

Lezione 7

Posizioni finanziarie, rendite ... esercizi.

Maurizio Pratelli

Ci muoviamo adesso in un contesto nel quale ci sono investimenti, crediti, anche con date diverse e interessi diversi.

Se non viene specificato il contrario, useremo sempre il criterio della **capitalizzazione composta**, eventualmente su periodi diversi di accredito degli interessi.

Piuttosto che procedere con formule teoriche, ci muoveremo per esempi ed esercizi.

Diamo per intuitivo il fatto che **il montante di più capitali è la somma dei montanti**, così come **il valore attuale di più capitali è la somma dei valori attuali**.

Esercizio 1. Ho investito 2 anni fa 1000 € al tasso d'interesse annuo del 4 % e 3 anni fa 500 € al tasso d'interesse semestrale del 2,3 % ; inoltre devo pagare tra 8 mesi un debito di 3000 € che è estinguibile al tasso d'interesse bimestrale dello 1 %.

Qual è attualmente la mia **posizione patrimoniale**?

Mi conviene chiudere la posizione riscuotendo crediti e pagando debiti o mi conviene attendere la scadenza del debito?

Osservazione: notiamo che non è stata definita la nozione di “*posizione patrimoniale*” perché la consideriamo intuitiva.

In questo caso è abbastanza evidente che conviene uscire subito dalla posizione anziché attendere, ma in generale per stabilire quale posizione è preferibile occorre dare un tasso di riferimento.

Ad esempio: conviene riscuotere subito 1000 € o 1080 € tra due anni?

La risposta dipende da quale interesse riesco ad ottenere investendo 1000 € per due anni.

Verificare ad esempio che cosa succede se ottengo un interesse del 3 % o del 4 % annuo.

Esercizio 2. Ho a disposizione tre crediti, uno di 7500 € che scade oggi, uno di 9000 € che scade tra un anno e 8 mesi ed uno di 10500 € che scade tra 4 anni. I crediti sono calcolati secondo un tasso di interesse quadrimestrale dello 1,5 %.

Quanto posso incassare se li riscuoto immediatamente?

Osserviamo che si può procedere in due modi:

- a) misurare il tempo in quadrimestri
- b) trasformare l'interesse quadrimestrale i_3 in interesse annuale mediante la formula $i = (1 + i_3)^3 - 1$ e misurare il tempo in anni.

Scegliamo la prima strada.

A volte capita di riscuotere (o dover pagare) la stessa rata per un certo numero di scadenze, ad esempio posso riscuotere 500 € tra un anno, tra due .. fino a 5 anni: se considero il tasso di interesse annuo del 3 %, qual è il valore attuale e quale sarà il montante alla scadenza finale?

Scrivere le formule corrispondenti.

Ci accorgiamo che viene utile la seguente formula, dove a è un numero positivo diverso da 1.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Ad esempio $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ ma $1 + 2 + 4 + 8 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$ e
 $\frac{2^4 - 1}{2 - 1} = \frac{16 - 1}{2 - 1}$.

Una conseguenza immediata della precedente è la seguente formula

$$a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}$$

Dimostrazione della formula (facoltativa)

Dimostrazione della formula (facoltativa)

Torniamo all'esempio di partenza: è più comodo vedere le formule in astratto. La situazione è la seguente: nei tempi $1, 2, \dots, n$ (possono essere anni o frazioni) si ottiene una rata R secondo un tasso d'interesse composto "sul periodo" i .

Il montante M al termine del periodo è

$$M = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \dots + R = R \left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \right)$$

cioè con formula compatta

$$M = R \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right)$$

La formula per il valore attuale A è la seguente

$$A = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

e si potrebbe ripetere il calcolo precedente *ma non conviene*.

Conviene osservare che il valore attuale A è in realtà il valore del montante M (disponibile alla data n) **attualizzato** ad oggi, cioè $A = \frac{M}{(1+i)^n}$ e si ottiene la formula

$$A = R \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right)$$

A volte (soprattutto quando parleremo di ammortamenti) sarà più comodo vedere la formula precedente in questo modo

$$R = \frac{A i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Esercizio 3. Determinare, al tasso annuo del 6 %, il valore attuale di una rendita posticipata nella quale il primo pagamento avviene tra 3 anni, costituita da 12 rate annuali di 1500 € .

Esercizio 4. Per il pagamento di uno scooter del costo di 4000 € il venditore propone il seguente piano di pagamento:

- 1000 € subito
- due rate di 1600 € tra 6 mesi e tra un anno

Qual è l'interesse annuo sottinteso in questa operazione finanziaria?

Osservazione: anche qui possiamo procedere in due modi

- misurare il tempo in semestri ed ottenere l'interesse semestrale i_2 e poi ricavare l'interesse annuo i dalla formula $i = (1 + i_2)^2 - 1$
- misurare il tempo in anni

Però il secondo metodo fa intervenire delle radici ed è meno agevole, useremo pertanto il primo metodo.

