Lezione 9
TAN e TAEG : esempi ed esercizi
Introduzione all’ammortamento.

Maurizio Pratelli

TAN e TAEG: definizioni

I termini TAN e TAEG sono diventati di largo uso: di fatto non sono altro che il TIR ma vengono usati esclusiamente per operazioni di finanziamento.

Il TAN Tasso Annuo Nominale è i l tasso implicito in una operazione di finanziamento.

Ad esempio, se otteniamo da una Banca un prestito di 3000 € da saldare con due rate annuali di 1500 e 1700 € , il TAN viene calcolato risolvendo l'equazione

$$3000 = \frac{1500}{(1+i)} + \frac{1700}{(1+i)^2}$$

e in questo caso il risultato è 4,32 % .

TAN e TAEG: definizioni

Il TAEG Tasso Annuo Effettivo Globale è sempre il tasso implicito in una operazione di finanziamento, tenendo però conto anche delle spese accessorie.

Supponiamo, nell'esempio precedente, che la Banca richieda una commissione inziale di 50 € per istruire la pratica, ed una commissione di 10 € per il pagamento di ogni rata (motivandole come spese amministrative).

Mentre il TAN non tiene conto di queste ulteriori spese, il TAEG si ottiene risolvendo l'equazione

$$2950 = \frac{1510}{(1+i)} + \frac{1710}{(1+i)^2}$$

e si ottiene un interesse del 5,91 % annuo.

TAN e TAEG: definizioni

Se i pagamenti avvengono non su base annua ma su frazioni di anno (poniamo $1/k$ di anno), bisogna tenere conto di una ulteriore importante differenza:

Il TAN è inteso come tasso annuo nominale convertibile k volte in un anno

Invece

Il TAEG è il tasso annuo equivalente secondo le regole della capitalizzazione composta

Esercizio 1. Si ottiene un finanziamento di 2000 € rimborsabile con due rate semestrali di 1050 € ; in più la banca chiede 100 € iniziali per la pratica e 5 € di commissione per ogni singolo versamento.
Calcolare il TAN ed il TAEG di questo finanziamento

Osservazione Nel primo caso, calcolato il tasso i_2 risolvendo una equazione di secondo grado, si ottiene il TAN i dalla regola $i = 2\, i_2$ (tasso annuo nominale convertibile 2 volte).

Nel secondo caso, dopo aver ricavato i_2 , si ottiene il tasso effettivo i dalla regola $i = (1 + i_2)^2 - 1$.

$$2000 = \frac{1050}{(1+i_2)} + \frac{1050}{(1+i_2)^2} \qquad x = (1+i_2)$$

$$2000\,x^2 - 1050\,x - 1050 = 0$$

$$200\,x^2 - 105\,x - 105 = 0$$

$$x = \frac{105 \pm \sqrt{105^2 + 4 \times 200 \times 105}}{400}$$

si scarta il "meno"

$$x = 1{,}0331 \qquad i_2 = 3{,}31\%$$

TAN $6{,}62\%$

$$1900 = \frac{1055}{(1+i_2)} + \frac{1055}{(1+i_2)^2} \qquad x = 1+i_2$$

$$1900\,x^2 - 1055\,x - 1055 = 0$$

$$x = \frac{1055 \pm \sqrt{1055^2 + 4 \times 1900 \times 1055}}{3800}$$

$$x = 1{,}0728 \qquad i_2 = 7{,}28\%$$

$$i = (1+i_2)^2 - 1 = 0{,}1508$$

TAEG 15% annuo

Esercizio 2. Per l'acquisto di uno scooter del prezzo di 4000 € vengono proposti i due seguenti finanziamenti:

a) 1700 € al momento dell'acquisto più due rate annuali di 1260 € senza ulteriori spese;

b) 1000 € al momento dell'acquisto più due rate annuali di 1600 € , con 100 € di spese iniziali di pratica e 20 € di commissione per il pagamento di ogni rata.

Calcolare il TAN ed il TAEG delle due proposte di finanziamento e specificare quale proposta è più conveniente

a) TAN = TAEG

$$4000 = 1700 + \frac{1260}{1+i} + \frac{1260}{(1+i)^2}$$

$$x = (1+i)$$

$$2300\, x^2 - 1260\, x - 1260 = 0$$

$i = 6,31\%$ annuo

b) TAN

$$3000 = \frac{1600}{1+i} + \frac{1600}{(1+i)^2}$$

TAEG

$$2900 = \frac{1620}{1+i} + \frac{1620}{(1+i)^2}$$

Risultati:

$TAN_A = TAEG_A = 6,31\%$

$TAN_B = 4,41\% \qquad TAEG_B = 7,72\%$

Evidentemente è più conveniente la proposta A.

Ho trovato questo esercizio:

Esercizio 3. Abbiamo la possibilità di tre progetti di finanziamento, i cui flussi di cassa (annuali) sono rappresentati dalla seguente tabella:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & 2 \\ A & 10000 & -4500 & -6000 \\ B & 10000 & -6500 & -4000 \\ C & 10000 & 0 & -10500 \end{pmatrix}$$

Scegliere il progetto migliore sulla base del TIR (osserviamo che in questo caso coincidono TIR, TAN e TAEG)

Però questo esercizio ha soluzione evidente e non c'è bisogno di effettuare dei calcoli ... perché?

Riprendiamo allora lo stesso esercizio con i dati leggermente modificati:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & 2 \\ A & 10000 & -4500 & -6200 \\ B & 10000 & -6500 & -4100 \\ C & 10000 & 0 & -10800 \end{pmatrix}$$

In questo caso effettivamente non c'è una soluzione evidente, e bisogna effettuare i calcoli opportuni.

a) $$10.000 = \frac{4500}{(1+i_A)} + \frac{6200}{(1+i_A)^2}$$

$$100x^2 - 45x - 62 = 0$$

$$x = \frac{45 \pm \sqrt{45^2 + 4 \times 62 \times 100}}{200} = 1{,}0439$$

$i_A = 4{,}39\%$ annuo

---

b) $$10.000 = \frac{6500}{(1+i_B)} + \frac{4100}{(1+i_B)^2}$$

$$100x^2 - 65x - 41 = 0$$

$$x = \frac{65 \pm \sqrt{65^2 + 4 \times 100 \times 41}}{200} = 1{,}0430$$

$i_B = 4{,}3\%$ annuo

c) $$10.000 = \frac{10.800}{(1+i_c)^2}$$

$$(1+i_c) = \sqrt{\frac{108}{100}} = \sqrt{\frac{27}{25}} = 1{,}0392$$

$i_c = 3{,}92\%$ annuo

L'argomento dell'ammortamento (cioè pagamento di un debito) verrà affrontato nella lezione successiva, cominciamo con una rapida introduzione.

A volte capita di dover rimborsare una somma C con n rate periodiche (annuali, semestrali, mensili ...) eguali, calcolate secondo un interesse i (i è l'interesse sul periodo) e naturalmente usando la regola della capitalizzazione composta.

Affinché l'importo della rata R sia calcolato secondo l'interesse i, deve valere l'equazione

$$C = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Abbiamo già effettuato il calcolo della rata R nella lezione 17, ottenendo la formula

$$R = \frac{C\,i}{1-(1+i)^{-n}}$$

(ad esempio le rate dei mutui immobiliari sono calcolate secondo questa formula).

Esercizio 4. Un cliente pattuisce con una Banca un prestito di 10000 € da pagare in rate annuali eguali secondo l'interesse del 4 % annuo; l'importo della rata è da stabilire.

a) Il cliente propone come importo della rata 400 € ma gli rispondono che non è possibile: perché ?

b) Gli propongono una rata annuale di 800 € : quanti anni sono necessari per estinguere il debito?

c) Il cliente propende per una rata intermedia di 600 € : in questo caso, quanti anni sono necessari?

a) deve essere $R > Ci$

$C \cdot i = 10.000 \times 0{,}04 = 400$

b) e c)

$$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$$

Vogliamo trovare n

$$1-(1+i)^{-n} = \frac{Ci}{R}$$

$$(1+i)^{-n} = \frac{R-Ci}{R}$$

si passa ai logaritmi

$$-n\log(1+i) = \log(R-Ci) - \log(R)$$

$$n = \frac{\log(R) - \log(C-i)}{\log(1+i)}$$

b) $R = 800$

$$n = \frac{\log(800) - \log(400)}{\log(1,04)} = 17,67$$

circa 17 anni e 8 mesi

c) $R = 600$

$$n = \frac{\log(600) - \log(200)}{\log(1,04)} = 28,01$$

poco più di 28 anni