y = 4\} = \binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{2^4}{3^4}$$

$$P\{Z \geq 6\} = P\{Z = 6\} + P\{Z = 7\} =$$
$$= \binom{7}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{7}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^7\left(\frac{1}{3}\right)^0 =$$
$$= 7 \cdot \frac{2^6}{3^6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2^7}{3^7} = \frac{2^6}{3^6}\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2^6}{3^5}$$

Quindi $P\{Z \geq 6\} > P\{Y \geq 4\}$ essendo $\frac{2^6}{3^5} > \frac{2^4}{3^4}$, ed è più probabile non trovare posto in un volo a 5 posti.

<u>ES. 2</u> (i) La funzione F_ϑ è continua, crescente ma non strettamente, e derivabile per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

La densità di una v.a. X con F_ϑ funzione di ripartizione è quindi data da $f_\vartheta(x) = F'_\vartheta(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, e il valore in $\{0,1\}$ può essere fissato arbitrariamente.

Si trova quindi

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} (\vartheta+1)\, x^\vartheta, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per i momenti scriviamo

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_\vartheta(x)\, dx = \int_0^1 (\vartheta+1)\, x^{k+\vartheta}\, dx < +\infty, \ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

inoltre $E[X^k] = \frac{\vartheta+1}{\vartheta+k+1}\, x^{k+\vartheta+1}\Big|_0^1 = \frac{\vartheta+1}{\vartheta+k+1}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$

(ii) Ponendo $\vartheta = 1$ si trova che $E[X_i] = \frac{2}{3}$ e

$Var(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = \frac{2}{4} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$, per ogni X_i, $i = 1, \dots, 90$.

Quindi $P\{X_1 + \dots + X_{90} \geq 55\} =$

$$= P\left\{ \frac{X_1 + \dots + X_{90} - 90 \cdot E[X_i]}{\sqrt{90 \cdot Var(X_i)}} \geq \frac{55 - 90 \cdot E[X_i]}{\sqrt{90 \cdot Var(X_i)}} \right\} \sim$$

usando il Teo del Limite Centrale con $Y \sim N(0,1)$

$$\sim P\left\{ Y \geq \frac{55 - 90 \cdot \frac{2}{3}}{\sqrt{90 \cdot \frac{1}{18}}} \right\} = P\left\{ Y \geq \frac{55-60}{\sqrt{5}} \right\} =$$

$$= P\{ Y \geq -\sqrt{5} \} = 1 - P\{ Y \leq -\sqrt{5} \} =$$

$$= 1 - \Phi(-\sqrt{5}) = 1 - (1 - \Phi(\sqrt{5})) = \Phi(\sqrt{5}) \sim$$

$$\sim \Phi(2.24) \sim 0.987$$

(iii) Il metodo dei momenti si applica ponendo inizialmente $E[X_i] = \bar{x}$. Da questa si trova $\frac{\vartheta+1}{\vartheta+2} = \frac{3}{4} \iff 4\vartheta + 4 = 3\vartheta + 6$

$\iff \vartheta = 2$. Quindi la stima è $\tilde{\vartheta} = 2$, che è compatibile con la richiesta $\vartheta > 0$.

ES. 3 (i) Va utilizzato un test unilatero sulla varianza di un campione Gaussiano.

L'ipotesi è $H_0)\ \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 4$, $H_1)\ \sigma^2 > \sigma_0^2 = 4$

e, data la regione critica

$$C = \left\{ \frac{(n-1)\,\bar{\sigma}^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{(1-\alpha,\, n-1)} \right\}$$

con $\bar{\sigma}$ = deviazione standar campionaria, α = livello del test,

n = cardinalità del campione,

e $\chi^2_{(1-\alpha, n-1)}$ = $(1-\alpha)$-quantile di una v.a. con densità chi-quadro con $n-1$ gradi di libertà,

il test è accettato al livello α se

$$\frac{(n-1)\,\bar{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{(1-\alpha,\, n-1)}$$

Usando $\bar{\sigma} = 2.3 \text{ cm}^3$, $\sigma_0 = 2 \text{ cm}^3$, $\alpha = 0.1$, $n = 25$

e $\chi^2_{(0.9,24)} \sim 33.2$, si trova

$$\frac{(n-1)\,\bar{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 \cdot 5.29}{4} = 31.74 < 33.2 \sim \chi^2_{(0.9,24)}$$

e quindi il test va accettato.

(ii) Il p-value per questo tipo di test è

$$\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{(n-1)\,\bar{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)$$

Usando i dati di sopra, tranne $\bar{\sigma}$, troviamo che dobbiamo risolvere l'equazione

$$0.05 = 1 - F_{\chi^2(24)}\left(\frac{24 \cdot \bar{\sigma}^2}{4}\right) = 1 - F_{\chi^2(24)}(6\,\bar{\sigma}^2)$$

$\Leftrightarrow \quad F_{\chi^2(24)}(6\,\bar{\sigma}^2) = 0.95$

$\Leftrightarrow \quad 6\,\bar{\sigma}^2 \sim 36.415$

$\Leftrightarrow \quad \bar{\sigma}^2 \sim 6.069$

$\Leftrightarrow \quad \bar{\sigma} \sim 2.46$

ES. 3 (vecchio programma)

(i) La matrice di transizione completa risulta essere

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Se $X_0 = 2$ è distribuita come $(0\ 1\ 0\ 0)$, dunque

X_1 è distribuita come $(0\ 1\ 0\ 0)P = (1\ 0\ 0\ 0)$

X_2 è distribuita come $(1\ 0\ 0\ 0)P = (2/3\ \ 1/3\ \ 0\ \ 0)$

X_3 è distribuita come $(2/3\ \ 1/3\ \ 0\ \ 0)P = (7/9\ \ 2/9\ \ 0\ \ 0)$

(iii) Dobbiamo trovare le soluzioni (a, b, c, d) con $a, b, c, d \geq 0$ e $a+b+c+d=1$, del sistema

$$(a\ \ b\ \ c\ \ d)\,P = (a\ \ b\ \ c\ \ d) \iff$$

$$\iff \begin{cases} \frac{2}{3}a + b = a \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}c = b \\ \frac{1}{2}c = c \\ d = d \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{3}a \\ c = 0 \\ d = d \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi $(3/4\ \ 1/4\ \ 0\ \ 0)$, $(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$, e tutte le combinazioni $(\frac{3}{4}\lambda\ \ \frac{1}{4}\lambda\ \ 0\ \ \mu)$ con $\lambda + \mu = 1$, $\lambda, \mu \geq 0$.