Lezione 7
Posizioni finanziarie, rendite ... esercizi.

Maurizio Pratelli

Ci muoviamo adesso in un contesto nel quale ci sono investimenti, crediti, anche con date diverse e interessi diversi.

Se non viene specificato il contrario, useremo sempre il criterio della capitalizzazione composta, eventualmente su periodi diversi di accredito degli interessi.

Piuttosto che procedere con formule teoriche, ci muoveremo per esempi ed esercizi.

Diamo per intuitivo il fatto che il montante di più capitali è la somma dei montanti, così come il valore attuale di più capitali è la somma dei valori attuali.

Esercizio 1. Ho investito 2 anni fa 1000 € al tasso d'interesse annuo del 4 % e 3 anni fa 500 € al tasso d'interesse semestrale del 2,3 % ; inoltre devo pagare tra 8 mesi un debito di 3000 € che è estinguibile al tasso d'interesse bimestrale dello 1 %.
Qual è attualmente la mia posizione patrimoniale?
Mi conviene chiudere la posizione riscuotendo crediti e pagando debiti o mi conviene attendere la scadenza del debito?

Osservazione: notiamo che non è stata definita la nozione di *"posizione patrimoniale"* perché la consideriamo intuitiva.

Posizione oggi:

$$1000 \times 1{,}04^2 + 500 \times 1{,}023^6 - \frac{3000}{1{,}01^4} =$$

$$= -1228{,}24$$

Alla scadenza, cioè tra 8 mesi

2 anni + 8 mesi $= 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ di anno

3 anni + 8 mesi $= 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$

in semestri

La posizione diventa

$$1000 \times 1{,}04^{8/3} + 500 \times 1{,}03^{22/3} - 3000$$

$$= -1299{,}01$$

In questo caso è abbastanza evidente che conviene uscire subito dalla posizione anziché attendere, ma in generale per stabilire quale posizione è preferibile occorre dare un tasso di riferimento.

Ad esempio: conviene riscuotere subito 1000 € o 1080 € tra due anni?

La risposta dipende da quale interesse riesco ad ottenere investendo 1000 € per due anni.

Verificare ad esempio che cosa succede se ottengo un interesse del 3 % o del 4 % annuo.

$1000 \times 1{,}03^2 = 1060{,}9 \rightarrow$ attendere

$1000 \times 1{,}04^2 = 1081{,}6 \rightarrow$ riscuotere subito

Esercizio 2. Ho a disposizione tre crediti, uno di 7500 € che scade oggi, uno di 9000 € che scade tra un anno e 8 mesi ed uno di 10500 € che scade tra 4 anni. I crediti sono calcolati secondo un tasso di interesse quadrimestrale dello 1,5 %.
Quanto posso incassare se li riscuoto immediatamente?

Osserviamo che si può procedere in due modi:

- a) misurare il tempo in quadrimestri
- b) trasformare l'interesse quadrimestrale i_3 in interesse annuale mediante la formula $i = (1 + i_3)^3 - 1$ e misurare il tempo in anni.

Scegliamo la prima strada.

Riscontro immediato:

$$7500 + \frac{9000}{1{,}015^{5}} + \frac{10500}{1{,}015^{12}} =$$

$$= 24.646{,}91$$

Calcoliamo l'interesse annuo:

$$(1+i) = (1+0{,}015)^3 = 1{,}0456$$

cioè l'interesse annuo equivalente

è $4{,}56\%$

Valore attuale e montante di rate eguali

A volte capita di riscuotere (o dover pagare) la stessa rata per un certo numero di scadenze, ad esempio posso riscuotere 500 € tra un anno, tra due .. fino a 5 anni: se considero il tasso di interesse annuo del 3 %, qual è il valore attuale e quale sarà il montante alla scadenza finale?

Scrivere le formule corrispondenti.

$$A = \frac{500}{1{,}03} + \frac{500}{1{,}03^2} + \quad + \frac{500}{1{,}03^5}$$

$$M = 500 \times 1{,}03^4 + \ldots + 500$$

Ci accorgiamo che viene utile la seguente formula, dove a è un numero positivo diverso da 1.

$$1 + a + a^2 + \dots a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Ad esempio $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ ma $1 + 2 + 4 + 8 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$ e $\dfrac{2^4 - 1}{2 - 1} = \dfrac{16 - 1}{2 - 1}$.

Una conseguenza immediata della precedente è la seguente formula

$$a + a^2 + \dots a^n = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}$$

Dimostrazione della formula (facoltativa)

Poniamo

$$s = 1 + a + \dots + a^n$$

$$as = a + a^2 + \dots + a^{n+1}$$

$$as - s = s(a-1) = a + a^2 + \dots + a^{n+1} - (1 + a + \dots + a^n)$$

$$= a^{n+1} - 1 \qquad \text{e quindi}$$

$$s = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Allo stesso modo

$$a^k + a^{k+1} + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - a^k}{a-1}$$

infatti

$$a^k + \dots + a^n = a^k\left(1 + a + \dots + a^{n-k}\right) =$$

$$= a^k \, \frac{a^{n-k+1} - 1}{a-1}$$

Torniamo all'esempio di partenza: è più comodo vedere le formule in astratto. La situazione è la seguente: nei tempi 1,2, . . . n (possono essere anni o frazioni) si ottiene una rata R secondo un tasso d'interesse composto *"sul periodo"* i.

Il montante M al termine del periodo è

$$M = R\,(1+i)^{n-1} + R\,(1+i)^{n-2} + \cdots + R = R\left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\right)$$

cioè con formula compatta

$Q = (1+i)$

$$M = R\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

La formula per il valore attuale A è la seguente

$$A = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

e si potrebbe ripetere il calcolo precedente *ma non conviene*.

$$A = \frac{M}{(1+i)^n}$$

Conviene osservare che il valore attuale A è in realtà il valore del montante M (disponibile alla data n) attualizzato ad oggi, cioè $A = \frac{M}{(1+i)^n}$ e si ottiene la formula

$$A = R\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

A volte (soprattutto quando parleremo di ammortamenti) sarà più comodo vedere la formula precedente in questo modo

$$R = \frac{A\,i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Esercizio 3. Determinare, al tasso annuo del 6 %, il valore attuale di una rendita posticipata nella quale il primo pagamento avviene tra 3 anni, costituita da 12 rate annuali di 1500 € .

$$A = \frac{1500}{(1,06)^3} + \cdots + \frac{1500}{(1,06)^{14}} =$$

$$= 1500\left(\left(\frac{1}{1,06}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{1,06}\right)^{14}\right)$$

Poniamo $a = \dfrac{1}{1{,}06}$

e ricordiamo che

$$a^3 + \dots + a^{14} = \frac{a^{15} - a^3}{a - 1}$$

Si ha pertanto

$$A = 1500 \times \left(\frac{1{,}06^{-15} - 1{,}06^{-3}}{1{,}06^{-1} - 1} \right)$$

$$= 11.192{,}38$$

Esercizio 4. Per il pagamento di uno scooter del costo di 4000 € il venditore propone il seguente piano di pagamento:

- 1000 € subito
- due rate di 1600 € tra 6 mesi e tra un anno

Qual è l'interesse annuo sottinteso in questa operazione finanziaria?

Osservazione: anche qui possiamo procedere in due modi

- misurare il tempo in semestri ed ottenere l'interesse semestrale i_2 e poi ricavare l'interesse annuo i dalla formula $i = \left(1 + i_2\right)^2 - 1$
- misurare il tempo in anni

Però il secondo metodo fa intervenire delle radici ed è meno agevole, useremo pertanto il primo metodo.

$$4000 = 1000 + \frac{1600}{1+i_2} + \frac{1600}{(1+i_2)^2}$$

poniamo $x = (1+i_2)$ e moltiplichiamo per x^2: si ottiene

$$4000\,x^2 = 1000\,x^2 + 1600\,x + 1600$$

cioè

$$3000\,x^2 - 1600\,x - 1600 = 0$$ cioè

$$15\,x^2 - 8\,x - 8 = 0$$

Soluzione

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \times 8 \times 15}}{30} = \frac{8 \pm 23,32}{30}$$

si scarta la soluzione negativa e si ottiene

$$(1 + i_2) = x = \frac{8 + 23,32}{30} = 1,044$$

cioè il tasso semestrale i_2 è $4,4\%$

Il tasso annuale è

$$i = (1 + 0,044)^2 - 1 = 0,089$$

cioè l'interesse annuo è $8,9\%$