

Calcolo delle Probabilità e Statistica
Corso di Laurea in Informatica
Compito del 11-04-2022

Esercizio 1. (8 punti)

È data una moneta non equilibrata, per la quale la probabilità che esca testa è p (con $0 < p < 1$). Sappiamo che se vengono effettuati due lanci consecutivi con questa moneta, la probabilità di ottenere due teste è uguale alla probabilità di ottenere due risultati diversi.

- a) Ricavare la probabilità p .
- b) Lanciando la moneta 450 volte, trovare un valore approssimato per la probabilità di ottenere testa almeno 290 volte.

Esercizio 2. (10 punti)

Dato un parametro $\theta > 0$, si consideri la funzione

$$F_{\theta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x \leq 0; \\ c_{\theta} x^2, & \text{per } 0 < x < \sqrt{\theta}; \\ 1, & \text{per } x \geq \sqrt{\theta}; \end{cases}$$

per un'opportuna costante c_{θ} .

- a) Si determini il valore della costante c_{θ} affinché la funzione $F_{\theta}(x)$ sia la funzione di ripartizione di una v.a. con densità. Calcolare media e varianza di una tale v.a. in funzione di θ .
- b) Consideriamo ora un campione X_1, \dots, X_n di v.a. con densità aventi la funzione di ripartizione $F_{\theta}(x)$. Esaminare la stima del parametro θ con il metodo dei momenti e con il metodo di massima verosimiglianza per un insieme di dati x_1, \dots, x_n tali che $x_k > 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

Esercizio 3. (12 punti)

In una catena di produzione di una ditta viene condotta un'analisi sulla quantità di pezzi difettosi prodotti. Analizzando un campione di 200 pezzi, si trovano 8 pezzi difettosi.

- a) Con quale livello di fiducia si ottiene una precisione della stima di 0.02 per la probabilità che un prodotto risulti difettoso? Determinare l'intervallo bilatero al livello di fiducia ottenuto.
- b) Il responsabile della ditta sostiene che la probabilità di prodotti difettosi non sia superiore al 2%. Dire, giustificando la risposta, se l'ipotesi del responsabile è plausibile alla luce del campione esaminato.
- c) Sui 200 prodotti analizzati, qual è il numero massimo di prodotti difettosi che avremmo dovuto trovare per concludere che l'ipotesi del responsabile fosse molto plausibile (p-value maggiore o uguale a 0.3)?

Esercizio 3 per programma precedente. (12 punti)

Si consideri la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ associata alla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

dove $\lambda \in [0, 1]$.

- a) Determinare le probabilità invarianti della catena al variare di λ .
- b) Determinare per quale valore di λ si ottiene la massima probabilità di trovarsi in 3 al tempo 2, partendo dallo stato 4 al tempo 0.
- c) Partendo dallo stato 1 al tempo 0, determinare al variare di λ un tempo T per cui la probabilità di trovarsi in 4 al tempo T è positiva.